

# 带非抢占优先权和可变服务率的离散工作休假排队

马占友, 王文博, 王哲, 曹建

(燕山大学 理学院, 河北 秦皇岛 066004)

**摘要:**主要研究带非抢占优先权和可变服务率的离散工作休假排队系统模型. 建立关于两类顾客数及系统和服务台状态的四维离散马尔科夫链, 并得到了转移概率矩阵. 利用拟生灭过程和高斯-赛德尔迭代法, 给出了系统的平稳分布和一些重要的性能指标. 通过数值例子分析系统参数对性能指标的影响. 构造两类顾客的利益函数分析顾客的均衡行为, 根据对社会利益的算例分析, 得到了在一定范围内的最优到达率.

**关键词:**非抢占优先权; 可变服务率; 工作休假; 拟生灭过程

**中图分类号:**O226

**文献标志码:**A

非抢占优先权排队是排队论中的一个新颖的模型. 两类顾客之间有优先权级别之分, 在服务方面却并无抢占性. 这一特征成为应用在信息网络方面的一个热点. 王红蔚等<sup>[1]</sup>研究了具非抢占优先权的 M/M/1 排队模型, 得到了系统的平稳指标. Drekić 等<sup>[2]</sup>研究了带抢占优先权的两类顾客的排队模型, 模型中假定低优先权顾客具有止步策略, 得到了系统稳态下联合队长分布. 赵国喜<sup>[3]</sup>研究了 M/M/1 延迟工作休假系统的均衡策略, 通过顾客期望逗留时间, 得到了顾客的均衡策略, 并分析了不同参数对均衡策略的影响. 张挺等<sup>[4]</sup>将排队模型分别应用到了无线 Mesh 网络和感知无线电领域, 进行了服务质量的研究.

田乃硕等<sup>[5]</sup>介绍并研究了几种不同的离散时间排队模型, 利用文献[6-7]中所介绍的拟生灭过程和矩阵解析方法, 对排队模型进行了详细的研究, 得到系统的性能指标的解析表达式. Zhao 等<sup>[8]</sup>利用高斯-赛德尔迭代法解决了带有多个未知数的线性方程组的求解问题. Miller<sup>[9]</sup>利用一种奇偶算法来确定正在接受服务的顾客类型, 为非抢占优先权排队稳态分布的解决提供了帮助. Sun 等<sup>[10]</sup>通过构造个人利益和社会利益函数, 分析了顾客的均衡行为并给出了利益的最优解. 本文将对带非抢占优先权和可变服务率的离散工作休假排队进行详细的研究.

## 1 模型描述

根据入口协议, 假定本文系统为晚到有延迟的排队模型. 在该系统中, 有两类具有不同优先权级别的顾客, 分别为 I 类顾客和 II 类顾客, 其中 I 类顾客比 II 类顾客具有更高级别的优先权. 系统中只有一个服务台, 且一次只能服务一个顾客. 带非抢占优先权的离散时间工作休假排队模型具体描述如下.

(1) 假设每个顾客在时间间隙的末端  $(n^-, n)$  到达系统, 两类顾客的到达时间间隔相互独立且分别服从参数为  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  的几何分布:  $P(T_1 = j) = \lambda_1 \bar{\lambda}_1^{j-1}, j = 1, 2, \dots$ ,  $P(T_2 = j) = \lambda_2 \bar{\lambda}_2^{j-1}, j = 1, 2, \dots$ , 其中  $\bar{\lambda}_1 = 1 - \lambda_1, \bar{\lambda}_2 = 1 - \lambda_2, 0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$ .

(2) 假设每个顾客服务的开始和结束都发生在时间间隙的首端  $(n, n^+)$ . 当系统处于正规忙期时, 两类顾客的服务时间相互独立且分别服从参数为  $\mu_1$  和  $\mu_2$  的几何分布:  $P(S_1 = j) = \mu_1 \bar{\mu}_1^{j-1}, j = 1, 2, \dots, P(S_2 =$

收稿日期:2017-03-28; 修回日期:2017-12-12.

基金项目:国家自然科学基金(61472342); 河北省自然科学基金(A2014203096); 河北省教育厅高等学校科技计划重点项目(ZD2017079); 河北省高等学校科学技术研究青年基金项目(QN2016016); 校级硕士研究生创新资助项目(2017XJSS045).

