正交试验设计

1 正交试验设计的概念及原理

2 正交试验设计的基本程序

3 正交试验的结果分析

3.1 极差分析

3.2 方差分析

所选正交表应留出空列。

当无空列时，应进行重复试验，

以估计试验误差。

表 石墨炉原子吸收分光光度法测定食品中铅含量吸光度研究试验结果分析

试验号	A	B	A×B	C	A×C	B×C	空列	吸光度
1	1	1	1	1	1	1	1	2.42
2	1	1	1	2	2	2	2	2.24
3	1	2		1	1	2	2	2.66
4	1	2					1	2.58
5	2	1					2	2.36
6	2	1	2	2	1	2	1	2.4
7	2	2	1	1	2	2	1	2.79
8	2	2	1	2	1	1	2	2.76

$$S_e^2 = \frac{0.0036}{1} = 0.0036$$

- “空列”并不空，实际上是被未考察的交互作用所占据。
- 这种误差既包含试验误差，也包含交互作用，称为**模型误差**。

误差项的分析

- 若交互作用不存在，用模型误差估计试验误差是可行的；
- 若因素间存在交互作用，则模型误差会夸大试验误差，有可能掩盖考察因素的显著性。
- 这时，试验误差应通过**重复**试验值来估计。
- 所以，进行正交试验最好能有2次以上的重复。
- 正交试验的重复，可采用完全随机或随机单位组设计。

3.2.3 重复试验的方差分析

- 正交表的各列都已安排满因素或交互作用，没有空列，为了估计试验误差和进行方差分析，需要进行重复试验；
- 正交表的列虽未安排满，但为了提高统计分析精确性和可靠性，往往也进行重复试验。

3.2.3 重复试验的方差分析

- 重复试验，就是在安排试验时，将同一处理试验重复若干次，从而得到同一条件下的若干次试验数据，从重复中找到误差项的估计。

- 重复试验的方差分析与无重复试验的方差分析没有本质区别，除误差平方和、自由度的计算有所不同，其余各项计算基本相同。

实例分析5

在粒粒橙果汁饮料生产中，脱囊衣处理是关键工艺。

为寻找酸碱二步处理法的最优工艺条件，安排4因素4水平正交试验。

表1 粒粒橙果法试验因素水平表

水平	试验因素			
	NaOH% A	$Na_5P_3O_{10}$ % B	处理时间 min C	处理温度℃ D
1	0.3	0.2	1	30
2	0.4	0.3	2	40
3	0.5	0.4	3	50
4	0.6	0.5	4	60

脱囊衣质量根据囊衣是否脱落彻底、破坏率高低、汁胞饱满度等感官指标综合评分，满分为10分。

表2 粒粒橙果法试验试验方案及结果表

表头设计	A	B	C	D	空列	试验指标
处理号	1	2	3	4	5	I
1	1	1	1	1	1	2
			2	2	2	4
			3	3	3	5.5
			4	4	4	6
			2	3	4	6.3
			1	4	3	5.1
			4	1	2	7
			3	2	1	8
			3	4	2	7
			4	3	1	8.4
			1	2	4	6.5
			2	1	3	7
			4	2	3	5
14	4	2	3	1	4	6
			2	4	1	8.5
			1	3	2	7

