第 45 卷　第 4 期　河南师范大学学报(自然科学版)　Vol. 45　No. 4
2017 年 7 月　Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition)　Jul. 2017

文章编号:1000－2367(2017)04－0001－09　**DOI:**10. 16366/j. cnki. 1000－2367. 2017. 04. 001

白噪声驱动的高阶 KdV 型方程的 Cauchy 问题

李用声[1]，闫威[2]

(1. 华南理工大学 数学学院，广州 510640；2. 河南师范大学 数学与信息科学学院，河南 新乡 453007)

摘　要:主要研究受白噪声驱动的高阶 KdV 型方程的 Cauchy 问题. 通过在某些 Bourgain 空间中建立双线性估计、三线性估计，并利用 Itô 公式、BDG 不等式和停时技巧，建立相应的局部适定性和整体适定性. 这些技巧可以用以研究其他具有哈密顿结构的方程的局部适定性和整体适定性.

关键词: Cauchy 问题；白噪声驱动的高阶 KdV 型方程；Itô 公式；BDG 不等式；停时技巧

中图分类号:O175. 29　**文献标志码:**A

本文主要研究白噪声驱动的高阶 KdV 型方程

$$\mathrm{d}u(t)=[-\partial_x^{2n+1}u(t)-\partial_x u^k]\mathrm{d}t+\Phi\mathrm{d}W(t),u(0)=u_0,\tag{1}$$

其中 $n,k\geq 2$ 是整数，$w(t)=\frac{\partial B}{\partial x}=\sum_{j-1}^{\infty}\beta_j e_j$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 中一个柱形 Wiener 过程，它由 $L^2(\mathbf{R})$ 中标准正交基$\{e_j \mid j\in\mathbf{N}\}$ 和一个固定概率空间中的一列相互独立的实 Brown 运动$\{\beta_j \mid j\in\mathbf{N}\}$ 构成. Φ 是从 $L^2(\mathbf{R})$ 到 $H^s(\mathbf{R})$ 上的一个 Hilbert-Schmidt 算子. (1)式可以写成以下方程：

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}+\partial_x^{2n+1}u(t)+\partial_x(u(t))^k=\Phi\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t},u(0)=u_0.\tag{2}$$

(2)式可看成是下面高阶 KdV 型方程在随机项 $\Phi\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t}$ 的扰动.

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}+\partial_x^{2n+1}u(t)+\partial_x(u(t))^k=0,u(0)=u_0.\tag{3}$$

当 $n=1,k=2$ 时，(3)式是 KdV 方程. KdV 方程已经被很多学者研究，参见文献[1－15]. 从文献[12－13]的结论可以看出，$s=-\frac{3}{4}$ 是 KdV 方程 Cauchy 问题在 Sobolev 空间中的适定性临界正则指标. 借助于 I-方法和双线性估计，文献[7，14]证明了 KdV 方程在 $H^{-3/4}$ 中是整体适定的.

当 $n=1,k=2$ 时，(2)式是随机 KdV 方程. 通过运用 Itô 公式，BDG 不等式和 KdV 方程的哈密顿结构，在加法噪声情况下，文献[16]研究了随机 KdV 方程在 $H^1(\mathbf{R})$ 中解的存在性和唯一性，以及具有乘法噪声情况时在 $L^2(\mathbf{R})$ 中鞅解的存在性. 更进一步地，借助 Strichartz 估计和修正的 Bourgain 空间，文献[17]得到了随机 KdV 方程在 $L^2(\mathbf{R})$ 中解的存在性. 最近，受文献[17]启发，文献[18]研究了随机 Camassa-Holm 方程的 Cauchy 问题.

当 $n=1,k=3$ 时，(3)式是 mKdV 方程. 许多学者研究了 mKdV 的 Cauchy 问题，参见文献[19－24]及其文后的参考文献. 在文献[25]中，Takaoka 和 Tsutsumi 证明了 mKdV 方程的 Cauchy 问题在 $H^s(\mathbf{T})(\frac{3}{8}<s<\frac{1}{2})$中是局部适定的. 通过使用修正的傅里叶变换限制方法，文献[22]证明了，当 $s>\frac{1}{3}$ 时 mKdV 方程

收稿日期:2017-05-31；**修回日期:**2017-06-06.

基金项目:国家自然科学基金(11571118；11401180)

作者简介(通信作者):李用声(1965－)，男，湖北襄阳人，华南理工大学教授，博士生导师，主要从事非线性发展方程与无穷维动力系统的研究，E-mail：yshili@scut. edu. cn.

的 Cauchy 问题在 $H^s(\boldsymbol{T})$ 中是局部适定的,而且,在初值的一定假设条件下,局部适定的正则性指标可以放宽到 $s>\frac{1}{4}$. 最近,文献[26]证明了 mKdV 方程的解映射在 $H^s(\boldsymbol{T}),s<0$ 中是不连续的.

受文献[16-17]启发,本文考虑(1)式中 $n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geq 2,k=2$ 或 3 的情形. 通过运用 Sobolev 空间和 Bourgain 空间,证明当 $k=2,s\geq -n+\frac{3}{4}$,或 $k=3,s\geq -\frac{n}{2}+\frac{3}{4}$ 时,对于初值 $u_0(x,w)\in L^2(\Omega;H^s(\mathbf{R}))$,(1) 式是局部适定的. 特别地,当 $k=2,s=0$ 或 $k=3,s=1$ 时,初值问题在 $H^s(\mathbf{R})$ 中是整体适定的.

在给出主要结论之前先给出一些符号. 用 $X\sim Y$ 表示 $A_1\mid X\mid\leq\mid Y\mid\leq A_2\mid X\mid$,这里 $A_2>A_1>0$. 用 $X\gg Y$ 表示 $\mid X\mid>C\mid Y\mid$,这里 C 是大于 2 的整数. 对于任意的 $\xi\in\mathbf{R}$,$\langle\xi\rangle^s=(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}$. $\mathscr{F}u$ 表示 u 关于所有变量的傅里叶变换,$\mathscr{F}^{-1}u$ 表示 u 关于所有变量的傅里叶逆变换,$\mathscr{F}_x u$ 表示 u 关于空间变量的傅里叶变换,$\mathscr{F}_x^{-1}u$ 表示 u 关于空间变量的傅里叶逆变换,$H^s(\mathbf{R})$ 是通常的 Sobolev 空间,其范数 $\|f\|_{H^s(\mathbf{R})}=\|\langle\xi\rangle^s\mathscr{F}_x f\|_{L^2_\xi(\mathbf{R})}$. 对于任意的 $s,b\in\mathbf{R}$,$X_{s,b}(\mathbf{R}^2)$ 是具有相函数 $\phi(\xi)=(-1)^{n+1}\xi^{2n+1}$ 的 Bourgain 空间. 即,函数 $u\in X_{s,b}(\mathbf{R}^2)$ 当且仅当 $\|u\|_{X_{s,b}(\mathbf{R}^2)}=\|\langle\xi\rangle^s\langle\tau-\phi(\xi)\rangle^b\mathscr{F}u(\xi,\tau)\|_{L^2_\tau(\mathbf{R})L^2_\xi(\mathbf{R})}<\infty$.