作者简介(通信作者):马占友(1974-), 男, 吉林四平人, 燕山大学教授, 研究方向为排队论研究及网络性能分析, E-mail:mzhy55@ysu.edu.cn.



$$\begin{aligned} \delta_{7v} &= \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \mu_{1v} + \bar{\lambda}_1 \lambda_2 \mu_{1v}, \delta_7 = \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \mu_1 + \bar{\lambda}_1 \lambda_2 \mu_1; & \beta_{9v} &= \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \bar{\mu}_{2v} + \bar{\lambda}_1 \lambda_2 \bar{\mu}_{2v}, \beta_9 = \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \bar{\mu}_2 + \bar{\lambda}_1 \lambda_2 \bar{\mu}_2; \\ \delta_{8v} &= \lambda_1 \bar{\lambda}_2 \bar{\mu}_{1v} + \lambda_1 \lambda_2 \bar{\mu}_{1v}, \delta_8 = \lambda_1 \bar{\lambda}_2 \bar{\mu}_1 + \lambda_1 \lambda_2 \bar{\mu}_1; & \gamma_{1v} &= \delta_{1v} + \delta_{4v}, \gamma_1 = \delta_1 + \delta_4; \\ \beta_{1v} &= \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \mu_{2v} + \lambda_1 \bar{\lambda}_2 \mu_{2v}, \beta_1 = \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \mu_2 + \lambda_1 \bar{\lambda}_2 \mu_2; & \gamma_{2v} &= \delta_{2v} + \delta_{5v}, \gamma_2 = \delta_2 + \delta_5; \\ \beta_{2v} &= \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \bar{\mu}_{2v} + \bar{\lambda}_1 \lambda_2 \bar{\mu}_{2v}, \beta_2 = \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \bar{\mu}_2 + \bar{\lambda}_1 \lambda_2 \bar{\mu}_2; & \gamma_{3v} &= \delta_{3v} + \delta_{6v}, \gamma_3 = \delta_3 + \delta_6. \end{aligned}$$

