文章编号:1000-2367(2023)05-0096-06 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2023.05.011

关于量子态的真多体非局域性的一些研究

陈峥立,程靖霖

(陕西师范大学 数学与统计学院,西安 710119)

摘 要:基于真多体纠缠态的定义和性质,引入了量子态真多体非局域性的定义,讨论了真多体非局域量子态与真多体纠缠态的关系,给出了三类不能用来检测量子态真多体非局域性的测量集合.

关键词:真多体非局域性;真多体纠缠;量子态

中图分类号:O413.1 **文献标志码**:A

量子非定域性是量子力学有别于经典力学的本质特征,它是量子信息和量子计算的基础,具有深远的物理意义,并且在密码学[1-2]、随机提取[3]和降低通信复杂[4]度等方面具有广泛应用.

在过去的 30 年中,关于两体情况下的贝尔非局域性的研究取得了一系列成果.GISIN 等人[5-6]证明了所有两体纠缠纯态都是贝尔非局域的;CAO 等人[7]给出了两体态的贝尔非局域性的数学定义和刻画,证明了所有贝尔局域态所构成的集合的凸性和闭性.但是,对于多体系统的非定域性所知甚少.

在多体情况下,非局域性比两体情况下显示出更加丰富和复杂的结构,这使得对多体非局域性相关的研究和刻画更富有挑战性.多体非局域性的研究是由 SVETLICHNY 引入了真正的多体纠缠[8-10]和真正的多体非局域性的概念,首次给出了三体情况下的真多体非局域性的定义(后文中简记为 SVETLICHNY 定义).在之后的进一步工作中,SEEVINCK 和 SVETLICHNY[11]以及 COLLINS 等[12]分别将三体情况下的 SVETLICHNY 定义推广到了 n 体.但在后续的实际应用中发现,SVETLICHNY 定义会导致一些操作问题.文献[13-14]指出 SVETLICHNY 定义中的信号术语从物理角度(导致祖父型悖论)和操作角度来看都是不一致的,并在文献[14]中基于无信号条件和测量的时间顺序分别给出了三体情况下的两种不同的真多体非局域性的定义,并证明了它们与 SVETLICHNY 定义之间的包含关系.CHEN 等[15]给出了一个联合概率分布 $P(r_1|M_1)$在所有可能的非局域关联都是无信号的条件下是真多体非局域的定义,并证明了所有的 n-qubit(n≥3)置换对称真多体纠缠纯态都是真多体非局域的.ZHANG 等[16]成功制备出世界上保真度最高的 6 光子 Greenberger-Horne-Zeilinger(GHZ)态,并利用 GHZ 论据验证了 6 光子 GHZ 非局域性.CONTRERAS-TEJADA等[17]基于真多体纠缠态的定义,类似地给出了真多体非局域性的定义,与文献[15]类似,同时假设概率分布是无信号的,即对所有的 $x_j\neq x'_j$ 和 j,都有

$$\sum_{a_j}P_M(\{a_i\}_{i\in M,i\neq j},a_j\mid\{x_i\}_{i\in M,i\neq j},x_j)=\sum_{a_j}P_M(\{a_i\}_{i\in M,i\neq j},a_j\mid\{x_i\}_{i\in M,i\neq j},x'_j),$$

对 $P_{\bar{M}}$ 也有类似的情况.其他相关概念可参考文献[18-21].

本文是在 CONTRERAS-TEJADA 等[17]提出的真多体非局域性的定义的基础上展开的.在第 2 节中,针对 CONTRERAS-TEJADA 等[17]提出的定义中存在的问题,在遵循文献[15,17]中无信号条件约束的情况下,给出了更精确的真多体非局域性的数学定义;证明了两可分态都是真多体局域态,进而说明了真多体非局域态都是真多体纠缠态.在第 3 节中,利用算子理论的方法,给出了三类不能用来检测量子态真多体非局域性的测量集合.

收稿日期:2022-05-19;**修回日期**:2022-07-01.

基金项目:国家自然科学基金(11571213;11871318;11771009);陕西省科技厅项目(2021JQ-301).

作者简介(通信作者):陈峥立(1973-),男,陕西蓝田人,陕西师范大学教授,博士,主要研究算子理论与量子信息,E-mail:czl@snnu.edu.cn.