对于给定的区间 L,$X_{s,b}(\mathbf{R}\times L)$ 是 $X_{s,b}(\mathbf{R}^2)$ 中所有函数 u 在 $\mathbf{R}\times L$ 上的限制,其范数是

$$\|u\|_{X_{s,b}(\mathbf{R}\times L)}=\inf\{\|U\|_{X_{s,b}(\mathbf{R}^2)}\mid U\mid_{\mathbf{R}\times L}=u\}.$$

当 $L=[0,T]$,$X_{s,b}(\mathbf{R}\times L)$ 缩写成 $X^T_{s,b}$.

全文假定 $\phi(\xi)=(-1)^{n+1}\xi^{2n+1}$. 设 $\psi\in C^\infty(\mathbf{R})$ 满足 $0\leq\psi\leq 1$;当 $t\in[0,1]$ 时 $\psi\equiv 1$;$\operatorname{supp}\psi\subset[-1,2]$. 对于 $\delta>0$,$\psi_\delta(t)=\psi(t/\delta)$. 记 $\sigma:=\tau+(-1)^{n+1}\xi^{2n+1}$,$\sigma_k:=\tau_k+(-1)^{n+1}\xi_k^{2n+1}(k=1,2)$,

$$U(t)u_0=\int_{\mathbf{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x\xi+\phi(\xi)t)}\mathscr{F}_x u_0(\xi)\mathrm{d}\xi,\ \|f\|_{L^q_tL^p_x}=\left(\int_{\mathbf{R}}\left(\int_{\mathbf{R}}\mid f(x,t)\mid^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}},\ \|f\|_{L^p_tL^p_x}=\|f\|_{L^p_{xt}}.$$

假定 $B(x,t),t\geq 0,x\in\mathbf{R}$,是一个零均值高斯过程,其协方差函数由下述公式给出:

$$E(B(t,x)B(s,y))=(t\wedge s)(x\wedge y),\forall t,s\geq 0,x,y\in\mathbf{R}.$$

对于 $f,g\in L^2(\mathbf{R})$,(f,g) 表示 $L^2(\mathbf{R})$ 的内积,即 $(f,g)=\int_{\mathbf{R}}f(x)g(x)\mathrm{d}x$. $(e_j)_{j\in\mathbf{N}}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个标准正交基. $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是一个具有滤族 $(\mathscr{F}_t)_{t>0}$ 的概率空间. $E(h)=\int_\Omega h\mathrm{d}P$ 是 h 的期望. 序列 $(\beta_j)_{j\in\mathbf{N}}$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P,(\mathscr{F}_t)_{t>0})$ 上相互独立的布朗运动,$(W(t))_{t>0}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 上关于滤族 $(\mathscr{F}_t)_{t>0}$ 的一个柱形的 Wiener 过程,$W(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\beta_j e_j$. 对于一个 Hilbert 空间 H,$L_2^0(L^2(\mathbf{R}),H)$ 是由 $L^2(\mathbf{R})$ 到 H 的 Hilbert-Schmidt 算子 Φ 的全体组成的空间,其范数是 $\|\Phi\|_{L_2^0(L^2(\mathbf{R}),H)}=\left(\sum_{j\in\mathbf{N}}\mid\Phi e_j\mid_H^2\right)^{1/2}$. 当 $H=H^s(\mathbf{R})$ 时,记 $L_2^{0,s}=L_2^0(L^2(\mathbf{R}),H^s(\mathbf{R}))$.

定理 1 设 $2\leq n\in\mathbf{N},k=2,s\geq -n+\frac{1}{4}$,$\Phi\in L_2^{0,s}$,$u_0\in L^2(\Omega;H^s(\mathbf{R}))$ 在 $\mathscr{F}_0$ 中可测. 则对 a. e. $\omega\in\Omega$,存在一个 $T_\omega>0$,使得 Cauchy 问题(1) 在$[0,T_\omega]$上存在唯一解 $u\in C([0,T_\omega];H^s(\mathbf{R}))\cap X^{T_\omega}_{s,b}$.

定理 2 设 $2\leq n\in\mathbf{N},k=2,s=0$,$\Phi\in L_2^{0,0}$,$u_0\in L^2(\Omega;L^2(\mathbf{R}))$ 在 $\mathscr{F}_0$ 中可测. 则 Cauchy 问题(1) 的解 u 是整体存在的,且对任何 $T>0$,$u\in L^2(\Omega;C([0,T];L^2(\mathbf{R}))$.

定理 3 设 $2\leq n\in\mathbf{N},k=3,s\geq -\frac{n}{2}+\frac{3}{4}$,$\Phi\in L_2^{0,s}$,$u_0\in L^2(\Omega;H^s(\mathbf{R}))$ 在 $\mathscr{F}_0$ 中可测. 则对 a. e. $\omega\in\Omega$,存在一个 $T_\omega>0$ 使得 Cauchy 问题(1) 在$[0,T_\omega]$上存在唯一解 $u\in C([0,T_\omega];H^s(\mathbf{R}))\cap X^{T_\omega}_{s,b}$.

定理 4 设 $2\leq n\in\mathbf{N},k=3,s=1$,$\Phi\in L_2^{0,1}$,$u_0\in L^2(\Omega;H^1(\mathbf{R}))$ 在 $\mathscr{F}_0$ 中可测. 则 Cauchy 问题(1) 的解 u 是整体存在的,且对任何 $T>0$,$u\in L^2(\Omega;C([0,T];H^1(\mathbf{R}))$.

本文其余内容安排如下:在第 1 节做出准备工作,建立一些基本估计;在第 2 节建立双线和三线性估计;在第 3 节证明上述定理 1 至定理 4;在第 4 节做出回顾与展望.

1 预备工作

在这一节,建立一些基本估计,为主要定理的证明做准备.

引理 1　假设 $\theta \in [0,1]$，$p = 2/(1-\theta)$，$q = 4/\theta$，$\gamma \in C$，

$$U_\gamma(t)u_0(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{i(t\phi(\xi)+x\xi)} \mid \phi''(\xi) \mid^{\frac{\gamma}{2}} \mathscr{F}_x u_0(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

则存在常数 $C > 0$，$\| U_{\theta/2}(t)u_0 \|_{L_t^q L_x^p} \leq C \| u_0 \|_{L_x^2}$，$\forall\, u_0 \in L_x^2(\mathbf{R})$.

引理 1 的证明参见文献[10].

引理 2　令 $b = \dfrac{1}{2} + \epsilon$，那么

$$\| u \|_{L_{xt}^4} \leq C \| u \|_{X_{0,\frac{n+1}{2n+1}(\frac{1}{2}+\epsilon)}}, \tag{4}$$

$$\left\| D_x^{\frac{2n-1}{8}} u \right\|_{L_{xt}^6} \leq C \| u \|_{X_{0,\frac{3}{4}b}}. \tag{5}$$

证明　(4)式的证明参见文献[27]中的(2.2). 现在证明(5)式. 令 $\theta = \dfrac{2}{3}$，由引理 1 得到

$$\left\| \int_{\mathbf{R}} e^{i(t\phi(\xi)+x\xi)} \mid \phi''(\xi) \mid^{\frac{1}{6}} \mathscr{F}_x u_0(\xi)\mathrm{d}\xi \right\|_{L_{xt}^6} \leq C \| u_0 \|_{L_x^2}.$$

这里 $\mid \phi(\xi) \mid = \mid \xi \mid^{2n+1}$，$\mid \phi''(\xi) \mid = c \mid \xi \mid^{2n-1}$. 所以 $\left\| \int_{\mathbf{R}} e^{i(t\phi(\xi)+x\xi)} \mid \xi \mid^{\frac{2n-1}{6}} \mathscr{F}_x u_0(\xi)\mathrm{d}\xi \right\|_{L_{xt}^6} \leq C \| u_0 \|_{L^2}$.