从而矩阵  $\mathbf{P}$  的子块矩阵具体表示如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{00} &= \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 & \lambda_1 \bar{\lambda}_2 \bar{\theta} & \lambda_1 \bar{\lambda}_2 \theta \\ \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \mu_{1v} & \delta_{1v} \bar{\theta} & \delta_{1v} \theta & \lambda_1 \bar{\lambda}_2 \bar{\mu}_{1v} \bar{\theta} & \lambda_1 \bar{\lambda}_2 \bar{\mu}_{1v} \theta \\ \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \mu_1 & 0 & \delta_1 & 0 & \lambda_1 \bar{\lambda}_2 \bar{\mu}_1 \\ 0 & \delta_{2v} \bar{\theta} & \delta_{2v} \theta & \delta_{3v} \bar{\theta} & \delta_{3v} \theta \\ 0 & 0 & \delta_2 & 0 & \delta_3 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{10} = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \mu_{2v} & \lambda_1 \bar{\lambda}_2 \mu_{2v} \bar{\theta} & \lambda_1 \bar{\lambda}_2 \mu_{2v} \theta & \vdots \\ \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \mu_2 & 0 & \lambda_1 \bar{\lambda}_2 \mu_2 & \mathbf{0} \\ 0 & \beta_{1v} \bar{\theta} & \beta_{1v} \theta & \vdots \\ 0 & 0 & \beta_1 & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{8 \times 5}, \\ \mathbf{C}_{01} &= \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 \lambda_2 \bar{\theta} & \bar{\lambda}_1 \lambda_2 \theta & 0 & 0 & \lambda_1 \lambda_2 \bar{\theta} & \lambda_1 \lambda_2 \theta & 0 & 0 \\ \bar{\lambda}_1 \lambda_2 \mu_{1v} \bar{\theta} & \bar{\lambda}_1 \lambda_2 \mu_{1v} \theta & 0 & 0 & \delta_{4v} \bar{\theta} & \delta_{4v} \theta & \lambda_1 \lambda_2 \bar{\mu}_{1v} \bar{\theta} & \lambda_1 \lambda_2 \bar{\mu}_{1v} \theta \\ 0 & \bar{\lambda}_1 \lambda_2 \mu_1 & 0 & 0 & 0 & \delta_4 & 0 & \lambda_1 \lambda_2 \bar{\mu}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{5v} \bar{\theta} & \delta_{5v} \theta & \delta_{6v} \bar{\theta} & \delta_{6v} \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_5 & 0 & \delta_6 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_0 &= \begin{bmatrix} \beta_{2v} \bar{\theta} & \beta_{2v} \theta & \lambda_1 \bar{\lambda}_2 \bar{\mu}_{2v} \bar{\theta} & \lambda_1 \bar{\lambda}_2 \bar{\mu}_{2v} \theta & \lambda_1 \lambda_2 \bar{\mu}_{2v} \bar{\theta} & \lambda_1 \lambda_2 \bar{\mu}_{2v} \theta & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & \lambda_1 \bar{\lambda}_2 \bar{\mu}_2 & 0 & \lambda_1 \lambda_2 \bar{\mu}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{3v} \bar{\theta} & \beta_{3v} \theta & \beta_{4v} \bar{\theta} & \beta_{4v} \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_3 & 0 & \beta_4 & 0 & 0 \\ \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \mu_{1v} \bar{\theta} & \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \mu_{1v} \theta & 0 & 0 & \delta_{1v} \bar{\theta} & \delta_{1v} \theta & \lambda_1 \bar{\lambda}_2 \bar{\mu}_{1v} \bar{\theta} & \lambda_1 \bar{\lambda}_2 \bar{\mu}_{1v} \theta \\ 0 & \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \mu_1 & 0 & 0 & 0 & \delta_1 & 0 & \lambda_1 \bar{\lambda}_2 \bar{\mu}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{2v} \bar{\theta} & \delta_{2v} \theta & \delta_{3v} \bar{\theta} & \delta_{3v} \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 & \delta_3 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_0 &= \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 \lambda_2 \bar{\mu}_{2v} \bar{\theta} & \bar{\lambda}_1 \lambda_2 \bar{\mu}_{2v} \theta & \lambda_1 \lambda_2 \bar{\mu}_{2v} \bar{\theta} & \lambda_1 \lambda_2 \bar{\mu}_{2v} \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_1 \lambda_2 \bar{\mu}_2 & 0 & \lambda_1 \lambda_2 \bar{\mu}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{5v} \bar{\theta} & \beta_{5v} \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\lambda}_1 \lambda_2 \mu_{1v} \bar{\theta} & \bar{\lambda}_1 \lambda_2 \mu_{1v} \theta & 0 & 0 & \delta_{4v} \bar{\theta} & \delta_{4v} \theta & \lambda_1 \lambda_2 \bar{\mu}_{1v} \bar{\theta} & \lambda_1 \lambda_2 \bar{\mu}_{1v} \theta \\ 0 & \bar{\lambda}_1 \lambda_2 \mu_1 & 0 & 0 & 0 & \delta_4 & 0 & \lambda_1 \lambda_2 \bar{\mu}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{5v} \bar{\theta} & \delta_{5v} \theta & \delta_{6v} \bar{\theta} & \delta_{6v} \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_5 & 0 & \delta_6 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_0 &= \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \mu_{2v} \bar{\theta} & \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \mu_{2v} \theta & 0 & 0 & \lambda_1 \bar{\lambda}_2 \mu_{2v} \bar{\theta} & \lambda_1 \bar{\lambda}_2 \mu_{2v} \theta & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \mu_2 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \bar{\lambda}_2 \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{1v} \bar{\theta} & \beta_{1v} \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{8 \times 8}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \beta_{9c} \bar{\theta} & \beta_{9c} \theta & \beta_{6c} \bar{\theta} & \beta_{6c} \theta \\ 0 & \beta_9 & 0 & \beta_6 \\ 0 & 0 & \bar{\mu}_{2c} \bar{\theta} & \bar{\mu}_{2c} \theta \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\mu}_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \beta_{2v}\bar{\theta} & \beta_{2v}\theta & \lambda_1\bar{\lambda}_2\bar{\mu}_{2v}\bar{\theta} & \lambda_1\bar{\lambda}_2\bar{\mu}_{2v}\theta & \lambda_1\lambda_2\mu_{2v}\bar{\theta} & \lambda_1\lambda_2\mu_{2v}\theta & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & \lambda_1\bar{\lambda}_2\bar{\mu}_2 & 0 & \lambda_1\lambda_2\mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{3v}\bar{\theta} & \beta_{3v}\theta & \beta_{4v}\bar{\theta} & \beta_{4v}\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_3 & 0 & \beta_4 & 0 & 0 \\ \delta_{7v}\bar{\theta} & \delta_{7v}\theta & 0 & 0 & \gamma_{1v}\bar{\theta} & \gamma_{1v}\theta & \beta_{6v}\bar{\theta} & \beta_{6v}\theta \\ 0 & \delta_7 & 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & 0 & \beta_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{2v}\bar{\theta} & \gamma_{2v}\theta & \gamma_{3v}\bar{\theta} & \gamma_{3v}\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_2 & 0 & \gamma_3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1\lambda_2\bar{\mu}_{2v}\bar{\theta} & \bar{\lambda}_1\lambda_2\bar{\mu}_{2v}\theta & \lambda_1\lambda_2\bar{\mu}_{2v}\bar{\theta} & \lambda_1\lambda_2\bar{\mu}_{2v}\theta \\ 0 & \bar{\lambda}_1\lambda_2\bar{\mu}_2 & 0 & \lambda_1\lambda_2\bar{\mu}_2 \\ 0 & 0 & \beta_{5v}\bar{\theta} & \beta_{5v}\theta \\ 0 & 0 & 0 & \beta_5 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{8 \times 4}$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \beta_{7c}\bar{\theta} & \beta_{7c}\theta & 0 & 0 & \beta_{8c}\bar{\theta} & \beta_{8c}\theta & 0 & 0 \\ 0 & \beta_7 & 0 & 0 & 0 & \beta_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_{2v}\bar{\theta} & \mu_{2v}\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### 2.2 系统稳态分析

