文章编号：1000－2367(2017)02－0001－07　　**DOI：**10.16366/j.cnki.1000－2367.2017.02.001

一类风险模型的破产概率

刘利敏，牛海峰

(河南师范大学 数学与信息科学学院，河南 新乡 453007)

摘　要：考虑了一类多险种多索赔情形的风险模型.首先，证明了调节系数的存在唯一性，进而利用鞅的相关不等式及性质，得到了破产概率的 Lundberg 不等式及一般表达式；然后，通过模型转换，考虑充分小时段内的索赔情况，利用全概率公式得到了生存概率满足的积分-微分方程；最后，考虑两险种且索赔额服从指数分布这一特定情况，结合前面得到的积分-微分方程和经典风险理论的结果，给出了该特定情况下破产概率的显式表达式.

关键词：Poisson 过程；鞅；破产概率；生存概率

中图分类号：O211　　**文献标志码：**A

对于经典风险模型[1]，有众多模型上的推广研究：对索赔到达过程进行推广，例如文献[2－3]把索赔到达过程由 Poisson 过程推广为复合 Poisson-Geometric 过程；对险种数进行推广，例如文献[4]研究了保费收取过程与索赔到达过程均为复合 Poisson 过程的一类多险种的风险模型；对过程之间的相依性进行研究，例如文献[4]对保费收取过程和索赔到达过程相依的多险种风险模型进行了研究，文献[5－6]对索赔到达过程相依的两险种风险模型进行了研究.

在实际的保险业务中，除了保险公司会开展多险种业务外，对于每一个险种的索赔也不是只有一种，存在单一险种的多索赔的情形，例如保险公司推出了两个大病保险产品——重大疾病保险和一般大病保险，其中重大疾病保险包含 30 种索赔情形，一般大病保险包含 50 种索赔情形；又例如，互联网支付平台上推出的手机资金安全险，该险种也包含了比较明确的造成资金损失的多种情况.因此本文建立了一个多险种多索赔的风险模型，并对该模型的破产概率问题进行相应的研究.

1　模型建立

建立如下的风险模型：

$$U(t)=u+ct-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{k=1}^{N_{ij}(t)}X_k^{(ij)},\ t\geq 0, \tag{1}$$

$$S(t)=ct-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{k=1}^{N_{ij}(t)}X_k^{(ij)},\ t\geq 0,$$

其中：$U(t)$，$S(t)$ 分别表示保险公司在时刻 t 的盈余和盈利；u 是初始资金，即 $u=U(0)$；c 是保费率，即单位时间收取的保费额；n 表示该风险模型包含的险种数；m_i 表示险种 i 包含的索赔情形数；$\{N_{ij}(t),t\geq 0\}$ 表示险种 i 在索赔情形 j 时的索赔到达过程，即保险公司在时段 $[0,t]$ 内发生的该索赔情况下的索赔次数；$X_k^{(ij)}$ 表示险种 i 在索赔情形 j 时的第 k 次的索赔额.

对建立的风险模型做出如下假设：

(1) $\{N_{ij}(t),t\geq 0\}$ 是参数为 λ_{ij} 的 Poisson 过程；

(2) 各个险种的索赔到达相互独立，且同一险种的各种索赔情形的索赔到达也相互独立；

收稿日期：2016-06-27；**修回日期：**2016-11-23.

基金项目：国家自然科学基金(71203056)；河南师范大学博士科研启动项目(qd14153).

作者简介(通信作者)：刘利敏(1971－)，女，河南安阳人，河南师范大学副教授，博士，研究方向为随机分析和金融数学，E-mail：llim2004@163.com.

(3)$\{X_k^{(ij)}, k \geq 1, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m_i\}$ 是独立同分布的随机变量序列，共同的分布函数为 $F_{X^{(ij)}}(x)$，且记 $E[X_k^{(ij)}] = \mu_{ij}$；

(4)$\{N_{ij}(t), t \geq 0\}$，$\{X_k^{(ij)}, k \geq 1\}$ 相互独立；

(5) 为保证保险公司运营稳定，则有 $E[S(t)] > 0$，可得 $c - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij}\mu_{ij} > 0$，于是定义相对安全负载系数 $\rho > 0$ 满足 $c = (1+\rho) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij}\mu_{ij}$，即 $\rho = \dfrac{c}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij}\mu_{ij}} - 1$.