由于 $\| f \|_{L_{xt}^{4n+4}} \leq C \| D_x^\gamma D_t^\gamma f \|_{L_{xt}^6}$，$\gamma = \dfrac{2n-1}{12(n+1)}$. 所以

$$\| U(t)u_0 \|_{L_{xt}^{4n+4}} = C \left\| \int_{\mathbf{R}} e^{i(t\phi(\xi)+x\xi)} \mathscr{F}_x u_0(\xi)\mathrm{d}\xi \right\|_{L_{xt}^{4n+4}} \leq C \left\| D_x^\gamma D_t^\gamma \int_{\mathbf{R}} e^{i(t\phi(\xi)+x\xi)} \mathscr{F}_x u_0(\xi)\mathrm{d}\xi \right\|_{L_{xt}^6} =$$

$$C \left\| \int_{\mathbf{R}} e^{i(t\phi(\xi)+x\xi)} \mid \xi \mid^{\frac{2n-1}{6}} \mathscr{F}_x u_0(\xi)\mathrm{d}\xi \right\|_{L_{xt}^6} \leq C \| u_0 \|_{L_x^2}. \tag{6}$$

由(6)式，通过一个标准的证明，可以得到

$$\| D_x^{\frac{2n-1}{6}} u \|_{L_{xt}^6} \leq C \| u \|_{X_{0,b}}. \tag{7}$$

由(7)式和 Plancherel 恒等式

$$\| u \|_{L_{xt}^2} = C \| u \|_{X_{0,0}} \tag{8}$$

作内插，可以得出

$$\| D_x^{\frac{2n-1}{8}} u \|_{L_{xt}^4} \leq C \| u \|_{X_{0,\frac{3}{4}b}}. \tag{9}$$

引理 2 证毕.

引理 3　设 $b = \dfrac{1}{2} + \epsilon$，$0 \leq s \leq \dfrac{1}{2}$，算子 I^s 通过其 Fourier 变换定义为

$$\mathscr{F}I^s(u_1,u_2)(\xi,\tau) = \int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2 \\ \tau=\tau_1+\tau_2}} \big|\, |\xi_1|^{2n} - |\xi_2|^{2n} \big|^s \mathscr{F}u_1(\xi_1,\tau_1)\mathscr{F}u_2(\xi_2,\tau_2)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\tau_1.$$

有

$$\| I^s(u_1,u_2) \|_{L_{xt}^2} \leq C \| u_1 \|_{X_{0,\frac{n+1+2ns}{2n+1}b}} \| u_2 \|_{X_{0,\frac{n+1+2ns}{2n+1}b}}. \tag{10}$$

引理 3 的证明参见文献[28]中的引理 2.1.

引理 4　设 $c > 1/2$，$0 < b < 1/2$，$0 < T \leq 1$，则存在常数 $k_2, C > 0$ 使得

$$\| U(\cdot)u_0 \|_{X_{s,c}^T} \leq k_2 \| u_0 \|_{H^s}, \forall\, u_0 \in H^s(\mathbf{R}), \tag{11}$$

$$\left\| \int_0^t U(t-s)f(s)\mathrm{d}s \right\|_{X_{s,b}^T} \leq CT^{1-2b} \| f \|_{X_{s,-b}^T}, \forall\, f \in X_{s,b}^T. \tag{12}$$

引理 4 的证明参见文献[17]中引理 3.1.

引理 5　设 $s \in \mathbf{R}$，$b < 1/2$，$0 < T \leq 1$，$\Phi \in L_2^{0,s}$，令 $\bar{u} = \int_0^t U(t-s)\Phi\mathrm{d}W(s)$. 有

$$E\big(\sup_{t\in[0,T]} \| \bar{u} \|_{H^s}^2\big) \leq 38T \| \Phi \|_{L_2^{0,s}}^2, \tag{13}$$

$$E(\| \psi\bar{u} \|_{X_{s,b}}^2) \leq C \| \Phi \|_{L_2^{0,s}}^2. \tag{14}$$

类似于文献[17]中命题 2.1 中的证明，可以得到引理 5.

2 双线性估计和三线性估计

在这一节中,将建立双线性和三线性估计.首先建立如下双线性估计.

定理 5 假设 $n\geq 2, 0<\epsilon<\dfrac{1}{48(2n+1)}, -n+\dfrac{1}{4}+4n\epsilon\leq s\leq 0, b=\dfrac{1}{2}-2\epsilon$.则存在 $C=C(n)>0$ 使得

$$\| \partial_x(u_1u_2)\|_{X_{s,-b}}\leq C\| u_1\|_{X_{s,b}}\| u_2\|_{X_{s,b}}, \forall u_1,u_2\in X_{s,b}. \tag{15}$$

证明 仅仅需要证明 $s=-n+\dfrac{1}{4}+4n\epsilon$ 的情形.定义

$$F_j(\xi_j,\tau_j)=\langle\xi_j\rangle^s\langle\sigma_j\rangle^b\mathscr{F}u_j(\xi_j,\tau_j), j=1,2,\quad F(\xi,\tau)=\langle\xi\rangle^{-s}\langle\sigma\rangle^b\mathscr{F}u(\xi,\tau).$$

为了证明(15)式,利用对偶性,只需证明

$$\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}}\frac{|\xi|\langle\xi\rangle^s|F||F_1||F_2|}{\langle\sigma\rangle^b\langle\sigma_1\rangle^b\langle\xi_1\rangle^s\langle\sigma_2\rangle^b\langle\xi_2\rangle^s}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\leq C\| F\|_{L^2_{\xi\tau}}\| F_1\|_{L^2_{\xi\tau}}\| F_2\|_{L^2_{\xi\tau}}. \tag{16}$$

不失一般性,假设 $F\geq 0, F_j\geq 0(j=1,2)$.由 $|\xi_1|$ 和 $|\xi_2|$ 之间的对称性,不失一般性,还可假设 $|\xi_1|\geq|\xi_2|$.因而只需考虑上述不等式左边在下述区域的积分.

$$\Omega=\{(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\in\mathbf{R}^4,\xi=\xi_1+\xi_2,\tau=\tau_1+\tau_2,|\xi_1|\geq|\xi_2|\}.$$

显然,Ω 可以分解为下述 6 个不同子区域:$\Omega=\bigcup\limits_{j=1}^{6}6\Omega_j$,其中

$\Omega_1=\{(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\in\Omega,|\xi_2|\leq|\xi_1|\leq 16\}$,

$\Omega_2=\{(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\in\Omega,|\xi_1|\geq 16,|\xi_1|\geq 4|\xi_2|\}$,

$\Omega_3=\{(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\in\Omega,|\xi_2|\leq 16\leq|\xi_1|\leq 4|\xi_2|\}$,

$\Omega_4=\{(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\in\Omega,16\leq|\xi_2|\leq|\xi_1|\leq 4|\xi_1|,\xi_1\xi_2\leq 0,2|\xi|\leq|\xi_2|\}$,

$\Omega_5=\{(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\in\Omega,16\leq|\xi_2|\leq|\xi_1|\leq 4|\xi_1|,\xi_1\xi_2\leq 0,2|\xi|\geq|\xi_2|\}$,

$\Omega_6=\{(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\in\Omega,8\leq|\xi_2|\leq|\xi_1|\leq 4|\xi_2|,\xi_1\xi_2\geq 0\}$.