1　预备知识

设 H 是一个有限维的复 Hilbert 空间，令 $B(H)$ 表示 H 上所有有界线性算子构成的集合.量子态 ρ 用 H 上的密度算子表示，即迹为 1 的半正定算子，H 上的所有密度算子构成的集合记为 $D(H)$，$S(H)$ 表示 H 上的所有纯态(单位向量)构成的集合.设 $n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geq 0$，用$[n]$表示集合$\{1,2,\cdots,n\}$.在一个 n 体量子系统 $\bigotimes\limits_{i=1}^{n}H_i=H_1\otimes H_2\otimes\cdots\otimes H_n$ 中，用 $\mathscr{M}_i=\{M^{x_i}\}_{x_i=1}^{m_{H_i}}$ 表示第 i 个量子系统 H_i 上的一组 POVM 测量，其中每一个 POVM 测量 $M^{x_i}=\{M_{a_i|x_i}\}_{a_i=1}^{O_{H_i}}$ 满足 $\sum\limits_{a_i=1}^{O_{H_i}}M_{a_i|x_i}=I_{H_i}$.复合量子系统 $\bigotimes\limits_{i=1}^{n}H_i$ 上的一个测量集合记作

$$\mathscr{M}_1\otimes\mathscr{M}_2\otimes\cdots\otimes\mathscr{M}_n=\{M^{x_1}\otimes M^{x_2}\otimes\cdots\otimes M^{x_n}:x_i=1,2,\cdots,m_{H_i}\},$$

其中，

$$M^{x_1}\otimes M^{x_2}\otimes\cdots\otimes M^{x_n}=\{M_{a_1|x_1}\otimes M_{a_2|x_2}\otimes\cdots\otimes M_{a_n|x_n}:a_i=1,2,\cdots,O_{H_i}\}.$$

2　真多体非局域性的定义

定义 1　设 A 为给定的非空集合，$\mathscr{T}=\{T_1,T_2,\cdots,T_k\}$，其中 $T_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为 A 的非空子集且 $\bigcup\limits_{i=1}^{k}T_i=A$，则称 $\mathscr{T}$ 是集合 A 的一个覆盖.若 $\mathscr{T}=\{T_1,T_2,\cdots,T_k\}$ 为集合 A 的一个覆盖且对任意的 $T_i,T_j\subseteq A$ 满足 $T_i\cap T_j=\varnothing(i\neq j)$，则称 $\mathscr{T}$ 为 A 的一个划分.

定义 2[22]　设 $|\psi\rangle\in S(\bigotimes\limits_{i=1}^{n}H_i)$.若存在 $|\psi_{T_i}\rangle\in S(H_{T_i})(i=1,2,\cdots,k)$，使得

$$|\psi\rangle=|\psi_{T_1}\rangle\otimes|\psi_{T_2}\rangle\otimes\cdots\otimes|\psi_{T_k}\rangle,\tag{1}$$

其中 $T_i\in\mathscr{T}$，$\mathscr{T}=\{T_i\}_{i=1}^{k}(k\geq 2)$ 是$[n]$的一个 k 划分，$\mathscr{T}_i=\{j_1^i,j_2^i,\cdots,j_{m_s}^i\}\subsetneqq[n]$，$H_{T_i}=H_{j_1^i}\otimes H_{j_2^i}\otimes\cdots\otimes H_{j_{m_s}^i}$ 且 $j_1^i<j_2^i<\cdots<j_{m_s}^i$，则称 $|\psi\rangle$ 关于划分 $\mathscr{T}$ 是 k 可分的，并且称 $|\psi\rangle$ 是 k 可分的量子纯态.

定义 3[22]　设 $\rho\in D(\bigotimes\limits_{i=1}^{n}H_i)$.若存在 k 可分纯态 $|\psi_i\rangle\in S(\bigotimes\limits_{i=1}^{n}H_i)$，使得

$$\rho=\sum_{i=1}q_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|,\tag{2}$$

其中 $|\psi_i\rangle$ 可以是不同划分下的 k 可分纯态且 $0\leq q_i\leq 1$，$\sum\limits_i q_i=1$，则称 ρ 是 k 可分的.若 ρ 是 n 可分的(即 $k=n$)，则称 ρ 是完全可分的或全可分的，简称 ρ 是可分态.

注 1　1)若 ρ 是可分态，则 ρ 一定是两可分的；若 ρ 是两可分的，则 ρ 不一定是可分的.

2)两可分的混合态不需要相对于 Hilbert 空间的任何特定划分是可分的.

定义 4[9-10]　设 $\rho\in D(\bigotimes\limits_{i=1}^{n}H_i)$.若 ρ 不是两可分的，则称态 ρ 是一个真多体纠缠的(Genuinely Multipartite Entangled，GME)，简称 GME 态.

由上面的定义可知，$|GHZ\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle+|111\rangle)$和$|W\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(|100\rangle+|010\rangle+|001\rangle)$都是GME 态.