定义 1 保险公司的破产时刻 $T = \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\}$；保险公司在初始资金为 u 时的最终破产概率 $\psi(u) = P(T < \infty \mid U(0) = u)$，相应的生存概率为 $\phi(u) = 1 - \psi(u)$.

2 相关引理

引理 1 盈利过程 $\{S(t), t \geq 0\}$ 是平稳独立增量过程.

证明 由于复合 Poisson 过程是平稳独立增量过程，且各险种各索赔情形之间是相互独立的，易证盈利过程 $\{S(t), t \geq 0\}$ 是平稳独立增量过程.

引理 2 对于盈利过程 $\{S(t), t \geq 0\}$，存在函数 $g(r)$ 使得 $E[e^{-rS(t)}] = e^{tg(r)}$，其中

$$g(r) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij}(M_{X^{(ij)}}(r) - 1) - rc,$$

$M_{X^{(ij)}}(r) = E[\exp(rX^{(ij)})]$ 为险种 i 在索赔情形 j 时的索赔额的矩母函数.

证明 由于

$$E\Big[\exp\Big(r \sum_{k=1}^{N_{ij}(t)} X_k^{(ij)}\Big)\Big] = \sum_{n=0}^{\infty} E\Big[\exp\Big(r \sum_{k=1}^{N_{ij}(t)} X_k^{(ij)}\Big) \Big| N_{ij}(t) = n\Big] \cdot P(N_{ij}(t) = n) = \sum_{n=0}^{\infty} E[\exp(r(X_1^{(ij)} + X_2^{(ij)} + \cdots + X_n^{(ij)}))] \cdot P(N_{ij}(t) = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \{E[\exp(rX^{(ij)})]\}^n \cdot \exp(-\lambda_{ij}t) \frac{(\lambda_{ij}t)^n}{n!} = \exp\{\lambda_{ij}t[E(\exp(rX^{(ij)})) - 1]\} = \exp\{\lambda_{ij}t[M_{X^{(ij)}}(r) - 1]\},$$

因此

$$E[\exp(-rS(t))] = E\Big\{\exp\Big[-rct + r \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{k=1}^{N_{ij}(t)} X_k^{(ij)}\Big]\Big\} = E[\exp(-rct)] \cdot E\Big[\exp\Big(r \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{k=1}^{N_{ij}(t)} X_k^{(ij)}\Big)\Big] = \exp(-rct) \cdot \exp\Big[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij}t(M_{X^{(ij)}}(r) - 1)\Big] = \exp\Big\{t\Big[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij}(M_{X^{(ij)}}(r) - 1) - rc\Big]\Big\},$$

令 $g(r) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij}(M_{X^{(ij)}}(r) - 1) - rc$，即有 $E[e^{-rS(t)}] = e^{tg(r)}$.

引理 3 方程 $g(r) = 0$ 存在唯一正解，并称此解为调节系数.

证明 由于 $g(r) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij}(M_{X^{(ij)}}(r) - 1) - rc$，于是

$$g'(r) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij} E[X^{(ij)} \exp(rX^{(ij)})] - c,$$

$$g''(r) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij} E[(X^{(ij)})^2 \exp(rX^{(ij)})] > 0,$$

所以函数 $g(r)$ 在区间$[0, \infty)$ 上是凸的.

当 $r = 0$ 时，$g(0) = 0$，又由假设(5)知

$$g'(0^+) = \lim_{r \to 0^+} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij} E[X^{(ij)} \exp(rX^{(ij)})] - c = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij}\mu_{ij} - c < 0,$$

所以方程 $g(r)=0$ 存在唯一正解，记此解为 R，即 R 为调节系数.

定义 2　对于盈利过程 $\{S(t),t\geq 0\}$，定义事件流 $\mathscr{F}_t^S=\sigma\{S(v),v\leq t\}$.

引理 4[1]　破产时刻 T 是 $\mathscr{F}_t^S$- 停时.

引理 5　令 $M(t)=\dfrac{\exp[-rU(t)]}{\exp[tg(r)]}$，则 $\{M(t),\mathscr{F}_t^S;t\geq 0\}$ 是鞅.