把(16)式左端相应于区域 Ω_j 上的积分分别表示为 $J_j(1\leq j\leq 6)$.令

$$K(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)=\frac{|\xi|\langle\xi\rangle^s}{\langle\sigma\rangle^b\langle\sigma_1\rangle^b\langle\xi_1\rangle^s\langle\sigma_2\rangle^b\langle\xi_2\rangle^s},\mathscr{F}f_j=\frac{F_j}{\langle\sigma_j\rangle^b}(j=1,2),\mathscr{F}f=\frac{F}{\langle\sigma\rangle^b}.$$

下面依次估计子区域 Ω_j 上的积分 $J_j(1\leq j\leq 6)$.

(1)子区域 $\Omega_1:\{|\xi_2|\leq|\xi_1|\leq 16|\}$.在这个子区域中,$K(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\leq\dfrac{C}{\langle\sigma\rangle^b\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}$.因此,由 Hölder 不等式、Plancherel 恒等式、(4)式以及 $\dfrac{(n+1)(\frac{1}{2}+\epsilon)}{2n+1}<\dfrac{1}{2}-2\epsilon$,得到

$$J_1\leq C\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}}\frac{FF_1F_2}{\langle\sigma\rangle^b\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\leq C\| f\|_{L^2_{xt}}\| f_1\|_{L^4_{xt}}\| f_1\|_{L^4_{xt}}\leq$$

$$C\| f\|_{L^2_{xt}}\| f_1\|_{X_{0,\frac{(n+1)(\frac{1}{2}+\epsilon)}{2n+1}}}\| f_2\|_{X_{0,\frac{(n+1)(\frac{1}{2}+\epsilon)}{2n+1}}}\leq C\| F\|_{L^2_{\xi\tau}}\| F_1\|_{L^2_{\xi\tau}}\| F_2\|_{L^2_{\xi\tau}}.$$

(2)子区域 $\Omega_2:\{|\xi_1|>4|\xi_2|,|\xi_1|\geq 1\}$.在此子区域中,$\dfrac{3}{4}|\xi_1|\leq|\xi|\leq\dfrac{5}{4}|\xi_1|$,由于 $s>\dfrac{1}{4}-n$,因此 $K(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\leq C\dfrac{|\xi|}{\langle\sigma\rangle^b\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}\leq C\dfrac{|\xi_1^{2n}-\xi_2^{2n}|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{8n}}}{\langle\sigma\rangle^b\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}$.因 $0<\epsilon<\dfrac{1}{48(2n+1)}$,由 Hölder 不等式和引理 2,得到

$$J_2\leq C\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}}\frac{|\xi_1^{2n}-\xi_2^{2n}|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{8n}}FF_1F_2}{\langle\sigma\rangle^b\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}\leq C\| I^{\frac{1}{2}-\frac{1}{8n}}(f_1,f_2)\|_{L^2_{xt}}\| f\|_{L^2_{\xi\tau}}\leq C\| F\|_{L^2_{\xi\tau}}\| F_1\|_{L^2_{\xi\tau}}\| F_2\|_{L^2_{\xi\tau}}.$$

(3)子区域 $\Omega_3:\{|\xi_2|\leq 1\leq|\xi_1|\leq 4|\xi_2|\}$.在这个子区域中,$K(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\leq\dfrac{C}{\langle\sigma\rangle^b\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}$.

类似于 J_1 的估计,有 $J_3\leq C\| F\|_{L^2_{\xi\tau}}\| F_1\|_{L^2_{\xi\tau}}\| F_2\|_{L^2_{\xi\tau}}$.

(4)子区域 $\Omega_4:\{1\leq|\xi_2|\leq|\xi_1|\leq 4|\xi_2|,\xi_1\xi_2\leq 0,2|\xi|\leq|\xi_2|\}$. 由文献[27]中的(2.17)，有

$$3\max\{|\sigma|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}\geq|\sigma-\sigma_1-\sigma_2|=|\xi^{2n+1}-\xi_1^{2n+1}-\xi_2^{2n+1}|\geq (2n+1)|\xi||\xi_1|^n|\xi_2|^n. \tag{17}$$

因为在此子区域中，$\xi_1\xi_2\leq 0,2|\xi|\leq|\xi_2$，以及 $|\xi_2|\leq|\xi_1|\leq 4|\xi_2|$，所以有

$$|\xi_1^{2n}-\xi_2^{2n}|^{\frac{1}{2}}\geq C|\xi|^{\frac{1}{2}}|\xi_1|^{n-\frac{1}{2}},\ |\xi^{2n}-\xi_2^{2n}|^{\frac{1}{2}}\geq C|\xi_1|^n,\ |\xi^{2n}-\xi_1^{2n}|^{\frac{1}{2}}\geq C|\xi_1|^n.$$

分下面三种情况来考虑：

(i) $|\sigma|=\max\{|\sigma|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}$，

(ii) $|\sigma_1|=\max\{|\sigma|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}$，

(iii) $|\sigma_2|=\max\{|\sigma|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}$.

情况(i) $|\sigma|=\max\{|\sigma|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}$. 利用(17)式，得到

$$K(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\leq C\frac{|\xi|^{1-b-\frac{1}{2}(1-32\epsilon)-\frac{1}{2}(1-32\epsilon)}\langle\xi\rangle^s|\xi|^{\frac{1}{2}(1-32\epsilon)}|\xi_1|^{-2s-2nb}}{\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}\leq$$

$$C\frac{|\xi|^{\frac{1}{2}(1-32\epsilon)}|\xi_1|^{(n-\frac{1}{2})(1-32\epsilon)}}{\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}\leq C\frac{|\xi_1^{2n}-\xi_2^{2n}|^{\frac{1}{2}(1-32\epsilon)}}{\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}.$$

因此，利用引理 2 和 Cauhcy-Schwarz 不等式、Hölder 不等式，注意到

$$\frac{n+1}{2n+1}\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)<\left(1-\frac{64n\epsilon}{2n+1}\right)\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)<\frac{1}{2}-2\epsilon,$$