定义 5　设 $\rho\in D(\bigotimes\limits_{i=1}^{n}H_i)$，$\mathscr{M}_i=\{M^{x_i}\}(i=1,2,\cdots,n)$ 为第 i 个系统 H_i 上的一组 POVM 测量，用

$$\mathscr{M}_1\otimes\mathscr{M}_2\otimes\cdots\otimes\mathscr{M}_n=\{M^{x_1}\otimes M^{x_2}\otimes\cdots\otimes M^{x_n}:x_i=1,2,\cdots,m_{H_i}\}$$

表示复合系统 $H_1\otimes H_2\otimes\cdots\otimes H_n$ 上的一个测量集合，其中

$$M^{x_1}\otimes M^{x_2}\otimes\cdots\otimes M^{x_n}=\{M_{a_1|x_1}\otimes M_{a_2|x_2}\otimes\cdots\otimes M_{a_n|x_n}:a_i=1,2,\cdots,O_{H_i}\},$$

记 $P(a_1a_2\cdots a_n|x_1x_2\cdots x_n)=\mathrm{Tr}[(\bigotimes\limits_{i=1}^{n}M_{a_i|x_i})\rho]$.若

$$P(a_1a_2\cdots a_n|x_1x_2\cdots x_n)=\sum_{T\subsetneqq[n]}\sum_{\lambda}q_T(\lambda)P_T(\{a_i\}_{i\in T}|\{x_i\}_{i\in T},\lambda)\times P_{\bar{T}}(\{a_i\}_{i\in\bar{T}}|\{x_i\}_{i\in\bar{T}},\lambda),\tag{3}$$

其中 $T\neq\varnothing$,$\overline{T}=[n]\backslash T$,$T$ 与 $\overline{T}$ 构成 Hilbert 空间 $\bigotimes_{i=1}^{n}H_i$ 的一个二划分,且对于任意的两个不同的二划分 $T_1\subset[n]$ 和 $T_2\subset[n]$,有 $T_1\neq\overline{T}_2$,$T_2\neq\overline{T}_1$,而且对于任意 λ,$0\leq q_T(\lambda)\leq 1$,$\sum_{T\subsetneq[n]}\sum_{\lambda}q_T(\lambda)=1$,则称 ρ 关于测量 $\mathscr{M}_1\otimes\mathscr{M}_2\otimes\cdots\otimes\mathscr{M}_n$ 是真多体局域的,并称 ρ 关于测量 $\mathscr{M}_1\otimes\mathscr{M}_2\otimes\cdots\otimes\mathscr{M}_n$ 是一个 GML(Genuine Multipartite Local,GML) 态.否则,称态 $\rho\in D(\bigotimes_{i=1}^{n}H_i)$ 关于测量 $\mathscr{M}_1\otimes\mathscr{M}_2\otimes\cdots\otimes\mathscr{M}_n$ 是真多体非局域态,简称是 GMNL(Genuine Multipartite Nonlocal,GMNL) 态.若对每一组测量 $\mathscr{M}_1\otimes\mathscr{M}_2\otimes\cdots\otimes\mathscr{M}_n$ 都有式(3)成立,则称 $\rho\in D(\bigotimes_{i=1}^{n}H_i)$ 是一个 GML 态.若存在一组测量 $\mathscr{M}_1\otimes\mathscr{M}_2\otimes\cdots\otimes\mathscr{M}_n$ 使得 ρ 关于这组测量不是 GML 态,则称态 $\rho\in D(\bigotimes_{i=1}^{n}H_i)$ 是一个 GMNL 态.

下面用 $\mathscr{GML}(\{\mathscr{M}_i\}_{i=1}^{n})$ 表示关于测量 $\mathscr{M}_1\otimes\mathscr{M}_2\otimes\cdots\otimes\mathscr{M}_n$ 是 GML 的所有态所构成的集合,$\mathscr{GMNL}(\{\mathscr{M}_i\}_{i=1}^{n})$ 表示关于测量 $\mathscr{M}_1\otimes\mathscr{M}_2\otimes\cdots\otimes\mathscr{M}_n$ 是 GMNL 的所有态所构成的集合;$\mathscr{GML}(\bigotimes_{i=1}^{n}H_i)$ 表示 n 体系统 $\bigotimes_{i=1}^{n}H_i$ 中所有 GML 态所构成的集合,$\mathscr{GMNL}(\bigotimes_{i=1}^{n}H_i)$ 表示 n 体系统 $\bigotimes_{i=1}^{n}H_i$ 中所有 GMNL 态所构成的集合. 由定义可知:

$$\mathscr{GML}(\bigotimes_{i=1}^{n}H_i)=\bigcap_{\{\mathscr{M}_i\}_{i=1}^{n}}\mathscr{GML}(\{\mathscr{M}_i\}_{i=1}^{n}),\mathscr{GMNL}(\bigotimes_{i=1}^{n}H_i)=\bigcup_{\{\mathscr{M}_i\}_{i=1}^{n}}\mathscr{GMNL}(\{\mathscr{M}_i\}_{i=1}^{n}).$$

定理 1 每一个两可分态都是 GML 态.