证明　$\forall v,0\leq v\leq t$，由引理 1－2 得，

$$E[M(t)\mid\mathscr{F}_v^S]=E\left\{\frac{\exp[-r(u+S(t))]}{\exp[tg(r)]}\middle|\mathscr{F}_v^S\right\}=E\left\{\frac{\exp[-r(u+S(v)+S(t)-S(v))]}{\exp[vg(r)+tg(r)-vg(r)]}\middle|\mathscr{F}_v^S\right\}=$$

$$\frac{\exp[-rU(v)]}{\exp[vg(r)]}\cdot E\left\{\frac{\exp[-rS(t-v)]}{\exp[(t-v)g(r)]}\middle|\mathscr{F}_v^S\right\}=M(v).$$

而且

$$E[\mid M(t)\mid]=E\left\{\left|\frac{\exp[-r(u+S(t))]}{\exp[tg(r)]}\right|\right\}=E[\exp(-ru)]<\infty,$$

所以 $\{M(t),\mathscr{F}_t^S;t\geq 0\}$ 是鞅.

3　$\psi(u)$的 Lundberg 不等式及一般表达式

定理 1　对于建立的风险模型(1)，其最终破产概率 $\psi(u)$满足 Lundberg 不等式 $\psi(u)\leq e^{-Ru}$，其中 R 为调节系数.

证明　根据 Doob's 鞅不等式[7]及引理 2～5 可得

$$P\left\{\sup_{0<s<t}\left[-cs+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{k=1}^{N_{ij}(s)}X_k^{(ij)}\right]\geq u\right\}=P\left\{\sup_{0<s<t}\exp\left[R\left(-cs+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{k=1}^{N_{ij}(s)}X_k^{(ij)}\right)\right]\geq e^{Ru}\right\}\leq$$

$$e^{-Ru}\cdot E\left\{\exp\left[R\left(-ct+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{k=1}^{N_{ij}(t)}X_k^{(ij)}\right)\right]\right\}=e^{-Ru}\cdot E[e^{-RS(t)}]=e^{-Ru},$$

令 $t\to\infty$，可得

$$\psi(u)=P\{\inf_{t>0}U(t)\leq 0\}=P\{\sup_{t>0}[-S(t)]\geq u\}=P\left\{\sup_{t>0}\left[-ct+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{k=1}^{N_{ij}(t)}X_k^{(ij)}\right]\geq u\right\}\leq e^{-Ru}.$$

定理 2　对于建立的风险模型(1)，其最终破产概率为 $\psi(u)=\dfrac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)}\mid T<\infty]}$，其中 R 为调节系数.

证明　对任意的固定时刻 t，则 $T\wedge t$ 为事件流 $\mathscr{F}_t^S$ 的有界停时，由引理 5 及鞅的有界停时定理可得

$$E[M(T\wedge t)]=E[M(0)]=e^{-ru},$$

对上式左端由全期望公式可得

$$e^{-ru}=E[M(T\wedge t)\mid T\leq t]P(T\leq t)+E[M(T\wedge t)\mid T>t]P(T>t)=$$

$$E[M(T)\mid T\leq t]P(T\leq t)+E[M(t)\mid T>t]P(T>t).$$

在上式中，令 $r=R$，并记此时的 $M(\cdot)$ 为 $M_R(\cdot)$，则有

$$e^{-Ru}=E[M_R(T)\mid T\leq t]P(T\leq t)+E[M_R(t)\mid T>t]P(T>t).\tag{2}$$

设 $I(A)$ 表示 A 的示性函数，则有

$$0\leq E[M_R(t)\mid T>t]P(T>t)=E[e^{-RU(t)}\mid T>t]P(T>t)=$$

$$E[e^{-RU(t)}I(T>t)]\leq E[e^{-RU(t)}I(U(t)>0)],$$

由于 $0<e^{-RU(t)}I(U(t)>0)<1$，又由强大数定律可得 $\lim\limits_{t\to\infty}U(t)=+\infty$ a. s. 所以由 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$\lim_{t\to\infty}E[M_R(t)\mid T>t]P(T>t)=0\text{ a. s.}$$

令 $t\to\infty$，(2)式即为

$$e^{-Ru}=E[M_R(T)\mid T<\infty]P(T<\infty),$$

即得破产概率

$$\psi(u)=\frac{\mathrm{e}^{-Ru}}{E[M_R(T)\mid T<\infty]}=\frac{\mathrm{e}^{-Ru}}{E[\mathrm{e}^{-RU(T)}\mid T<\infty]}.$$

4 $\phi(u)$的积分-微分方程

下面建立风险模型(1)的生存概率 $\phi(u)$ 的积分 - 微分方程.