得到

$$J_4\leq C\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\substack{\xi-\xi_1+\xi_2\\ \tau-\tau_1+\tau_2}}\frac{|\xi_1^{2n}-\xi_2^{2n}|^{\frac{1}{2}(1-32\epsilon)}FF_1F_2}{\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau+C\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\substack{\xi-\xi_1+\xi_2\\ \tau-\tau_1+\tau_2}}\frac{FF_1F_2}{\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\leq$$

$$C\|F\|_{L^2_{\xi\tau}}\prod_{j-1}^2\|f_j\|_{X_{0,(1-\frac{64n\epsilon}{2n+1})(\frac{1}{2}+\epsilon)}}+C\|F\|_{L^2_{\xi\tau}}\prod_{j-1}^2\|f_j\|_{L^4_{xt}}\leq C\|F\|_{L^2_{\xi\tau}}\prod_{j-1}^2\|f_j\|_{X_{0,(1-\frac{64n\epsilon}{2n+1})(\frac{1}{2}+\epsilon)}}+$$

$$C\|F\|_{L^2_{\xi\tau}}\prod_{j-1}^2\|f_j\|_{X_{0,\frac{n+1}{2n+1}(\frac{1}{2}+\epsilon)}}\leq C\|F\|_{L^2_{\xi\tau}}\|F_1\|_{L^2_{\xi\tau}}\|F_2\|_{L^2_{\xi\tau}}.$$

情况(ii) $|\sigma_1|=\max\{|\sigma|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}$. 由(17)式，得到

$$K(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\leq C\frac{|\xi|^{1-b-\frac{1}{2}(1-32\epsilon)}\langle\xi\rangle^s|\xi|^{\frac{1}{2}(1-32\epsilon)}}{\langle\sigma_2\rangle^b\langle\sigma\rangle^b}\leq C\frac{|\xi|^{\frac{1}{2}(1-32\epsilon)}|\xi_1|^{(n-\frac{1}{2})(1-32\epsilon)}}{\langle\sigma_2\rangle^b\langle\sigma\rangle^b}\leq C\frac{|\xi_2^{2n}-\xi^{2n}|^{\frac{1}{2}(1-32\epsilon)}}{\langle\sigma_2\rangle^b\langle\sigma\rangle^b}.$$

令

$$\xi'=\xi_1,\xi'_1=\xi,\xi'_2=-\xi_2,\tau'=\tau_1,\tau'_1=\tau,\tau'_2=-\tau_2,$$

$$\sigma'=\tau'+(-1)^n(\xi')^{2n+1},\sigma'_j=\tau'_j+(-1)^n(\xi'_j)^{2n+1},j=1,2,$$

$$F'(\xi',\tau')=F_1(\xi_1,\tau_1),F'_1(\xi'_1,\tau'_1)=F(\xi,\tau),F'_2(\xi'_2,\tau'_2)=F_2(\xi_2,\tau_2).$$

则 $\xi'=\xi'_1+\xi'_2,\tau'=\tau'_1+\tau'_2,\sigma'=-\sigma_1,\sigma'_1=-\sigma,\sigma'_2=-\sigma_2$. 因此，

$$J_4\leq C\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\substack{\xi'-\xi'_1+\xi'_2\\ \tau'-\tau'_1+\tau'_2}}\frac{F'F'_1F'_2|(\xi'_1)^{2n}-(\xi'_2)^{2n}|^{\frac{1}{2}(1-32\epsilon)}}{\langle\sigma'_2\rangle^b\langle\sigma'_1\rangle^b}\mathrm{d}\xi'_1\mathrm{d}\tau'_1\mathrm{d}\xi'\mathrm{d}\tau'+$$

$$C\int_{\mathbf{R}^2}C\int_{\substack{\xi'-\xi'_1+\xi'_2\\ \tau'-\tau'_1+\tau'_2}}\frac{F'F_1F'_2}{\langle\sigma'_2\rangle^b\langle\sigma'_1\rangle^b}\mathrm{d}\xi'_1\mathrm{d}\tau'_1\mathrm{d}\xi'\mathrm{d}\tau'.$$

类似于情况(i)的证明，得到 $J_4\leq C\|F'\|_{L^2_{\xi'\tau'})}\|F'_1\|_{L^2_{\xi'\tau'}}\|F'_2\|_{L^2_{\xi'\tau'}}\leq C\|F\|_{L^2_{\xi\tau}}\|F_1\|_{L^2_{\xi\tau}}\|F_2\|_{L^2_{\xi\tau}}$.

情况(iii) $|\sigma_2|=\max\{|\sigma|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}$. 该情况类似于情况(ii).

(5)子区域 $\Omega_5:\{1\leq|\xi_2|\leq|\xi_1|\leq 4|\xi_2|,\xi_1\xi_2\leq 0,|\xi_2|\leq 2|\xi|\}$. 在此子区域中，有 $|\xi_1|\leq 5|\xi_2|\leq 5|\xi_1|,\frac{1}{2}|\xi_2|\leq|\xi|\leq 5|\xi_2|$，因此得到 $K(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\leq C\frac{|\xi_1|^{1-s}}{\langle\sigma\rangle^b\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}$.

依然分成前面的 3 种情况(i)～(iii)来考虑.

情况(i) $|\sigma|=\max\{|\sigma|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}$. 由于 $s=\frac{1}{4}-n+4n\epsilon$，有

$$K(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\leq C\frac{|\xi_1|^{1-s-(2n+1)b}}{\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}\leq\frac{C}{\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}.$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式、Plancherel 恒等式、Hölder 不等式,注意到 $\frac{n+1}{2n+1}(\frac{1}{2}+\epsilon)<\frac{1}{2}-2\epsilon$, 有

$$J_4 \leq C\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}}\frac{FF_1F_2}{\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \leq C\|F\|_{L^2_{\xi\tau}}\|f_1\|_{L^4_{xt}}\|f_2\|_{L^4_{xt}}\leq$$

$$C\|F\|_{L^2_{\xi\tau}}\|f_1\|_{X_{0,\frac{n+1}{2n+1}(\frac{1}{2}+\epsilon)}}\|f_2\|_{X_{0,\frac{n+1}{2n+1}(\frac{1}{2}+\epsilon)}}\leq C\|F\|_{L^2_{\xi\tau}}\|F_1\|_{L^2_{\xi\tau}}\|F_2\|_{L^2_{\xi\tau}}.$$

情况(ii) $|\sigma_1|=\max\{|\sigma|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}$. 在这种情况,有

$$K(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\leq C\frac{|\xi_1|^{1-s-(2n+1)b}}{\langle\sigma_2\rangle^b\langle\sigma\rangle^b}\leq\frac{C}{\langle\sigma_2\rangle^b\langle\sigma\rangle^b}.$$

如同 Ω_4 的情形(ii),令

$$\xi'=\xi_1,\xi'_1=\xi,\xi'_2=-\xi_2,\tau'=\tau_1,\tau'_1=\tau,\tau'_2=-\tau_2,$$

$$\sigma'=\tau'+(-1)^n(\xi')^{2n+1},\sigma'_j=\tau'_j+(-1)^n(\xi'_j)^{2n+1},j=1,2,$$

$$F'(\xi',\tau')=F_1(\xi_1,\tau_1),F'_1(\xi'_1,\tau'_1)=F(\xi,\tau),F'_2(\xi'_2,\tau'_2)=F_2(\xi_2,\tau_2),$$