根据拟生灭过程,得到了状态转移概率矩阵  $\mathbf{P}$ . 根据转移概率矩阵  $\mathbf{P}$  的结构,可以知道四维 MC  $\{(L(n^+), H(n^+), J_n, S_n), n \geq 0\}$  是不可约、非周期、正常返的. 系统稳态分布有以下形式:  $\boldsymbol{\Pi} = (\boldsymbol{\pi}_0, \boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{\pi}_2, \dots, \boldsymbol{\pi}_K, \boldsymbol{\pi}_{K+1})$ , 其中  $\boldsymbol{\pi}_0 = (\pi_{0,0,0,0}, \pi_{0,1,0,1}, \pi_{0,1,1,1}, \pi_{0,2,0,1}, \pi_{0,2,1,1})$ ,  $\boldsymbol{\pi}_l = (\pi_{l,0,0,0}, \pi_{l,0,1,0}, \pi_{l,1,0,0}, \pi_{l,1,1,0}, \pi_{l,1,0,1}, \pi_{l,1,1,1}, \pi_{l,2,0,1}, \pi_{l,2,1,1})$ ,  $1 \leq l \leq K$ ,  $\boldsymbol{\pi}_{K+1} = (\pi_{K+1,0,0,0}, \pi_{K+1,0,1,0}, \pi_{K+1,1,0,0}, \pi_{K+1,1,1,0})$ ,  $\boldsymbol{\pi}_{l,h,j,s} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{L(n^+) = l, H(n^+) = h, J_n = j, S_n = s\}, (l, h, j, s) \in \Omega$ .

根据平衡方程及正规化条件  $\begin{cases} \boldsymbol{\Pi}\mathbf{P} = \boldsymbol{\Pi}, \\ \boldsymbol{\Pi}\mathbf{e} = 1, \end{cases}$  其中,  $\mathbf{e}$  为适当维数的全 1 列向量,可以得到含  $8K + 9$  个未知数的线性方程组. 当 II 类顾客的缓存空间  $K$  确定后,公式中的未知数的个数为有限的,利用高斯-赛德尔迭代法求解,可以得到  $\pi_{l,h,j,s}$  的数值结果. 从而可得到系统的性能指标.