证明 设 $|\psi\rangle\in S(\bigotimes_{i=1}^{n}H_i)$.若 $|\psi\rangle$ 是两可分的,则存在 $|\psi_T\rangle\in S(H_T)$,$|\psi_{\overline{T}}\rangle\in S(H_{\overline{T}})$ 使得

$$|\psi\rangle=|\psi_T\rangle\otimes|\psi_{\overline{T}}\rangle$$

其中 $\mathscr{T}=\{T=\{j_1,j_2,\cdots,j_k\},\overline{T}=\{j_{k+1},j_{k+2},\cdots,j_n\}\}$ 是一个确定的二划分.此时 $|\psi\rangle$ 所对应的密度矩阵为 $\rho=|\psi\rangle\langle\psi|=|\psi_T\rangle|\psi_{\overline{T}}\rangle\langle\psi_T|\langle\psi_{\overline{T}}|=\rho_T\otimes\rho_{\overline{T}}$,对每一组测量 $\mathscr{M}_1\otimes\mathscr{M}_2\otimes\cdots\otimes\mathscr{M}_n$,有

$$P(a_1a_2\cdots a_n\mid x_1x_2\cdots x_n)=\mathrm{Tr}[(\bigotimes_{i=1}^{n}M_{a_i|x_i})\rho]=\mathrm{Tr}[(\bigotimes_{i=1}^{n}M_{a_i|x_i})(\rho_T\otimes\rho_{\overline{T}})]=$$

$$\mathrm{Tr}[(\bigotimes_{i=j_1}^{j_k}M_{a_i|x_i})_{i\in T}\rho_T]\mathrm{Tr}[(\bigotimes_{i=j_{k+1}}^{j_n}M_{a_i|x_i})_{i\in\overline{T}}\rho_{\overline{T}}]=P_T(\{a_i\}_{i\in T}\mid\{x_i\}_{i\in T})\times P_{\overline{T}}(\{a_i\}_{i\in\overline{T}}\mid\{x_i\}_{i\in\overline{T}}),$$

由定义 5 可知 $|\psi\rangle$ 是 GML 的.

下证两可分的混合态的情况.

设 $\rho=D(\bigotimes_{i=1}^{n}H_i)$.由定义 3 可知,若 ρ 是两可分的,则 $\rho=\sum_{i=1}q_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$.因为 $|\psi_j\rangle\in\{|\psi_i\rangle\}$ 可以是相对于不同划分的两可分纯态,所以根据 $|\psi_j\rangle$ 所属的不同划分,对 $\{|\psi_i\rangle\}$ 中的元素重新标号,记作 $\{\{|\psi_{(\lambda,\mathscr{T})}\rangle\}_{\lambda=1}^{r_{\mathscr{T}}}\}_{\mathscr{T}\in\{\mathscr{T}_t\}_{t=1}^{m}}$,其中 $\{\mathscr{T}_t\}_{t=1}^{m}$ 表示 $\{|\psi_i\rangle\}$ 中所有元素所属的二划分构成的集合,$\mathscr{T}=\{T=\{j_1,j_2,\cdots,j_k\},\overline{T}=\{j_{k+1},j_{k+2},\cdots,j_n\}\}$,$r_{\mathscr{T}}$ 表示取自划分 $\mathscr{T}$ 的 $|\psi_i\rangle$ 的个数,则上式可以改写为

$$\rho=\sum_{\mathscr{T}\in\{\mathscr{T}_t\}_{t=1}^{m}}\sum_{\lambda}^{r_{\mathscr{T}}}q_{\mathscr{T}_t}(\lambda)|\psi_{(\lambda,\mathscr{T})}\rangle\langle\psi_{(\lambda,\mathscr{T})}|=\sum_{T\subsetneq[n]}\sum_{\lambda}^{r_T}q_T(\lambda)|\psi_\lambda\rangle_T|\psi_\lambda\rangle_{\overline{T}}\langle\psi_\lambda|_T\langle\psi_\lambda|_{\overline{T}}=$$

$$\sum_{T\subsetneq[n]}\sum_{\lambda}^{r_T}q_T(\lambda)|\psi_\lambda\rangle_T\langle\psi_\lambda|_T\otimes|\psi_\lambda\rangle_{\overline{T}}\langle\psi_\lambda|_{\overline{T}}=\sum_{T\subsetneq[n]}\sum_{\lambda}^{r_T}q_T(\lambda)\rho_{(T,\lambda)}\otimes\rho_{\overline{T},\lambda},$$