$$SS_1=SS_A=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}K_{i1}^2-C$$

$$SS_2=SS_B=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}K_{i2}^2-C$$

$$SS_3=SS_C=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}K_{i3}^2-C$$

$$SS_4=SS_D=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}K_{i4}^2-C$$

$$SS_5=SS_e=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}K_{i5}^2-C$$

$$T=\sum_{i=1}^{n}x_i \qquad C=\frac{T^2}{n}$$

$$SS_T=\sum_{i=1}^{n}x^2-C$$

$$SS_j=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{m}K_{ij}^2-C$$

$$df_A=df_B=df_C=df_D=df_e=3$$

为提高试验的可靠性，每个处理的试验重复3次。

表3 粒粒橙果法试验试验方案及结果表

表头设计	A	B	C	D	空列	试验指标			
处理号	1	2	3	4	5	I	II	III	和
1	1	1	1	1	1	2	2	2	6.0
						4	4.5	4	12.5
						5.5	6	6	17.5
						6	6.5	6.7	19.2
						6.3	6.5	6.7	19.5
						5.1	4.8	4.6	14.5
7	2	3	4	1	2	7	7.4	7.2	21.6
8	2	4	3	2	1				
9			3	4	2				
10			4	3	1				
11	3	3	1	2	4				
12	3	4	2	1	3				
13	4	1	4	2	3				
14	4	2	3	1	4				
15	4	3	2	4	1	8.5	8.5	8.7	25.7
16	4	4	1	3	2	7	6.5	6.9	20.4

在无重复的试验中，

空列的离差平方和作为误差的平方和。

第一类误差平方和

整个试验的组内平方和，

反映了试验误差的大小，

是局部误差

第二类误差平方和

原则上，第一类误差不能用来检验因子和交互作用各水平之间的显著差异。

为提高试验的可靠性，每个处理的试验重复3次。

表3 粒粒橙果法试验试验方案及结果表

表头设计	A	B	C	D	空列	试验指标			
处理号	1	2	3	4	5	I	II	III	和
1	1	1	1	1	1	2	2	2	6.0
					2	4	4.5	4	12.5
					3	5.5	6	6	17.5
					4	6	6.5	6.7	19.2
					4	6.3	6.5	6.7	19.5
6	2	2	1	4	3	5.1	4.8	4.6	14.5
7	2	3	4	1	2	7	7.4	7.2	21.6
8	2	4	3	2	1				
9			3	4	2				
10			4	3	1				
11			1	2	4				
12	3	4	2	1	3				
13	4	1	4	2	3				
14	4	2	3	1	4				
15	4	3	2	4	1	8.5	8.5	8.7	25.7
16	4	4	1	3	2	7	6.5	6.9	20.4

在无重复的试验中，空列的离差平方和作为误差的平方和。

第一类误差平方和

整个试验的组内平方和，

反映了试验误差的大小，

是局部误差

第二类误差平方和

如果两类误差间没有显著差异，可将他们合并，作为试验误差。

为提高试验的可靠性，每个处理的试验重复3次。

表3 粒粒橙果法试验试验方案及结果表

表头设计	A	B	C	D	空列	试验指标			
处理号	1	2	3	4	5	I	II	III	和
1	1	1	1	1	1	2	2	2	6.0
					2	4	4.5	4	12.5
					3	5.5	6	6	17.5
					4	6	6.5	6.7	19.2
					4	6.3	6.5	6.7	19.5
6	2	2	1	4	3	5.1	4.8	4.6	14.5
7	2	3	4	1	2	7	7.4	7.2	21.6
8	2	4	3	2	1				
9			3	4	2				
10			4	3	1				
11			1	2	4				
12	3	4	2	1	3				
13	4	1	4	2	3				
14	4	2	3	1	4				
15	4	3	2	4	1	8.5	8.5	8.7	25.7
16	4	4	1	3	2	7	6.5	6.9	20.4