则 $\xi'=\xi'_1+\xi'_2,\tau'=\tau'_1+\tau'_2,\sigma'=-\sigma_1,\sigma'_1=-\sigma,\sigma'_2=-\sigma_2$. 因此,由 Cauhcy-Schwarz 不等式、Plancherel 恒等式、Hölder 不等式、引理 1,注意到 $\frac{n+1}{2n+1}(\frac{1}{2}+\epsilon)<b=\frac{1}{2}-2\epsilon$,有

$$J_4\leq C\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\substack{\xi'=\xi'_1+\xi'_2\\ \tau'=\tau'_1+\tau'_2}}\frac{F'F_1F'_2}{\langle\sigma'_2\rangle^b\langle\sigma'_1\rangle^b}\mathrm{d}\xi'_1\mathrm{d}\tau'_1\mathrm{d}\xi'\mathrm{d}\tau'\leq C\|F'\|_{L^2_{\xi'\tau'}}\|\mathscr{F}^{-1}(F'_1\langle\sigma'_1\rangle^{-b})\|_{L^4_{xt}}\|\mathscr{F}^{-1}(F'_2\langle\sigma'_2\rangle^-b)\|_{L^4_{xt}}\leq$$

$$C\|F'\|_{L^2_{\xi'\tau'}}\|\mathscr{F}^{-1}(F'_1\langle\sigma'_1\rangle^{-b})\|_{X_{0,\frac{n+1}{2n+1}(\frac{1}{2}+\epsilon)}}\|\mathscr{F}^{-1}(F'_2\langle\sigma'_2\rangle^{-b})\|_{X_{0,\frac{n+1}{2n+1}(\frac{1}{2}+\epsilon)}}\leq$$

$$C\|F'\|_{L^2_{\xi'\tau'}}\|F'_1\|_{L^2_{\xi'_1\tau'_1}}\|F'_2\|_{L^2_{\xi'_2\tau'_2}}\leq C\|F\|_{L^2_{\xi\tau}}\|F_1\|_{L^2_{\xi\tau}}\|F_2\|_{L^2_{\xi\tau}}.$$

情况(iii) $|\sigma_2|=\max\{|\sigma|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}$. 该情况类似于情况(ii).

(6)子区域 Ω_6:$\{1\leq|\xi_2|\leq|\xi_1|\leq 4|\xi_2|,\xi_1\xi_2\geq 0\}$. 在此区域中,$|\xi_1|\leq|\xi|\leq 5|\xi_2|\leq 5|\xi_1|$,因此有 $K(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\leq C\frac{|\xi_1|^{1-s}}{\langle\sigma\rangle^b\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}$.

类似于 J_5 的证明,有 $J_6\leq C\|F\|_{L^2_{\xi\tau}}\|F_1\|_{L^2_{\xi\tau}}\|F_2\|_{L^2_{\xi\tau}}$.

将 $J_j(1\leq j\leq 6)$ 的估计合并在一起,最终得到

$$\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}}K(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)FF_1F_2\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\leq C\|F\|_{L^2_{\xi\tau}}\|F_1\|_{L^2_{\xi\tau}}\|F_2\|_{L^2_{\xi\tau}}. \tag{20}$$

定理 5 证明完毕.

类似于定理 5 的证明,可以得到下述三线性估计.

定理 6 假设 $n\geq 2,0<\epsilon<\frac{1}{48(2n+1)},-\frac{n}{2}+\frac{3}{4}\leq s\leq 0,b=\frac{1}{2}-2\epsilon$. 则存在 $C=C(n)$,

$$\|\partial_x(u_1u_2u_3)\|_{X_{s,-b}}\leq C\|u_1\|_{X_{s,b}}\|u_2\|_{X_{s,b}}\|u_3\|_{X_{s,b}}, \tag{21}$$

3 定理 1 至定理 4 的证明

在本节,将证明定理 1 至定理 4.

首先,把(1)式化为下面的等价积分方程

$$u(t)=U(t)u_0+\int_0^t U(t-s)\partial_x(u^2)\mathrm{d}s+\int_0^t U(t-s)\Phi\mathrm{d}W. \tag{22}$$

令 $z(t)=U(t)u_0,\bar{u}=\int_0^t U(t-s)\Phi\mathrm{d}W,v(t)=u(t)-z(t)-\bar{u}$. 则求解(22)式等价于求解 v:

$$v(t)=\int_0^t U(t-s)\partial_x(v+z(t)+\bar{u})^2\mathrm{d}s. \tag{23}$$

定义映射 $v\mapsto G(v)$:

$$G(v)=\int_0^t U(t-s)\partial_x(v+z(t)+\bar{u})^2\mathrm{d}s. \tag{24}$$

由引理 4 和定理 5，可以得出

$$\| G(v) \|_{X_{s,b}^T} \leq \| \int_0^t U(t-s)\partial_x(v+z(t)+\bar{u})^2 \mathrm{d}s \|_{X_{s,b}^T} \leq$$

$$CT^{1-2b}(\| v \|_{X_{s,b}^T}^2 + \| z(t) \|_{X_{s,b}^T}^2 + \| \psi(\frac{t}{T})\bar{u} \|_{X_{s,b}}^2) \leq$$

$$CT^{1-2b}(\| v \|_{X_{s,b}^T}^2 + \| u_0 \|_{X_{s,b}^T}^2 + \| \psi(\frac{t}{T})\bar{u} \|_{X_{s,b}}^2), \tag{25}$$

而且，

$$\| G(v_1) - G(v_2) \|_{X_{s,b}^T} \leq CT^{1-2b} \| v_1 - v_2 \|_{X_{s,b}^T}(\| v_1 \|_{X_{s,b}^T} + \| v_2 \|_{X_{s,b}^T} + \| z(t) \|_{X_{s,b}^T} + \| \psi(\frac{t}{T})\bar{u} \|_{X_{s,b}}) \leq$$

$$CT^{1-2b} \| v_1 - v_2 \|_{X_{s,b}^T}(\| v_1 \|_{X_{s,b}^T} + \| v_2 \|_{X_{s,b}^T} + \| u_0 \|_{H^s} + \| \psi(\frac{t}{T})\bar{u} \|_{X_{s,b}}^2), \tag{26}$$

令

$$R_\omega = (\| \psi(\frac{t}{T})\bar{u} \|_{X_{s,b}} + \| u_0 \|_{H^s} + 2)^2, \tag{27}$$

$$T_\omega = \inf\{T > 0 \mid CT^{1-2b}R_\omega^2 \geq \frac{1}{4}\}. \tag{28}$$

由引理 5，对于任意的 $0 < T < 1$，可以得出 $\| \chi_{[0,T]}\bar{u} \|_{X_{s,b}} \leq C \| \bar{u} \|_{X_{s,b}^1} \leq C(\omega)$，此外，由于 $b = \frac{1}{2} - \epsilon$，$\| \chi_{[0,T]}\bar{u} \|_{X_{s,b}}$ 关于 T 连续．由(27) 式可知 $T_\omega > 0$，$\| \chi_{[0,T]}\bar{u} \|_{X_{s,b}}$ 是 $\mathscr{F}_T$- 可测的，所以 T_ω 是一个停时．结合(25) ～ (28) 式推知，G 将 $X_{s,b}^{T_\omega}$ 的闭单位球 $B = \{v \in X_{s,b}^{T_\omega} \mid \| v \|_{X_{s,b}^{T_\omega}} \leq 1\}$ 映射到其自身，并且

$$\| G(v_1) - G(v_2) \|_{X_{s,b}^T} \leq \frac{1}{2} \| v_1 - v_2 \|_{X_{s,b}^T}, v_1, v_2 \in B. \tag{29}$$

因此，G 有唯一的不动点 $v \in B$．相应地，(1) 式在$[0, T_\omega]$上有唯一解 u．定理 1 剩下部分的证明，请读者参考文献[17,29]中的定理 1.1.