其中 $q_{\mathscr{T}}(\lambda)=q_T(\lambda)$,$r_{\mathscr{T}}=r_T$,则 $\sum_{\mathscr{T}\in\{\mathscr{T}_t\}_{t=1}^{m}}\sum_{\lambda}^{r_{\mathscr{T}}}q_T(\lambda)=\sum_{T\subsetneq[n]}\sum_{\lambda}^{r_T}q_T(\lambda)=1$.对每一组测量 $\mathscr{M}_1\otimes\mathscr{M}_2\otimes\cdots\otimes\mathscr{M}_n$ 有

$$P(a_1a_2\cdots a_n\mid x_1x_2\cdots x_n)=\mathrm{Tr}[(\bigotimes_{i=1}^{n}M_{a_i|x_i})\rho]=\mathrm{Tr}[(\bigotimes_{i=1}^{n}M_{a_i|x_i})\sum_{T\subsetneq[n]}\sum_{\lambda}^{r_T}q_T(\lambda)\rho_{(T,\lambda)}\otimes\rho_{(\overline{T},\lambda)}]=\sum_{T\subsetneq[n]}\sum_{\lambda}^{r_T}q_T(\lambda)$$

$$\mathrm{Tr}[(\bigotimes_{i=1}^{n}M_{a_i|x_i})(\rho_{(T,\lambda)}\otimes\rho_{(\overline{T},\lambda)})]=\sum_{T\subsetneq[n]}\sum_{\lambda}^{r_T}q_T(\lambda)\mathrm{Tr}[(\bigotimes_{i=j_1}^{j_k}M_{a_i|x_i})_{i\in T}\rho_{(T,\lambda)}]\mathrm{Tr}[(\bigotimes_{i=j_{k+1}}^{j_n}M_{a_i|x_i})_{i\in\overline{T}}\rho_{(\overline{T},\lambda)}]=$$

$$\sum_{T\subsetneq[n]}\sum_{\lambda}^{r_T}q_T(\lambda)P_T(\{a_i\}_{i\in T}\mid\{x_i\}_{i\in T})\times P_{\overline{T}}(\{a_i\}_{i\in\overline{T}}\mid\{x_i\}_{i\in\overline{T}}),$$

由定义 5 知,$\rho = D(\bigotimes_{i=1}^{n} H_i)$ 是 GML 态. 这就证明了每一个两可分态都是 GML 态.证毕.

注 2 因为每一个两可分态都是 GML 态,所以 GMNL 态一定是 GME 态.

3 三类不能用来检测真多体非局域性的测量集合

对于复合量子系统 $H_A \otimes H_B \otimes H_C$ 中的量子态$\rho^{ABC} \in D(H_A \otimes H_B \otimes H_C)$,下面给出了三类不能用来检测真多体非局域性的测量集合.

定理 2 设 $M_A = \{M_a\}_{a=1}^{O_A}$、$M_B = \{M_b\}_{b=1}^{O_B}$、$M_C = \{M_c\}_{c=1}^{O_C}$ 分别是量子系统 H_A、H_B、H_C 上的一个 POVM 测量,则对任意的态 $\rho^{ABC} \in D(H_A \otimes H_B \otimes H_C)$ 关于测量组合 $M_A \otimes M_B \otimes M_C$ 都是 GML 态.

证明 对于任意的 $\rho^{ABC} \in D(H_A \otimes H_B \otimes H_C)$,有

$$\mathrm{Tr}[(M_a \otimes M_b \otimes M_c)\rho^{ABC}] = \mathrm{Tr}[((\sum_{i=1}^{O_A}\delta_{i,a}M_A^i) \otimes (\sum_{j=1}^{O_B}\delta_{j,b}M_B^j) \otimes (\sum_{k=1}^{O_C}\delta_{k,c}M_C^k))\rho^{ABC}] =$$
$$\sum_{i=1}^{O_A}\sum_{j=1}^{O_B}\sum_{k=1}^{O_C}\delta_{i,a}\delta_{j,b}\delta_{k,c}\mathrm{Tr}[(M_A^i \otimes M_B^j \otimes M_C^k)\rho^{ABC}].$$

定义双射 $f:[O_A]\times[O_B]\times[O_C] \to [O_AO_BO_C]$,且

$$q_\lambda := \mathrm{Tr}[(M_A^i \otimes M_B^j \otimes M_C^k)\rho^{ABC}], P_A(a \mid M_A,\lambda) := \delta_{i,a}, P_{BC}(bc \mid M_BM_C,\lambda) := \delta_{j,b}\delta_{k,c},$$