在无重复的试验中，空列的离差平方和作为误差的平方和。

第一类误差平方和

整个试验的组内平方和，

反映了试验误差的大小，

是局部误差

第二类误差平方和

如果两类误差间有显著差异，应当用第二类误差作为误差项，

检验各因子以及交互作用各水平是否差异显著。

表3 粒粒橙果法试验试验方案及结果表

表头设计	A	B	C	D	空列	试验指标			
处理号	1	2	3	4	5	I	II	III	和
1	1	1	1	1	1	2	2	2	6.0
2	1	2	2	2	2	4	4.5	4	12.5
3	1	3	3	3	3	5.5	6	6	17.5
4	1	4	4	4	4	6	6.5	6.7	19.2
5	2	1	2	3	4	6.3	6.5	6.7	19.5
6	2	2	1	4	3	5.1	4.8	4.6	14.5
7	2	3	4	1	2	7	7.4	7.2	21.6
8	2	4	3	2	1	8	8.5	8.7	25.2
9	3	1	3	4	2	7	7.1	7.3	21.4
10	3	2	4	3	1	8.4	8.5	8.9	25.8
11	3	3	1	2	4	6.5	6.3	6.1	18.9
12	3	4	2	1	3	7	7.3	7.1	21.4
13	4	1	4	2	3	5	4.5	4.7	14.2
14	4	2	3	1	4	6	6.5	6.7	19.2
15	4	3	2	4	1	8.5	8.5	8.7	25.7
16	4	4	1	3	2	7	6.5	6.9	20.4
K_{1j}	5[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]				
K_{2j}	8[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]				
K_{3j}	8[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]				
K_{4j}	7[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]				
K_{1j}^2	30[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]				
K_{2j}^2	65[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]				
K_{3j}^2	7656.25	7005.69	6938.89	6922.24	4569.76				
K_{4j}^2	6320.25	7430.44	6528.64	6528.64	5898.24				

(1) 假设每号试验重复数为*s*，

- 在计算K_{1j}，K_{2j}，…，K_{mj}时，
- 是以各号试验下"*s*个试验数据之和"进行计算。

表3 粒粒橙果法试验试验方案及结果表

(2) 总平方和与自由度

$$SS_T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{s} x_{it}^2 - \frac{T^2}{ns}$$

$$df_T = ns - 1$$

$$T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{s} x_{it}$$

表头设计	A	B	C	D	空列	试验指标			
				4	5	I	II	III	和
				1	1	2	2	2	6.0
2	1	2	2	2	2	4	4.5	4	12.5
3					3	5.5	6	6	17.5
4					4	6	6.5	6.7	19.2
5					4	6.3	6.5	6.7	19.5
6					3	5.1			
7					2	7			
8					1	8			
9					2	7			
10					1	8.4	8.5	8.9	25.8
11					4	6.5	6.3	6.1	18.9
12	3	4	2	1	3	7	7.3	7.1	21.4
13	4	1	4	2	3	5	4.5	4.7	14.2
14	4	2	3	1	4	6	6.5	6.7	19.2
15	4							8.7	25.7
16	4							6.9	20.4
K_{1j}	55.2								
K_{2j}	80.8								
K_{3j}	87.5								
K_{4j}	79.5								
K_{1j}^2	3047.04								
K_{2j}^2	6528.64	5184	6256.81	5012.64	5760.81				
K_{3j}^2	7656.25	7005.69	6938.89	6922.24	4569.76				
K_{4j}^2	6320.25	7430.44	6528.64	6528.64	5898.24				

式中，***n***—正交表试验号

s—各号试验重复数

x_{it}—第***i***号试验第***t***次重复试验数据

T—所有试验数据之和（包括重复试验）

表3 粒粒橙果法试验试验方案及结果表

表头设计	A	B	C	D	空列	试验指标			
处理号	1	2	3	4	5	I	II	III	和
1	1	1	1	1	1	2	2	2	6.0
2	1	2	2	2	2	4	4.5	4	12.5
3	1	3	3	3	3	5.5	6	6	17.5
					4	6	6.5	6.7	19.2
					4	6.3	6.5	6.7	19.5
6	2	2	1	4	3	5.1	4.8	4.6	14.5
7	2	3	4	1	2	7	7.4	7.2	21.6
8	2	4	3	2	1	8	8.5	8.7	25.2
9	3	1	3	4	2	7	7.1	7.3	21.4
10	3	2	4	3	1	8.4	8.5	8.9	25.8
11	3	3	1	2	4	6.5	6.3	6.1	18.9
12	3	4	2	1	3	7	7.3	7.1	21.4
13	4	1	4						14.2
14	4	2	3						19.2
15	4	3	2						25.7
16	4	4	1						20.4
K_{1j}	55.2	61.1	59.8						
K_{2j}	80.8	72	79.1						
K_{3j}	87.5	83.7	83.3						
K_{4j}	79.5	86.2	80.8						
K_{1j}^2	3047.04	3733.21	3576.04	4651.24	6839.29				
K_{2j}^2	6528.64	5184	6256.81	5012.64	5760.81				
K_{3j}^2	7656.25	7005.69	6938.89	6922.24	4569.76				
K_{4j}^2	6320.25	7430.44	6528.64	6528.64	5898.24				