### 2.3 性能指标

根据系统稳态队长分布表达式,可以得到系统的一些重要性能指标.

- (1) I 类顾客的平均队长为  $E(H) = \sum_{h=0}^2 hP(H=h) = \sum_{l=0}^K \sum_{j=0}^1 \pi_{l,1,j,1} + \sum_{l=1}^{K+1} \sum_{j=0}^1 \pi_{l,1,j,0} + 2 \sum_{l=0}^K \sum_{j=0}^1 \pi_{l,2,j,1}$ .
- (2) II 类顾客的平均队长为  $E(L) = \sum_{l=0}^{K+1} lP(L=l) = \sum_{l=1}^K l \sum_{h=1}^2 \sum_{j=0}^1 \pi_{l,h,j,1} + \sum_{l=1}^{K+1} l \sum_{h=0}^1 \sum_{j=0}^1 \pi_{l,h,j,0}$ .
- (3) 系统处于正规忙期的概率为  $P_B = \sum_{l=1}^{K+1} \sum_{h=0}^1 \pi_{l,h,1,0} + \sum_{l=0}^K \sum_{h=1}^2 \pi_{l,h,1,1}$ .
- (4) 服务台被 I 类顾客占用的概率为  $P_H = \sum_{l=0}^K \sum_{h=1}^2 \sum_{j=0}^1 \pi_{l,h,j,1}$ .

## 3 数值例子

依据上述分析得到的系统性能指标,利用 Matlab 编程制图,分析系统性能指标随参数的变化趋势. 在图 1~4 中,假设  $K=5, \lambda_1=0.4, \lambda_2=0.1, \mu_{1v}=0.2, \mu_{2v}=0.1$ .

图 1 描述了 I 类顾客平均队长  $E(H)$  随服务率  $\mu_2$  和休假率  $\theta$  变化的关系图. 当  $\mu_2$  一定时,  $E(H)$  随着  $\theta$  的增大而减小. 当  $\theta$  一定时,  $E(H)$  也随着  $\mu_2$  的增大而减小. 图 2 描述了 II 类顾客平均队长  $E(L)$  随服务率  $\mu_1$  和休假率  $\theta$  变化的关系图. 当  $\mu_1$  一定时,  $E(L)$  随着  $\theta$  的增大而减小. 当  $\theta$  一定时,  $E(L)$  也随着  $\mu_1$  的增大而减小.

图 3 描述了系统处于正规忙期的概率  $P_B$  随服务率  $\mu_1$ 、休假率  $\theta$  和到达率  $\lambda_1$  变化的关系图. 当  $\mu_1$  和  $\theta$  一

定时,  $P_B$  随着  $\lambda_1$  的增大而增大. 当  $\theta$  和  $\lambda_1$  一定时,  $P_B$  也随着  $\mu_1$  的增大而减小. 当  $\lambda_1$  和  $\mu_1$  一定时,  $P_B$  也随着  $\theta$  的增大而减小. 图 4 描述了服务台被 I 类顾客占用的概率  $P_H$  随服务率  $\mu_2$ 、休假率  $\theta$  和到达率  $\lambda_1$  变化的关系图. 当  $\mu_2$  和  $\theta$  一定时,  $P_H$  随着  $\lambda_1$  的增大而减小. 当  $\theta$  和  $\lambda_1$  一定时,  $P_H$  也随着  $\mu_2$  的增大而增大. 当  $\lambda_1$  和  $\mu_2$  一定时,  $P_H$  也随着  $\theta$  的增大而增大.