其中 $\lambda = f(i,j,k)$,且 $\sum_{\lambda}^{O_AO_BO_C} q_\lambda = 1$,$\sum_{a=1}^{O_A} P_A(a \mid M_A,\lambda) = 1$,$\sum_{b=1}^{O_B}\sum_{c=1}^{O_C} P_{BC}(bc \mid M_BM_C,\lambda) = 1$.因此对所有的 a、b、c 有 $\mathrm{Tr}[(M_a \otimes M_b \otimes M_c)\rho^{ABC}] = \sum_{\lambda}^{O_AO_BO_C} q_\lambda P_A(a \mid M_A,\lambda)P_{BC}(bc \mid M_BM_C,\lambda)$,从而由定义 5 知,$\rho^{ABC}$ 关于测量 $M_A \otimes M_B \otimes M_C$ 是一个 GML 态. 证毕.

定义 6[23] 设 $\mathscr{M}_H = \{\{M_{h|x}\}_{h=1}^{O_H}: x \in [m_H]\} \subset B(H)$ 为量子系统 H 上的一组 POVM 测量.若存在概率分布$\{P_H(h \mid x,\lambda)\}_{h=1}^{O_H}$ 以及系统 H 上的一个 POVM 测量$\{G_\lambda\}_{\lambda=1}^{t}$,使得

$$M_{h|x} = \sum_{\lambda=1}^{t} P_H(h \mid x,\lambda)G_\lambda, \forall h \in [O_H], x \in [m_H], \tag{4}$$

则称 $\mathscr{M}_H$ 是相容的(Compatible).

定理 3 设 $\mathscr{M}_A = \{M^x\}_{x=1}^{m_A}$、$\mathscr{M}_B = \{M^y\}_{y=1}^{m_B}$、$\mathscr{M}_C = \{M^z\}_{z=1}^{m_C}$ 分别为量子系统 H_A、H_B、H_C 上的一个相容的 POVM 测量组合,其中 $M^x = \{M_{a|x}\}_{a=1}^{O_A}$、$M^y = \{M_{b|y}\}_{b=1}^{O_B}$、$M^z = \{M_{c|z}\}_{c=1}^{O_C}$,则对任意的态 $\rho^{ABC} \in D(H_A \otimes H_B \otimes H_C)$ 关于测量组合 $\mathscr{M}_A \otimes \mathscr{M}_B \otimes \mathscr{M}_C$ 都是 GML 态.

证明 由于测量组合 $\mathscr{M}_A$、$\mathscr{M}_B$、$\mathscr{M}_C$ 都是相容的,因此一定存系统 H_A 上的一个 POVM 测量 $X = \{X_k\}_{k=1}^{r_A}$ 使得 $M_{a|x} = \sum_{k=1}^{r_A} f_A(a \mid x,k)X_k, \forall a \in [O_A], x \in [m_A]$,其中$\{f_A(a \mid x,k)\}_{a=1}^{O_A}$ 是关于每一个 $k \in [r_A]$ 和 $x \in [m_A]$ 的概率分布.类似的,分别存在系统 H_B、H_C 上的一个 POVM 测量 $Y = \{Y_q\}_{q=1}^{r_B}$ 和 $Z = \{Z_h\}_{h=1}^{r_C}$ 使得

$$M_{b|y} = \sum_{q=1}^{r_B} f_B(b \mid y,q)Y_q, \forall b \in [O_B], y \in [m_B],$$
$$M_{c|z} = \sum_{h=1}^{r_C} f_C(c \mid z,h)Z_h, \forall c \in [O_C], z \in [m_C],$$

从而 $\forall \rho^{ABC} \in D(H_A \otimes H_B \otimes H_C)$,有

$$P(abc \mid xyz) = \mathrm{Tr}[(M_{a|x} \otimes M_{b|y} \otimes M_{c|z})\rho^{ABC}] = \mathrm{Tr}[(\sum_{k=1}^{r_A} f_A(a \mid x,k)X_k \otimes \sum_{q=1}^{r_B} f_B(b \mid y,q)Y_q \otimes$$
$$\sum_{h=1}^{r_C} f_C(c \mid z,h)Z_h)\rho^{ABC}] = \sum_{k=1}^{r_A}\sum_{q=1}^{r_B}\sum_{h=1}^{r_C} f_A(a \mid x,k)f_B(b \mid y,q)f_C(c \mid z,h)\mathrm{Tr}[(X_k \otimes Y_q \otimes Z_h)\rho^{ABC}].$$

定义双射 $f:[r_A]\times[r_B]\times[r_C]\rightarrow[r_Ar_Br_C]$，且

$$\pi_\lambda := \mathrm{Tr}[(X_k\otimes Y_q\otimes Z_h)\rho^{ABC}], P_A(a\mid x,\lambda) := f_A(a\mid x,k), P_{BC}(bc\mid yz,\lambda) := f_B(b\mid y,q)f_C(c\mid z,h),$$