(3) 各列平方和与自由度

$$SS_j = \frac{1}{rs}\sum_{j=1}^{m} K_{ij}^2 - \frac{T^2}{ns}$$

$$df_j = m - 1$$

表3 粒粒橙果法试验试验方案及结果表

表头设计	A	B	C	D	空列	试验指标			
处理号	1	2	3	4	5	I	II	III	和
1	1	1	1	1	1	2	2	2	6.0
2	1	2	2	2	2	4	4.5	4	12.5
3	1	3	3	3	3	5.5	6	6	17.5
4	1	4	4	4	4	6	6.5	6.7	19.2
5	2	1	2	3	4	6.3	6.5	6.7	19.5
							4.8	4.6	14.5
							7.4	7.2	21.6
							8.5	8.7	25.2
							7.1	7.3	21.4
							8.5	8.9	25.8
11	3	3	1	2	4	6.5	6.3	6.1	18.9
12	3	4	2	1	3	7	7.3	7.1	21.4
13	4	1	4					4.7	14.2
14	4	2	3					6.7	19.2
15	4	3	2					8.7	25.7
16	4	4	1	3	2	7	6.5	6.9	20.4
K_{1j}	55.2	61.1	59.8	68.2	82.7				
K_{4j}	79.5	86.2	80.8	80.8					
K_{1j}^2	3047.04	3733.21	3576.04	4651.					
K_{2j}^2	6528.64	5184	6256.81	5012.					
K_{3j}^2	7656.25	7005.69	6938.89	6922.24	4569.76				
K_{4j}^2	6320.25	7430.44	6528.64	6528.64	5898.24				

（4）重复试验时，总误差平方和包括空列误差SS_{e1}和重复试验误差SS_{e2}，即

$$SSe = SSe_1 + SSe_2$$

自由度dfe等于df_{e1}和df_{e2}之和，即

$$dfe = dfe_1 + dfe_2$$

表3 粒粒橙果法试验试验方案及结果表

表头设计	A	B	C	D	空列	试验指标			
处理号	1	2	3	4	5	I	II	III	和
1	1	1	1	1	1	2	2	2	6. 0
2	1	2	2	2	2	4	4. 5	4	12. 5
3	1	3	3	3	3	5. 5	6	6	17. 5
4	1	4	4	4	4	6	6. 5	6. 7	19. 2
5	2	1	2	3	4	6. 3	6. 5	6. 7	19. 5
6	2	2	1	4	3	5. 1	4. 8	4. 6	14. 5
7	2	3	4	1	2	7	7. 4	7. 2	21. 6
8	2	4	3	2	1	8	8. 5	8. 7	25. 2
9	3	1	3	4	2	7	7. 1	7. 3	21. 4
10	3	2	4	3	1	8. 4	8. 5	8. 9	25. 8
11	3	3	1	2	4	6. 5	6. 3	6. 1	18. 9
12	3	4	2	1	3	7	7. 3	7. 1	21. 4
13	4	1	4	2	3	5	4. 5	4. 7	14. 2
14	4	2	3	1	4	6	6. 5	6. 7	19. 2
15	4	3	2	4	1	8. 5	8. 5	8. 7	25. 7
16	4	4	1	3	2	7	6. 5	6. 9	20. 4

SS_{e2}和df_{e2}的计算公式如下：

$$SS_{e_2} = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{s} x_{it}^2 - C\right) - \left(\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{t=1}^{s} x_{ij}\right)^2 - C\right)$$

$$df_{e_2} = n(s-1)$$

（5）重复试验时，用 $MSe=\frac{SSe}{dfe}$ 检验各因素及其交互作用的显著性。

当正交表各列都已排满时，可用 $MSe_2=\frac{SSe_2}{dfe_2}$ 来检验显著性。

实例分析5

在粒粒橙果汁饮料生产中，脱囊衣处理是关键工艺。

为寻找酸碱二步处理法的最优工艺条件，安排**4**因素**4**水平正交试验。

表**1** 粒粒橙果法试验因素水平表

水平	试验因素			
	NaOH% A	$Na_5P_3O_{10}$ % B	处理时间 min C	处理温度℃ D
1	0. 3	0. 2	1	30
2	0. 4	0. 3	2	40
3	0. 5	0. 4	3	50
4	0. 6	0. 5	4	60