对风险模型(1) 进行等价转换.对任一固定险种 i ,作如下变换

$$\sum_{k=1}^{N_i(t)}Y_k^{(i)}:=\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{k=1}^{N_{ij}(t)}X_k^{(ij)},t\geq 0,$$

其中 $\{N_i(t),t\geq 0\}$ 是参数为 $\lambda_i=\sum\limits_{j=1}^{m_i}\lambda_{ij}$ 的 Poisson 过程;$\{Y_k^{(i)},k\geq 1,1\leq i\leq n\}$ 是独立同分布的随机变量序列,共同的分布函数为 $F_{Y^{(i)}}(x)=\sum\limits_{j=1}^{m_i}\dfrac{\lambda_{ij}}{\lambda_i}F_{X^{(ij)}}(x)$,期望为 $\mu_i=\sum\limits_{j=1}^{m_i}\dfrac{\lambda_{ij}}{\lambda_i}\mu_{ij}$.

于是风险模型(1)等价于如下的风险模型:

$$U(t)=u+ct-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{N_i(t)}Y_k^{(i)},t\geq 0. \tag{3}$$

定理 3 对于风险模型(3),生存概率 $\phi(u)$ 满足如下的积分-微分方程:

$$c\phi'(u)=(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)\phi(u)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\int_0^u\phi(u-x)\mathrm{d}F_{Y^{(i)}}(x). \tag{4}$$

证明 考虑充分小的时间段 $(0,\Delta)$ 内的险种索赔情况:

(1) 所有险种都不发生索赔,概率为 $\prod\limits_{i=1}^{n}(1-\lambda_i\Delta+o(\Delta))$;

(2) 险种 i 发生一次索赔且没有破产,其他险种均无索赔,概率为$(\lambda_i\Delta+o(\Delta))\prod\limits_{j\neq i}(1-\lambda_j\Delta+o(\Delta))$;

(3) 其他所有情况,概率为 $o(\Delta)$.

于是可以得到生存概率 $\phi(u)$ 满足

$$\phi(u)=\prod_{i=1}^{n}(1-\lambda_i\Delta+o(\Delta))\phi(u+c\Delta)+\sum_{i=1}^{n}((\lambda_i\Delta+o(\Delta))\prod_{j\neq i}(1-\lambda_j\Delta+o(\Delta))\int_0^{u+c\Delta}\phi(u+c\Delta-x)\mathrm{d}F_{Y^{(i)}}(x))+o(\Delta)=(1-(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)\Delta)\phi(u+c\Delta)+\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i\Delta\int_0^{u+c\Delta}\phi(u+c\Delta-x)\mathrm{d}F_{Y^{(i)}}(x))+o(\Delta),$$

移项得

$$\phi(u+c\Delta)-\phi(u)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\Delta\phi(u+c\Delta)-\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i\Delta\int_0^{u+c\Delta}\phi(u+c\Delta-x)\mathrm{d}F_{Y^{(i)}}(x))+o(\Delta),$$

上式两边除以 Δ,然后令 $\Delta\to 0$,即得(4) 式.

推论 1 对于任一险种 i,设每种情形的索赔均为期望为 θ_i 的指数分布,则(4)式变为

$$c\phi'(u)=(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)\phi(u)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\theta_i}\int_0^u\phi(u-x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta_i}}\mathrm{d}x,$$

对积分作变量变换可得

$$c\phi'(u)=(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)\phi(u)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\theta_i}\int_0^u\phi(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{u-x}{\theta_i}}\mathrm{d}x. \tag{5}$$

5 $\psi(u)$的显式表达式

本节考虑在一定条件下的 $\psi(u)$ 的显式表达式.