其中 $\lambda=f(k,q,h)$，并且 $\sum_{\lambda}^{r_Ar_Br_C}\pi_\lambda=1,\sum_{a=1}^{O_A}P_A(a\mid x,\lambda)=1,\sum_{b=1}^{O_B}\sum_{c=1}^{O_C}P_{BC}(bc\mid yz,\lambda)=1$.因此对所有的 x、y、z、a、b、c 有 $P(abc\mid xyz)=\sum_{\lambda=1}^{r_Ar_Br_C}\pi_\lambda P_A(a\mid x,\lambda)P_{BC}(bc\mid yz,\lambda)$.从而由定义 5 知，$\rho^{ABC}$ 关于测量组合 $\mathscr{M}_A\otimes\mathscr{M}_B\otimes\mathscr{M}_C$ 是一个 GML 态. 证毕.

定理 4 可交换的测量组合一定是相容的.

证明 设 $\mathscr{M}_A=\{M^x\}_{x=1}^{m_A}$ 是量子系统 H_A 上的一个可交换的测量组合，其中 $M^x=\{M_{a|x}\}_{a=1}^{O_A}$.那么 $\mathscr{M}_A$ 满足 $[M_{a|x},M_{a'|x'}]=0,\forall a,a'\in[O_A],x,x'\in[m_A]$，即存在 H_A 上的一组正规正交基 $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{d_A}$ 使得测量组合 $\mathscr{M}_A$ 中的所有算子 $M_{a|x}(x\in[m_A],a\in[O_A])$ 在这组基下可同时对角化.所以，对 $\mathscr{M}_A$ 中的每一个算子 $M_{a|x}$ 有

$$M_{a|x}=\sum_{i=1}^{d_A}c_i^{a|x}\mid e_i\rangle\langle e_i\mid,\forall x\in[m_A],a\in[O_A],$$

其中 $c_i^{a|x}$ 是 $M_{a|x}$ 的特征值.因此 $c_i^{a|x}\geq 0$ 且 $\sum_{a=1}^{O_A}c_i^{a|x}=\sum_{a=1}^{O_A}\langle e_i\mid M_{a|x}\mid e_i\rangle=\langle e_i\mid e_i\rangle=1,\forall x\in[m_A],i\in[d_A]$.因为 $\{|e_i\rangle\langle e_i|\}_{i=1}^{d_A}$ 是系统 H_A 上的一个 POVM 测量(事实上是一个投影测量)，所以由定义 6 可知，$\mathscr{M}_A$ 是系统 H_A 上的一个相容的测量组合. 证毕.

结合定理 3 和定理 4 就有下面这个结论：

定理 5 设 $\mathscr{M}_A=\{M^x\}_{x=1}^{m_A}$、$\mathscr{M}_B=\{M^y\}_{y=1}^{m_B}$、$\mathscr{M}_C=\{M^z\}_{z=1}^{m_C}$ 分别为量子系统 H_A、H_B、H_C 上的一个可交换的测量组合，其中 $M^x=\{M_{a|x}\}_{a=1}^{O_A}$、$M^y=\{M_{b|y}\}_{b=1}^{O_B}$、$M^z=\{M_{c|z}\}_{c=1}^{O_C}$，则对任意的态 $\rho^{ABC}\in D(H_A\otimes H_B\otimes H_C)$ 关于测量组合 $\mathscr{M}_A\otimes\mathscr{M}_B\otimes\mathscr{M}_C$ 都是 GML 态.

定理 2、定理 3 和定理 4 说明单个的 POVM 测量所组成的测量组合、相容的测量所组成的测量组合和可交换的测量所组成的测量组合不能用来检测量子态的 GMNL 性，在这样的测量下，所有的多体态都表现出 GML 性.

4 结 论

本文主要基于真多体纠缠态的定义，给出了真多体非局域性的数学定义，证明了两可分态都是真多体局域态，进而说明了真多体非局域态都是真多体纠缠态.还证明了单个的 POVM 测量所组成的测量集合、相容的测量所组成的测量集合以及可交换的测量所组成的测量集合不能用来检测量子态的真多体非局域性质.

参 考 文 献

[1] GISIN N，RIBORDY G，TITTEL W，et al.Quantum cryptography[J].Reviews of Modern Physics，2002，74(1)：145-195.

[2] PIRANDOLA S，ANDERSEN U L，BANCHI L，et al.Advances in quantum cryptography[J].Advances in Optics and Photonics，2020，12(4)：1012-1236.