为了提高试验的可靠性，每个处理重复三次。

脱囊衣质量根据囊衣是否脱落彻底、破坏率高低、汁胞饱满度等感官指标综合评分，满分为**10**分。

表3 粒粒橙果法试验试验方案及结果表

处理号	A	B	C	D	空列	试验指标			
	1	2	3	4	5	I	II	III	和
1	1	1	1	1	1	2	2	2	6.0
2	1	2	2	2	2	4	4.5	4	12.5
3	1	3	3	3	3	5.5	6	6	17.5
4	1	4	4	4	4	6	6.5	6.7	19.2
5	2	1	2	3	4	6.3	6.5	6.7	19.5
6	2	2	1	4	3	5.1	4.8	4.6	14.5
7	2	3	4	1	2	7	7.4	7.2	21.6
8	2	4	3	2	1	8	8.5	8.7	25.2
9	3	1	3	4	2	7	7.1	7.3	21.4
10	3	2	4	3	1	8.4	8.5	8.9	25.8
11	3	3	1	2	4	6.5	6.3	6.1	18.9
12	3	4	2	1	3	7	7.3	7.1	21.4
13	4	1	4	2	3	5	4.5	4.7	14.2
14	4	2	3	1	4	6	6.5	6.7	19.2
15	4	3	2	4	1	8.5	8.5	8.7	25.7
16	4	4	1	3	2	7	6.5	6.9	20.4

表4 粒粒橙果法试验试验方案及结果分析表

表头设计	A	B	C	D	空列	试验指标			
处理号	1	2	3	4	5	I	II	III	和
1	1	1	1	1	1	2	2	2	6.0
2	1	2	2	2	2	4	4.5	4	12.5
3	1	3	3	3	3	5.5	6	6	17.5
4	1	4	4	4	4	6	6.5	6.7	19.2
5	2	1	2	3	4	6.3	6.5	6.7	19.5
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3	5.1	4.8	4.6	14.5
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2	7	7.4	7.2	21.6
8	2	4	3	2	1	8	8.5	8.7	25.2
9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	7	7.1	7.3	21.4
10	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	8.5	8.9	25.8
11	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	6.3	6.1	18.9
12	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	7	7.3	7.1	21.4
13	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	5	4.5	4.7	14.2
14	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	6	6.5	6.7	19.2
15	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	8.5	8.7	25.7
16	4	4	1	3	2	7	6.5	6.9	20.4
K_{1j}	55.2	61.1	59.8	68.2	82.7				
K_{2j}	80.8	72	79.1	70.8	75.9				
K_{3j}	87.5	83.7	83.3	83.2	67.6				
K_{4j}	79.5	86.2	80.8	80.8	76.8				
K_{1j}^2	3047.04	3733.21	3576.04	4651.24	6839.29				
K_{2j}^2	6528.64	5184	6256.81	5012.64	5760.81				
K_{3j}^2	7656.25	7005.69	6938.89	6922.24	4569.76				
K_{4j}^2	6320.25	7430.44	6528.64	6528.64	5898.24				

（1）计算各列各水平K值

$$K_{11} = 6 + 12.5 + 17.5 + 19.2 = 55.2$$

$$K_{21} = 19.5 + 14.5 + 21.6 + 25.2 = 80.8$$

$$\cdots$$

$$K_{45} = 19.2 + 19.5 + 18.9 + 19.2 = 76.8$$

$$T = 303$$

（2）计算各列偏差平方和及其自由度

表头设计	A	B	C	D	空列	试验指标			
处理号	1	2	3	4	5	I	II	III	和
1	1	1	1	1	1	2	2	2	6.0
2	1	2	2	2	2	4	4.5	4	12.5
						5.5	6	6	17.5
						6	6.5	6.7	19.2
						6.3	6.5	6.7	19.5
6	2	2	1	4	3	5.1	4.8	4.6	14.5
7	2	3	4	1	2	7	7.4	7.2	21.6
								8.7	25.2
								7.3	21.4
								8.9	25.8
								6.1	18.9
								7.1	21.4
								4.7	14.2
								6.7	19.2
								8.7	25.7
16	4	4	1	3	2	7	6.5	6.9	20.4
K_{1j}	55.2	61.1	59.8	68.2	82.7				
K_{1j}^2	3047.04	3733.21	3576.04	4651.24	6839.29				
K_{4j}	6320.25	7430.44	6528.64	6528.64	5898.24				