定理 4 对于风险模型(3),令 $n=2$,并假设$\{N_i(t),t\geq 0\}$ 是参数为 λ_i 的 Poisson 过程,$F_{Y^{(i)}}(x)$ 是期望为 θ_i 的指数分布,$i=1,2$. 那么模型的破产概率为

$$\psi(u)=-c_1\,\mathrm{e}^{\zeta_1 u}-c_2\,\mathrm{e}^{\zeta_2 u}, \tag{6}$$

其中

$$\zeta_{1,2}=\frac{\theta_1\theta_2(\lambda_1+\lambda_2)-c(\theta_1+\theta_2)\pm\sqrt{[c(\theta_1-\theta_2)+\theta_1\theta_2(\lambda_1-\lambda_2)]^2+4\lambda_1\lambda_2\theta_1^2\theta_2^2}}{2c\theta_1\theta_2},$$

$$c_1=\frac{(\lambda_1\theta_1+\lambda_2\theta_2)[\sqrt{[c(\theta_1-\theta_2)+\theta_1\theta_2(\lambda_1-\lambda_2)]^2+4\lambda_1\lambda_2\theta_1^2\theta_2^2}-c(\theta_1+\theta_2)-\theta_1\theta_2(\lambda_1+\lambda_2)]+2c\theta_1\theta_2(\lambda_1+\lambda_2)}{2c\sqrt{[c(\theta_1-\theta_2)+\theta_1\theta_2(\lambda_1-\lambda_2)]^2+4\lambda_1\lambda_2\theta_1^2\theta_2^2}}-\frac{\lambda_1\theta_1+\lambda_2\theta_2}{c},$$

$$c_2=-\frac{(\lambda_1\theta_1+\lambda_2\theta_2)[\sqrt{[c(\theta_1-\theta_2)+\theta_1\theta_2(\lambda_1-\lambda_2)]^2+4\lambda_1\lambda_2\theta_1^2\theta_2^2}-c(\theta_1+\theta_2)-\theta_1\theta_2(\lambda_1+\lambda_2)]+2c\theta_1\theta_2(\lambda_1+\lambda_2)}{2c\sqrt{[c(\theta_1-\theta_2)+\theta_1\theta_2(\lambda_1-\lambda_2)]^2+4\lambda_1\lambda_2\theta_1^2\theta_2^2}}.$$

证明　当 $n=2$ 时，由推论 1 的(5)式可得

$$-c\phi'(u)+(\lambda_1+\lambda_2)\phi(u)=\frac{\lambda_1}{\theta_1}\int_0^u\phi(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{u-x}{\theta_1}}\mathrm{d}x+\frac{\lambda_2}{\theta_2}\int_0^u\phi(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{u-x}{\theta_2}}\mathrm{d}x,\tag{7}$$

对(7)式求导，整理得

$$c\phi''(u)-(\lambda_1+\lambda_2)\phi'(u)+\left(\frac{\lambda_1}{\theta_1}+\frac{\lambda_2}{\theta_2}\right)\phi(u)=\frac{\lambda_1}{\theta_1^2}\int_0^u\phi(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{u-x}{\theta_1}}\mathrm{d}x+\frac{\lambda_2}{\theta_2^2}\int_0^u\phi(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{u-x}{\theta_2}}\mathrm{d}x,\tag{8}$$

1)当 $\theta_1\neq\theta_2$ 时.

由(7)，(8)两式可得

$$\int_0^u\phi(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{u-x}{\theta_1}}\mathrm{d}x=\frac{-c\theta_1^2\theta_2\phi''(u)+\theta_1^2(\theta_2(\lambda_1+\lambda_2)-c)\phi'(u)+\theta_1\lambda_1(\theta_1-\theta_2)\phi(u)}{\lambda_1(\theta_1-\theta_2)},\tag{9}$$

$$\int_0^u\phi(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{u-x}{\theta_2}}\mathrm{d}x=\frac{-c\theta_1\theta_2^2\phi''(u)+\theta_2^2(\theta_1(\lambda_1+\lambda_2)-c)\phi'(u)+\theta_2\lambda_2(\theta_2-\theta_1)\phi(u)}{\lambda_2(\theta_2-\theta_1)},\tag{10}$$

对(8)式求导，可得

$$-c\phi'''(u)+(\lambda_1+\lambda_2)\phi''(u)-\left(\frac{\lambda_1}{\theta_1}+\frac{\lambda_2}{\theta_2}\right)\phi'(u)+\left(\frac{\lambda_1}{\theta_1^2}+\frac{\lambda_2}{\theta_2^2}\right)\phi(u)=\frac{\lambda_1}{\theta_1^3}\int_0^u\phi(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{u-x}{\theta_1}}\mathrm{d}x+\frac{\lambda_2}{\theta_2^3}\int_0^u\phi(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{u-x}{\theta_2}}\mathrm{d}x,\tag{11}$$