证明定理 2 之前，先研究(1)式的逼近问题，即下述频率截断的随机 PDE 方程

$$\mathrm{d}u_m(t) = [-\partial_x^{2n+1}u_m - \partial_x(u_m^2)]\mathrm{d}t + \Phi_m \mathrm{d}W(t), u_m(x,0) = u_{0m}(x) = P_m u_0(x), \tag{30}$$

这里 $P_m u_0(x) = \mathscr{F}_x^{-1}(\psi(\frac{\xi}{m})\mathscr{F}_x u_0(\xi))$．(30)式可以写成下面的形式：

$$u_m = U(t)u_{0m} - \int_0^t S(t-\tau)u_m^2 \mathrm{d}\tau + \int_0^t U(t-\tau)\Phi_m \mathrm{d}W(\tau). \tag{31}$$

类似于文献[29]中命题 3.1 的证明，有引理 6.

引理 6　设 $s \geq -n + \frac{1}{4}$，$u_0(x,\omega) \in L^2(\Omega; H^s(\mathbf{R}))$，$u_0$ 是 $\mathscr{F}_0$- 可测的．对于每一个 $m > 0$，$T > 0$ 和 a. e. $\omega \in \Omega$，(31) 式在$[0, T]$上存在唯一解.

类似于文献[29]中的命题 3.2 的证明，利用 Itô 公式、BDG 不等式，有引理 7.

引理 7　设 $s = 0$，对任何 $T_0 > 0$，(31) 式有解 u_m，且解 u_m 在 $L^2(\Omega, L^\infty(0, T_0; L^2(\mathbf{R})))$ 中一致有界．更确切地说，对任何 $m \geq 1$，有

$$E(\sup_{t\in[0,T_0]} \| u_m \|_{L_x^2}) \leq C(E(\| u_0 \|_{L^2}^2), T_0, \| \Phi \|_{L_2^{0,0}}). \tag{32}$$

由引理 7 可知，存在子序列(仍记为 u_m) 在 $L^2(\Omega; L^\infty(0, T_0; L^2(\mathbf{R})))$ 中弱 $*$ 收敛于一个函数 $\tilde{u}$，而且

$$E(\sup_{t\in[0,T_0]} \| \tilde{u} \|_{L^2}^2) \leq C. \tag{33}$$

记 $z_m(t) = U(t)u_{0m}$，$\bar{u}_m = \int_0^t U(t-\tau)\Phi_m \mathrm{d}\tau$，令 $v_m = u_m - z_m - \bar{u}_m$，定义映射 G_m：

$$G_m(v_m) = \int_0^t U(t-\tau)\partial_x(v_m + z_m + \bar{u}_m)^2 \mathrm{d}\tau, \tag{34}$$

那么频率截断方程(30)等价于映射 G_m 的不动点．令 $B = \{u: \| u \|_{X_{0,b}^{\tilde{T}}} \leq 1\}$．重复定理 1 的证明过程，很容易验证，对任意满足不等式

$$2C\widetilde{T}^{1-2b}(2+\|u_{0m}\|_{L^2}+\|\chi_{t\in[0,\widetilde{T}]}\bar{u}_m\|_{X_{0,b}})^2<1 \tag{35}$$

的 $\widetilde{T}>0$. G_m 在 B 上是压缩映射，令 $R_\omega=\sup\limits_{0<t<T_0}\|\tilde{u}\|_{L_x^2}^2$. 那么 $E(\sup\limits_{0<t<T_0}\|\tilde{u}\|_{L_x^2}^2)\le C$，因此，推导出 $R_\omega<\infty$. 考虑 $\widetilde{T}_\omega>0$ 满足

$$2C\widetilde{T}_\omega^{1-2b}(2+\|u_0\|_{L^2}+R_\omega^{1/2}+\|\chi_{t\in[0,\widetilde{T}]}\bar{u}_m\|_{X_{0,b}})^2<1. \tag{36}$$

那么对于任意的 m，可以得出 $\|u_0^m\|_{L_x^2}\le\|u_0\|_{L_x^2}$，$\|\chi_{[0,\widetilde{T}_\omega]}\bar{u}_m\|_{X_{0,b}}\le\|\chi_{t\in[0,\widetilde{T}]}\bar{u}\|_{X_{0,b}}$. 由此可见，对于任意的 $m\ge1$，(35) 式成立，所以 $\widetilde{T}=\widetilde{T}_\omega$. 此外，还可以得出 $\widetilde{T}_\omega\le T_\omega$，这里 T_ω 是在定理 1 的证明中得到解 v 的存在时间. 因此，对于任意的 m，$\widetilde{T}_\omega$ 满足(36) 式，G_m 在 $X_{0,b}^{\widetilde{T}}$ 中是压缩的，并且 G 在 $X_{0,b}^{\widetilde{T}}$ 中也是压缩的. G_m，G 的不动点 $\in X_{0,b}^{\widetilde{T}}$ 分别是(23) 式、(31) 式的唯一解. 此外，v_m 在 $X_{0,b}^{\widetilde{T}}$ 中收敛于 v.

利用引理 6 和引理 7 可知，在 $L^2(\Omega;L^\infty(0,T_0;L^2(\mathbf{R})))$ 中 $u_m\to u$，根据文献[30]中定理 4.3.2 可得，对于任意的 $t\in[0,\widetilde{T}_\omega]$，$u(t)=\tilde{u}(t)$. 因此，可以得出

$$\|u(\widetilde{T}_\omega)\|_{L_x^2}^2\le\sup_{t\in[0,\widetilde{T}]}\|\tilde{u}\|_{L_x^2}^2=R_\omega. \tag{37}$$

$[\widetilde{T}_\omega,2\widetilde{T}_\omega]$ 上构造一个解. 再从 $u(2\widetilde{T}_\omega)$ 开始，重复这一证明，可以知道，(1) 式在$[0,T_0]$ 上存在唯一解. 定理 2 证明完毕.

类似于定理 1 和 2 的证明，可以证得定理 3 和定理 4.