$$SS_j=\frac{1}{rs}\sum_{j=1}^{m}K_{ij}^2-\frac{T^2}{ns}=\frac{1}{4\times3}\sum_{j=1}^{m}K_{ij}^2-\frac{303^2}{16\times3}$$

$$=\frac{1}{12}\sum_{j=1}^{m}K_{ij}^2-1912.69$$

$$SS_A=SS_1=\frac{1}{12}(3047.04+\ldots+6320.25)-1912.69=49.99$$

同理可计算$SS_B=SS_2=33.42$，$SS_C=29.01$，$SS_D=13.54$，$SS_{e1}=9.65$

表头设计	A	B	C	D	空列	试验指标			
处理号	1	2	3	4	5	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	和
1	1	1	1	1	1	2	2	2	6.0
2	1	2	2	2	2	4	4.5	4	12.5
3	1	3	3	3	3	5.5	6	6	17.5
4	1	4	4	4	4	6	6.5	6.7	19.2

$$SS_{e_2}=\sum_{i=1}^{16}\sum_{t=1}^{3}x_{it}^2-\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{16}(\sum_{t=1}^{3}x_{ij})^2$$

$$=(2^2+2^2+\ldots+6.9^2)-\frac{1}{3}(6^2+12.5^2+\ldots+20.4^2)$$

$$=2050.32-2048.31=2.01$$

15	4	3	2	4	1	8.5	8.5	8.7	25.7
16	4	4	1	3	2	7	6.5	6.9	20.4
K_{1j}	55.2	61.1	59.8	68.2	82.7				

$$SS_e=SS_{e1}+SS_{e2}=9.65+2.01=11.66$$

K_{4j}	79.5	86.2	80.8	80.8	76.8
K_{1j}^2	3047.04	3733.21	3576.04	4651.24	6839.29
K_{2j}^2	6528.64	5184	6256.81	5012.64	5760.81
K_{3j}^2	7656.25	7005.69	6938.89	6922.24	4569.76
K_{4j}^2	6320.25	7430.44	6528.64	6528.64	5898.24

表头设计	A	B	C	D	空列	试验指标			
处理号	1	2	3	4	5	I	II	III	和
1	1	1	1	1	1	2	2	2	6.0
2	1	2	2	2	2	4	4.5	4	12.5
3	1	3	3	3	3	5.5	6	6	17.5
4	1	4	4	4	4	6	6.5	6.7	19.2
5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	6.3	6.5	6.7	19.5
6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	5.1	4.8	4.6	14.5
7	2	3	4	1	2	7	7.4	7.2	21.6
8	2	4	3	2	1	8	8.5	8.7	25.2
9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2	7	7.1	7.3	21.4
10	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1	8.4	8.5	8.9	25.8
11	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	4	6.5	6.3	6.1	18.9
12	3	4	2	1	3	7	7.3	7.1	21.4
13	4	1	4	2	3	5	4.5	4.7	14.2
14	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	6.5	6.7	19.2
15	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	8.5	8.7	25.7
16	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	6.5	6.9	20.4
K_{1j}	55.2	61.1	59.8	68.2	82.7				
K_{2j}	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]				
K_{3j}	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]				
K_{4j}	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]				
K_{1j}^2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]				
K_{2j}^2	6528.64	5184	6256.81	5012.64	5760.81				
K_{3j}^2	7656.25	7005.69	6938.89	6922.24	4569.76				
K_{4j}^2	6320.25	7430.44	6528.64	6528.64	5898.24				