把上面的(9)，(10)两式代入(11)式并整理，可得

$$c\theta_1\theta_2\phi'''(u)+(c(\theta_1+\theta_2)-\theta_1\theta_2(\lambda_1+\lambda_2))\phi''(u)+(c-(\lambda_1\theta_1+\lambda_2\theta_2))\phi'(u)=0.$$

相应的特征方程为

$$c\theta_1\theta_2\zeta^3+(c(\theta_1+\theta_2)-\theta_1\theta_2(\lambda_1+\lambda_2))\zeta^2+(c-(\lambda_1\theta_1+\lambda_2\theta_2))\zeta=0,$$

解方程得特征根为

$$\begin{cases}\zeta_1=\dfrac{\theta_1\theta_2(\lambda_1+\lambda_2)-c(\theta_1+\theta_2)+\sqrt{[c(\theta_1-\theta_2)+\theta_1\theta_2(\lambda_1-\lambda_2)]^2+4\lambda_1\lambda_2\theta_1^2\theta_2^2}}{2c\theta_1\theta_2},\\ \zeta_2=\dfrac{\theta_1\theta_2(\lambda_1+\lambda_2)-c(\theta_1+\theta_2)-\sqrt{[c(\theta_1-\theta_2)+\theta_1\theta_2(\lambda_1-\lambda_2)]^2+4\lambda_1\lambda_2\theta_1^2\theta_2^2}}{2c\theta_1\theta_2},\\ \zeta_3=0.\end{cases}$$

由相对安全负载假设，此时 $\rho=\dfrac{c}{\lambda_1\theta_1+\lambda_2\theta_2}-1$，易知 $\zeta_1<0,\zeta_2<0$，又由经典风险理论可得 $\phi(\infty)=1$，于是有

$$\phi(u)=c_1\,\mathrm{e}^{\zeta_1u}+c_2\,\mathrm{e}^{\zeta_2u}+1,\tag{12}$$

所以破产概率为

$$\psi(u)=-c_1\,\mathrm{e}^{\zeta_1u}-c_2\,\mathrm{e}^{\zeta_2u}.$$

下面求解各个参数，对(12)式求导得

$$\phi'(u)=c_1\zeta_1\,\mathrm{e}^{\zeta_1u}+c_2\zeta_2\,\mathrm{e}^{\zeta_2u},\tag{13}$$

在(7)式中令 $u=0$，

$$c\phi'(0) = (\lambda_1 + \lambda_2)\phi(0), \tag{14}$$

由经典风险理论

$$\phi(0) = 1 - \psi(0) = 1 - \frac{1}{1+\rho} = 1 - \frac{\lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2}{c}, \tag{15}$$

在(12)式中令 $u=0$ 得

$$\phi(0) = c_1 + c_2 + 1, \tag{16}$$

由(13)~(16)式可得参数 c_1, c_2 满足如下的方程组

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = -\dfrac{\lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2}{c}, \\ \zeta_1 c_1 + \zeta_2 c_2 = \dfrac{(\lambda_1 + \lambda_2)(c - (\lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2))}{c^2}. \end{cases}$$

把特征根 ζ_1, ζ_2 的表达式代入上面的方程组,即可求得定理中参数 c_1, c_2 的表达式.

2) 当 $\theta_1 = \theta_2$ 时.

由(7)式可得

$$-c\phi'(u) + (\lambda_1 + \lambda_2)\phi(u) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\theta}\int_0^u \phi(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{u-x}{\theta}}\mathrm{d}x,$$

由(8)式可得

$$c\phi''(u) - (\lambda_1 + \lambda_2)\phi'(u) + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\theta}\phi(u) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\theta^2}\int_0^u \phi(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{u-x}{\theta}}\mathrm{d}x,$$

由上面两式作相应的代换,整理得到

$$c\theta\phi''(u) + (c - (\lambda_1 + \lambda_2)\theta)\phi'(u) = 0,$$

相应的特征方程为

$$c\theta\zeta^2 + (c - (\lambda_1 + \lambda_2)\theta)\zeta = 0,$$

解方程得特征根为

$$\zeta_1^* = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)\theta - c}{c\theta}, \zeta_2^* = 0.$$

所以生存概率

$$\phi(u) = c_1^*\,\mathrm{e}^{\zeta_1^* u} + c_2^*\,\mathrm{e}^{\zeta_2^* u} = c_1^*\,\mathrm{e}^{\zeta_1^* u} + 1.$$

又 $\phi(0) = c_1^* + 1$,且 $\phi(0) = 1 - \psi(0) = 1 - \dfrac{1}{1+\rho} = 1 - \dfrac{(\lambda_1 + \lambda_2)\theta}{c}$,得到 $c_1^* = -\dfrac{(\lambda_1 + \lambda_2)\theta}{c}$.