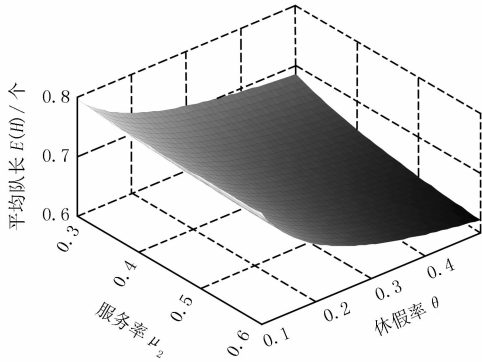


图 1  $E(H)$  与  $\mu_2$  和  $\theta$  的关系

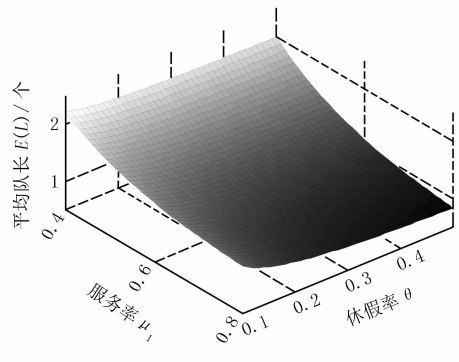


图 2  $E(L)$  与  $\mu_1$  和  $\theta$  的关系

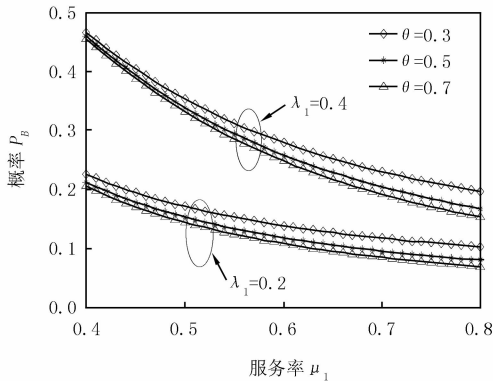


图 3  $P_B$  与  $\mu_1$ ,  $\theta$  和  $\lambda_1$  的关系

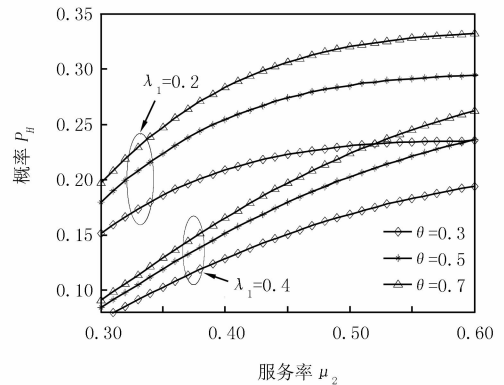


图 4  $P_H$  与  $\mu_2$ ,  $\theta$  和  $\lambda_1$  的关系

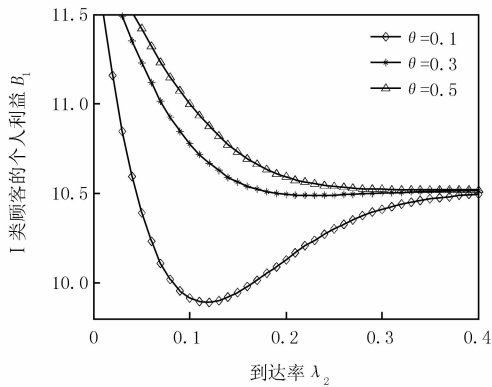
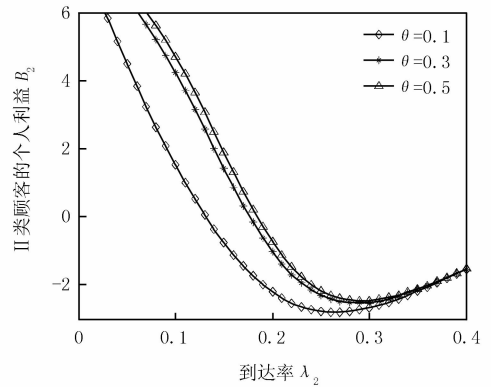
### 4 纳什均衡和社会最优策略

本节将通过构造个人利益和社会利益函数, 来分析两类顾客的均衡行为并得到 II 类顾客的最优到达率. 假设 I 类顾客和 II 类顾客服务结束后分别获得收益为  $R_1$  和  $R_2$ , 在排队过程中单位时间产生的等待费用分别为  $C_1$  和  $C_2$ . 根据假设, 定义 I 类顾客和 II 类顾客从进入系统, 到结束服务所获得个人利益分别为  $B_1$  和  $B_2$ . 则有:

$$B_1 = R_1 - C_1 E(W_1), B_2 = R_2 - C_2 E(W_2),$$

其中  $E(W_1) = \frac{1}{\lambda_1} \sum_{h=1}^2 (h-1)P(H=h), E(W_2) = \frac{1}{\lambda_2} \sum_{l=1}^{K+1} (l-1)P(L=l)$ .