$$df_A=df_B=df_C=df_D=4-1=3$$

$$df_{e1}=df_{空列}=4-1=3$$

$$df_{e2}=n(s-1)=16(3-1)=32$$

$$df_e=df_{e1}+df_{e2}=3+32=35$$

（3）计算方差

表头设计	A	B	C	D	空列	试验指标			
处理号	1	2	3	4	5	I	II	III	和
1	1	1	1	1	1	2	2	2	6.0
2	1	2	2	2	2	4	4.5	4	12.5
3	1	3	3	3	3	5.5	6	6	17.5
4	1	4	4	4	4	6	6.5	6.7	19.2
				3	4	6.3	6.5	6.7	19.5
				4	3	5.1	4.8	4.6	14.5
7	2	3	4	1	2	7	7.4	7.2	21.6
8	2	4	3	2	1	8	8.5	8.7	25.2
9	3	1	2	4	2	7	7.1	7.3	21.4
10	3				1	8.4	8.5	8.9	25.8
11	3				4	6.5	6.3	6.1	18.9
12	3				3	7	7.3	7.1	21.4
13	4				3	5	4.5	4.7	14.2
14	4				4	6	6.5	6.7	19.2
15	4	3	2	4	1	8.5	8.5	8.7	25.7
16	4	4	1	3	2				
K_{1j}	55.2	61.1	59.8	68.2	82.7				
K_{2j}	80.8	72	79.1	70.8	75.9				
K_{3j}	87.5	83.7	83.3	83.2	67.6				
K_{4j}	79.5	86.2	80.8	80.8	76.8				
K_{1j}^2	3047.04	3733.21	3576.04	4651.24	6839.29				
K_{2j}^2	6528.64	5184	6256.81	5012.64	5760.81				
K_{3j}^2	7656.25	7005.69	6938.89	6922.24	4569.76				
K_{4j}^2	6320.25	7430.44	6528.64	6528.64	5898.24				

$$MS_{因素}=\frac{SS_{因素}}{df_{因素}}$$

$$MS_A=\frac{SS_A}{df_A}=\frac{49.99}{3}=16.66$$

同理：$MS_B=11.14$

$$MS_C=9.67$$

$$MS_D=4.51$$

$$MSe=0.33$$

方差分析表

表5 粒粒橙果法试验试验方案及结果方差分析表

变异来源	平方和	自由度	方差	F	
A	49.99	3	16.66	265.29**	$F_{0.01(3,32)}=4.46$
B	33.42	3	11.14	177.35**	
C	29.01	3	9.67	153.95**	
D	13.54	3	4.51	71.85**	
模型误差	9.65	3	3.22	51.21**	
组内误差	2.01	32	0.06		
合并误差	11.66	35	0.33		
总	137.63	47			

探讨花生锈病药剂防治效果的好坏，进行了药剂种类（A）、浓度（B）、剂量（C）3因素试验，各有3个水平，选用正交表$L_9(3^4)$安排试验。 试验重复2次，随机区组设计。正交试验方案及试验结果(产量 kg/小区，小区面积133.3m^2)。对试验结果进行方差分析。

表6 花生锈病药剂试验方案及结果

试验号	因素 A (1)	因素 B (2)	因素 C (3)	产量x(kg/小区) 区组I	产量x(kg/小区) 区组II	T_t	$\bar{x}_t$
1	1（百菌清）	1（高）	1（80）	28.0	28.5	56.5	28.25
2	1（百菌清）	2（中）	2（100）	35.0	34.8	69.8	34.90
3	1（百菌清）	3（低）	3（120）	32.2	32.5	64.7	32.35
4	2（敌锈灵）	1（高）	2（100）	33.0	33.2	66.2	33.10
5	2（敌锈灵）	2（中）	3（120）	27.4	27.0	54.4	27.20
6	2（敌锈灵）	3（低）	1（80）	31.8	32.0	63.8	31.90
7	3（波尔多）	1（高）	3（120）	34.2	34.5	68.7	34.35
8	3（波尔多）	2（中）	1（80）	22.5	23.0	45.5	22.75
9	3（波尔多）	3（低）	2（100）	29.4	30.0	59.4	29.70