[3] ACÍN A，MASANES L.Certified randomness in quantum physics[J].Nature，2016，540(7632)：213-219.

[4] BUHRMAN H，CLEVE R，MASSAR S，et al.Nonlocality and communication complexity[J].Reviews of Modern Physics，2010，82(1)：665-698.

[5] GISIN N.Bell's inequality holds for all non-product states[J].Physics Letters A，1991，154(5/6)：201-202.

[6] GISIN N，PERES A.Maximal violation of Bell's inequality for arbitrarily large spin[J].Physics Letters A，1992，162(1)：15-17.

[7] CAO H X，GUO Z H.Characterizing bell nonlocality and EPR steering[J].Science China Physics，Mechanics & Astronomy，2018，62(3)：1-14.

[8] SVETLICHNY G.Distinguishing three-body from two-body nonseparability by a Bell-type inequality[J].Physical Review D，1987，35(10)：3066-3069.

[9] MA Z H,CHEN Z H,CHEN J L,et al.Measure of genuine multipartite entanglement with computable lower bounds[J].Physical Review A,2011,83(6):062325.
[10] GAO T,HONG Y.Detection of genuinely entangled and nonseparable n-partite quantum states[J].Physical Review A,2010,82(6):062113.
[11] SEEVINCK M,SVETLICHNY G.Bell-type inequalities for partial separability in N-particle systems and quantum mechanical violations[J].Physical Review Letters,2002,89(6):060401.
[12] COLLINS D,GISIN N,POPESCU S,et al.Bell-type inequalities to detect true n-body nonseparability[J].Physical Review Letters,2002,88(17):170405.
[13] GALLEGO R,WÜRFLINGER L E,ACÍN A,et al.Operational framework for nonlocality[J].Physical Review Letters,2012,109(7):070401.
[14] BANCAL J D,BARRETT J,GISIN N,et al.Definitions of multipartite nonlocality[J].Physical Review A,2013,88:014102.
[15] CHEN Q,YU S X,ZHANG C J,et al.Test of genuine multipartite nonlocality without inequalities[J].Physical Review Letters,2014,112(14):140404.
[16] ZHANG C,HUANG Y F,WANG Z,et al.Experimental greenberger-horne-zeilinger-type six-photon quantum nonlocality[J].Physical Review Letters,2015,115(26):260402.
[17] CONTRERAS-TEJADA P,PALAZUELOS C,DE VICENTE J I.Genuine multipartite nonlocality is intrinsic to quantum networks[J].Physical Review Letters,2021,126(4):040501.
[18] 吕晓乐,陈峥立,牛梦斐.关于 Markov 量子态的一些刻画[J].山东大学学报(理学版),2021,56(2):28-33.
LYU X L,CHEN Z L,NIU M F.Some characterizations of Markov quantum states[J].Journal of Shandong University(Natural Science),2021,56(2):28-33.
[19] 张强强,陈峥立,袁凤茹.无偏基测量的可导引性[J].山东大学学报(理学版),2019,54(10):121-126.
ZHANG Q Q,CHEN Z L,YUAN F R.Quantum steering of mutually unbiased measurements[J].Journal of Shandong University(Natural Science),2019,54(10):121-126.
[20] ALI M I,CAO H X.Partial steerability and nonlocality of multipartite quantum states[J].International Journal of Theoretical Physics,2021,60(7):2543-2557.
[21] DONG Z Z,YANG Y,CAO H X.Detecting bell nonlocality based on the hardy paradox[J].International Journal of Theoretical Physics,2020,59(5):1644-1656.
[22] GAO T,HONG Y,LU Y,et al.Efficient k-separability criteria for mixed multipartite quantum states[J].EPL(Europhysics Letters),2013,104(2):20007.
[23] 肖书,郭志华,曹怀信.三体量子系统的量子导引方案[J].中国科学:物理学 力学 天文学,2019,49(1):5-19.
XIAO S,GUO Z H,CAO H X.Quantum steering in tripartite quantum systems[J].Scientia Sinica(Physica,Mechanica & Astronomica),2019,49(1):5-19.

Researches on genuine multipartite nonlocality of quantum states

Chen Zhengli, Cheng Jinglin

(School of Mathematics and Statistics, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, China)

Abstract: Based on the definition and properties of genuine multipartite entanglement, we introduce the definition of genuine multipartite nonlocality of quantum states. Then we discuss the relationship between the genuine multipartite nonlocality and the genuine multipartite entanglement of quantum states. At the same time, we give three kinds of measurement sets which cannot be used to detect the genuine multipartite nonlocality of quantum states.

Keywords: genuine multipartite nonlocality; genuine multipartite entanglement; quantum state

[责任编校 杨浦 刘洋]