图 5 描述了当  $R_1=12, C_1=6$  时 I 类顾客的个人利益  $B_1$  随到达率  $\lambda_2$  和休假率  $\theta$  变化的关系图, 图形显示无论有多少个 II 类顾客到达系统, I 类顾客的个人利益都是正数. 换句话说, I 类顾客只要能够接受服务, 就能得到正的收益, 并不会因 II 类顾客的到达而变化. 因此, 对于 II 类顾客而言, 其进入系统的均衡到达率为 1. 图 6 描述了当  $R_2=8, C_2=1$  时 II 类顾客个人利益  $B_2$  随到达率  $\lambda_2$  和休假率  $\theta$  变化的关系图, 图形显示 II 类顾客的不同到达率会使得其得到不同的个人利益, 0 和 1 都不是 II 类顾客的均衡到达率. 通过解方程  $B_2(\lambda_e) = 0$ , 得到均衡点  $\lambda_e$  为均衡到达率.

图5  $B_1$  与  $\lambda_2$  和  $\theta$  的关系图6  $B_2$  与  $\lambda_2$  和  $\theta$  的关系

## 5 结 论

本文分析了带非抢占优先权和可变服务率的离散工作休假排队系统. 通过建立四维 Markov 链, 利用拟生灭过程分析了系统的平稳分布, 得到了系统性能指标表达式. 利用数值算例分析了系统参数对性能指标的影响. 从两类顾客的个人利益函数和社会利益函数角度, 分析了顾客的均衡行为, 得到最优到达率.

## 参 考 文 献

- [1] 王红蔚, 彭培让. 对 M/M/1 非抢占优先权排队平稳指标的分析 [J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2014, 42(6): 21-25.
- [2] Drekic S, Woolford D G. A preemptive priority queue with balking [J]. European Journal of Operational Research, 2005, 164, 387-401.
- [3] 赵国喜. M/M/1 延迟工作休假系统的均衡策略 [J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2016, 44(1): 36-41.
- [4] 张挺, 李陶深, 葛志辉. 非强占有限优先权 M/M/n/m 模型的无线 Mesh 网络 Qos 研究 [J]. 计算机科学, 2014, 41(8): 135-138.
- [5] 田乃硕, 徐秀丽, 马占友. 离散时间排队论[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [6] Neuts M F. Matrix-geometric solutions in stochastic models: An algorithmic approach [M]. Washington D.C.: The Johns Hopkins University Press, 1981.
- [7] Latouche G, Taylor P. Matrix-analytic methods: Theory and applications [M]. Republic of Singapore: World Scientific Press, 2002.
- [8] Zhao Y, Jin S F, Yue W Y. Performance optimization of a dynamic channel bonding strategy in cognitive radio networks [J]. Pacific Journal of Optimization, 2013, 9(4): 169-182.
- [9] Miller D R. Computation of steady-state probabilities for M/M/1 priority queues [J]. Operations Research, 1981, 29(5): 945-958.
- [10] Sun W, Tian N S. Contrast of the equilibrium and socially optimal strategies in a queue vacation [J]. Journal of Computational Information Systems, 2008, 4(5): 2167-2172.

## The discrete time working vacation queue with non-preemptive priority and variable service rates

Ma Zhanyou, Wang Wenbo, Wang Zhe, CAO Jian

(School of Science, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

**Abstract:** In this paper, we mainly study a discrete time working vacation queue system with non-preemptive priority and variable service rates. We develop a four-dimensional discrete time Markov Chain (MC) which includes the number of the customers with different priorities and the state of the system and the server, and obtain the transition probability matrix. By using the quasi birth-and-death (QBD) process and the method of Gauss-Sidel iteration, we give the steady-state distribution and some main performance measures. We use the numerical examples to evaluate the effect of different parameters on the system performance measures. Finally, we analyze the equilibrium behavior of the customers by constructing the benefit functions of two types of customers. According to the social benefits function, we obtain the optimal parameters within a certain range.

**Keywords:** Non-preemptive priority; variable service rates; working vacation; quasi birth-and-death process

[责任编辑 陈留院]