4 总结与展望

事实上，通过本文所使用的技巧，可以研究更一般的 KdV 型的色散方程

$$du(t)=[-\partial_x^{2n+1}u(t)+\partial_x^{2n-1}u(t)-\partial_x(u(t))^k]dt+\Phi dW(t),u(0)=u_0, \tag{38}$$

其中 $n,k\ge2$，$W(t)=\dfrac{\partial B}{\partial x}=\sum\limits_{j-1}^{\infty}\beta_je_j$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 中的一个柱形 Wiener 过程，$\{e_j\mid j\in\mathbf{N}\}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 中的标准正交基，$\{\beta_j\mid j\in\mathbf{N}\}$ 是一个固定概率空间中的一列相互独立的实 Brown 运动，Φ 是从 $L^2(\mathbf{R})$ 到 $H^s(\mathbf{R})$ 上的一个 Hilbert-Schmidt 算子. 另外，能不能使用高低频技巧和停时技巧证明在低正则性空间中证明上述方程有整体解是一个非常有意思的问题. 文献[31－32]的工作说明，初值随机化的作用是出乎意料的. Flandoli 等[33]的工作以及文献[34－35]的工作说明噪声对方程的影响也是出乎意料的.

参 考 文 献

[1] Bourgain J. Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. Part II: The KdV equation [J]. Geom Funct Anal, 1993, 3: 209-262.

[2] Colliander J, Keel M, Staffilani G, et al. Global well-posedness for Schrödinger equations with derivative [J]. SIAM J Math Anal, 2001, 33: 649-669.

[3] Colliander J, Keel M, Staffilani G, et al. Global well-posedness for KdV in Sobolev spaces of negative index [J]. Electron J Diff Eqns, 2001, 26: 1-7.

[4] Colliander J, Keel M, Staffilani G, et al. Almost conservation laws and global rough solutions to a nonlinear Schrödinger equation [J]. Math Res Lett, 2002, 9: 659-682.

[5] Colliander J, Keel M, Staffilani G, et al. Sharp global well-posedness for KdV and modified KdV on R and T [J]. J Amer Math Soc, 2003, 16: 705-749.

[6] Grünrock A. New applications of the Fourier restriction norm method to well-posedness problems for nonlinear evolution equations [D]. Wuppertal: University of Wuppertal, 2002.

[7] Guo Z H. Global well-posedness of Korteweg-de Vries equation in $H^{3/4}(\mathbf{R})$ [J]. J Math Pures Appl, 2009, 91: 583-59.

[8] Kappeler T, Topalov P. Global wellposedness of KdV in $H^1(T,R)$ [J]. Duke Math J, 2006, 135: 327-360.

[9] Kenig C, Ponce G, Vega L. Well-posedness of the initial value problem for the Korteweg-de Vries equation [J]. J Amer Math Soc, 1991, 4: 323-347.

[10] Kenig C, Ponce G, Vega L. Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations [J]. Indiana Univ Math J, 1991, 40: 33-69.

[11] Kenig C, Ponce G, Vega L. Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle [J]. Comm Pure Appl Math, 1993, 46: 527-620.

[12] Kenig C, Ponce G, Vega L. A bilinear estimate with applications to the KdV equation [J]. J Amer Math Soc, 1996, 9: 573-603.

[13] Kenig C, Ponce G, Vega L. On the ill-posedness of some canonical dispersive equations [J]. Duke Math J, 2001, 106: 617-633.

[14] Kishimoto N. Well-posedness of the Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation at the critical regularity [J]. Diff Int Eqns, 2009, 22: 447-464.

[15] Tao T. Multilinear weighted convolution of L^2 function and applications to nonlinear dispersive equation [J]. Amer J Math, 2001, 123: 839-908.

[16] de Bouard A, Debussche A. On the stochastic Korteweg-de Vries equation [J]. J Funct Anal, 1998, 154: 215-251.

[17] de Bouard A, Debussche A, Tsutsumi Y. White noise driven Korteweg-de Vries equation [J]. J Funct Anal, 1999, 169: 532-558.

[18] Chen Y, Gao J H, Guo L B. Well-posedness for stochastic Camassa-Holm equation [J]. J Diff Eqns, 2012, 253: 2353-2379.

[19] Grünrock A. An improved local well-posedness result for the modified KdV equation [J]. Int Math Res Notices, 2004, 61: 3287-3308.

[20] Kappeler T, Topalov P. Global well-posedness of mKdV in $L^2(T,R)$ [J]. Comm Partial Diff Eqns, 2005, 30: 435-449.

[21] Nguyen T. Power series solution for the modified KdV equations [J]. Electron J Diff Eqns, 2008, 15: 359-370.

[22] Nakanishi K, Takaoka H, Tsutsumi Y. Local well-posedness in low regularity of the mKdV equations with periodic bboundary condition [J]. Discrete Contin Dyn Syst, 2010, 28: 1635-16.

[23] Olver P, Rosenu P. Tri-Hamiltonian duality between solitons and solitary-wave solutions having compact support [J]. Phys Rev E, 1996, 53: 1900-1906.

[24] Soonsik K, Oh T. On unconditional well-posedness of modified KdV [J]. Int Math Res Notices, 2012, 15: 3509-3534.

[25] Takaoka H, Tsutsumi Y. Well-posedness of the Cauchy problem for the modified KdV equation with periodic boundary condition [J]. Int Math Res Notices, 2004, 56: 3009-3040.

[26] Molinet L. Sharp ill-posedness results for the KdV and mKdV equations on the torus [J]. Adv in Math, 2012, 230: 1895-1930.

[27] Li Y S, Yan W, Yang X Y. Well-posedness of a higher-order modified Camassa-Holm equation in spaces of low regularity [J]. J Evol Eqns, 2010, 10: 465-486.

[28] LIN L, LYU G Y, YAN W. Well-posedness and limit behaviors of a stochastic higher modified Camassa-Holm equation [J]. Stoch and Dyn, 2016, 16: 1650019.

[29] Richards G. Well-posedness of the stochastic KdV-Burders equation [J]. Stoch Process and their Appl, 2014, 124: 1627-1647.

[30] Richards G. Maximal-in-time behavior of deterministic and stochastic dispersive partial differential equations [D]. Toronto: University of Toronto, 2012.

[31] Burq N, Tzvetkov N. Random data Cauchy theory for supercritical wave equations, I. Local theory [J]. Invent Math, 2008, 173: 449-475.

[32] Burq N, Tzvetkov N. Random data Cauchy theory for supercritical wave equations, II. A global existence result [J]. Invent Math, 2008, 173: 477-496.

[33] Flandoli F, Gubinelli M, Priola E. Well-posedness of the transport equation by stochastic perturbation [J]. Invent Math, 2010, 180: 1-53.

[34] Hairer M. Solving the KPZ equation [J]. Ann of Math, 2013, 178: 559-664.

[35] Hairer M. A theory of regularity structures [J]. Invent Math, 2014, 198: 269-504.

The Cauchy Problem for Higher-Order KdV Equations Forced by White Noise

Li Yongsheng[1], Yan Wei[2]

(1. School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China;
2. School of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

Abstract: The present paper is devoted to the study on the Cauchy problem for the higher-order KdV type equations forced by white noises. By establishing bilinear and trilinear estimates in some Bourgain spaces, we prove the local well-posedness and global well-posedness of corresponding problems. The key ingredients that we used are bilinear/trilinear estimates, Itô formula and the BDG inequality as well as the stopping time technique. Furthermore, the techniques used in this paper can be applied to study the local well-posedness and global well-posedness of other dispersive equations with Hamiltonian structure.

Keywords: Cauchy problem; Higher-order KdV type equation; white noise; Itô formula; BDG inequality; Stopping time technique

［责任编辑　陈留院］