于是破产概率

$$\psi(u) = 1 - \phi(u) = -c_1^*\,\mathrm{e}^{\zeta_1^* u}. \tag{17}$$

下面验证当 $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ 时,(6)式能否导出(17)式.

此时参数 c_1, c_2 满足如下的方程组

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = -\dfrac{(\lambda_1 + \lambda_2)\theta}{c}, \\ \zeta_1 c_1 + \zeta_2 c_2 = \dfrac{(\lambda_1 + \lambda_2)(c - (\lambda_1 + \lambda_2)\theta)}{c^2}, \end{cases} \tag{18}$$

其中

$$\begin{cases} \zeta_1 = \dfrac{(\lambda_1 + \lambda_2)\theta^2 - 2c\theta + \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2\theta^4}}{2c\theta^2} = \dfrac{(\lambda_1 + \lambda_2)\theta - c}{c\theta}, \\ \zeta_2 = \dfrac{(\lambda_1 + \lambda_2)\theta^2 - 2c\theta - \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2\theta^4}}{2c\theta^2} = -\dfrac{1}{\theta}, \end{cases}$$

解方程组(18)可得

$$c_1 = -\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)\theta}{c}, c_2 = 0,$$

于是 $\zeta_1 = \zeta_1^*$，$c_1 = c_1^*$，验证成立. 于是定理得证.

6 结 语

本文研究了一类多险种多索赔情形的风险模型的破产概率，首先得到了破产概率的 Lundberg 不等式及一般表达式，然后得到了生存概率满足的积分－微分方程，最后给出了特定条件下的破产概率的显式表达式. 该推广模型在现实生活中有较好的实例，对保险公司的风险管理以及险种的研发都有一定的指导作用. 另外，本文研究的风险模型还可以进一步推广，即考虑多险种多索赔情形的索赔到达过程之间存在相依性的风险模型，这将是本文的后续研究方向.

参 考 文 献

[1] Grandell J C. Aspects of risk theory[M]. New York：Springer-Verlag，1991.

[2] 毛泽春，刘锦萼. 索赔次数为复合 Poisson-Geometric 过程的风险模型及破产概率[J]. 应用数学学报，2005，28(3)：419-428.

[3] 吕东东，赵明清，李发高. 一类推广的复合 Poisson-Geometric 相依风险模型的破产概率[J]. 经济数学，2013，30(4)：71-75.

[4] 牛银菊，邓丽，马崇武. 常利率下带投资的多险种风险模型的破产概率[J]. 江西师范大学学报(自然科学版)，2015，39(3)：286-289.

[5] 吴传菊，张成林，王晓光，等. 指数索赔情形下一类相依两险种风险模型的破产概率[J]. 数学的实践与认识，2014，44(8)：16-24.

[6] Zhou L. The Cramer-Lundberg approximation for a correlated aggregate claims with Poisson risk processes[J]. 数学杂志，2010，30(3)：480-484.

[7] Øksendal B. Stochastic differential equations[M]. New York：Springer-Verlag，2000.

Ruin Probability for a Class of Risk Model

Liu Limin，Niu Haifeng

(College of Mathematics and Information Science，Henan Normal University，Xinxiang 453007，China)

Abstract：In this paper，we consider a risk model with multiple insurance business，and each of which involves multiple claim cases. First，the existence and uniqueness of the adjustment coefficient are proved，and Lundberg inequality and the generalized expression of ruin probability are obtained by using inequality and properties of martingale；Second，claim cases in small enough interval are analyzed，then the integro-differential equation for survival probability is obtained by transforming model and using total probability formula；Finally，based on the preceding integro-differential equation and the results in classical risk theory，the explicit expression of ruin probability is given under a certain conditions that the risk model has two insurance business and claims follow the exponential distributions.

Keywords：Poisson process；martingale；ruin probability；survival probability

［责任编辑　陈留院］