试验号	因素 A (1)	素 B (2)	C (3)	产量x(kg/小区) 区组I	区组II	T_t	$\overline{x}_t$
1	1（百菌清）	1（高）	1（80）	28.0	28.5	56.5	28.25
2	1（百菌清）	2（中）	2（100）	35.0	34.8	69.8	34.90
3	1（百菌清）	3（低）	3（120）	32.2	32.5	64.7	32.35
4	2（敌锈灵）	1（高）	2（100）	33.0	33.2	66.2	33.10
5	2（敌锈灵）	2（中）	3（120）	27.4	27.0	54.4	27.20
6	2（敌锈灵）	3（低）	1（80）	31.8	32.0	63.8	31.90
7	3（波尔多）	1（高）	3（120）	34.2	34.5	68.7	34.35
8	3（波尔多）	2（中）	1（80）	22.5	23.0	45.5	22.75
9	3（波尔多）	3（低）	2（100）	29.4	30.0	59.4	29.70
T_1	191.0	191.4	165.8	273.5	275.5	549.0	
T_2	184.4	169.7	195.4				
T_3	173.6	187.9	187.8				
$\overline{x}_1$	31.83	31.90	27.63				
$\overline{x}_2$	30.73	28.28	32.57				
$\overline{x}_3$	28.93	31.32	31.30				

T_i为各因素同一水平试验指标之和，T为9个试验号的试验指标之和；

$\overline{x}$ 为各因素同一水平试验指标的平均数。

首先检验MS_{e1}与MS_{e2}差异的显著性，

- 若经*F*检验不显著，则可将其平方和与自由度分别合并，计算出合并的误差均方，进行*F*检验与多重比较，以提高分析的精度；

- 若*F*检验显著，说明存在交互作用 ，二者不能合并，此时只能以MS_{e2}进行*F*检验与多重比较。

表7 花生锈病药剂试验结果方差分析表

变异来源	*SS*	*df*	*MS*	*F*	$F_{0.05}$	$F_{0.01}$
A	25.72	2	12.86	214.33**	4.10	7.55
B	45.24	2	22.62	377.00**		
C	78.77	2	39.39	656.50**		
区组	0.22	1	0.22	3.67ns	4.96	10.01
模型误差(e_1)	96.23	2	48.12	802.00**		
试验误差(e_2)	0.44	8	0.06			
总	246.62	17				

本例MS_{e1} / MS_{e2}=802.00**，模型误差均方 MS_{e1} 与试验误差均方 MS_{e2} 差异极显著，说明试验因素间交互作用极显著，只能以试验误差均方 MS_{e2} 进行F检验与多重比较。

表7 花生锈病药剂试验结果方差分析表

变异来源	SS	df	MS	F	$F_{0.05}$	$F_{0.01}$
A	25.72	2	12.86	214.33^{**}	4.10	7.55
B	45.24	2	22.62	377.00^{**}		
C	78.77	2	39.39	656.50^{**}		
区组	0.22	1	0.22	3.67^{ns}	4.96	10.01
模型误差(e_1)	96.23	2	48.12	802.00^{**}		
试验误差(e_2)	0.44	8	0.06			
总 的	246.62	17				

F检验结果表明，药剂种类（A）、浓度（B）、剂量（C）3 因素对花生产量都有极显著影响；区组间差异不显著 。

多重比较

(1) 若模型误差显著，

- 说明试验因素间存在交互作用，各因素所在列有可能出现交互作用的混杂，此时各试验因素水平间的差异已不能真正反映因素的主效，因而进行各因素水平间的多重比较无多大实际意义，
- 但应进行试验处理间的多重比较，以寻求最处理，即最优水平组合。
- 进行各试验处理间多重比较时选用试验误差均方MS_{e2}。
- 模型误差显著，还应进一步试验，以分析因素间的交互作用。

（2）若**模型误差不显著**，

- 说明试验因素间交互作用不显著，各因素所在列有可能未出现交互作用的混杂，此时各因素水平间的差异能真正反映因素的主效，
- 因而进行各因素水平间的多重比较有实际意义，
- 并从各因素水平间的多重比较中选出各因素的最优水平相组合，得到最优水平组合。

进行各因素水平间的多重比较时，用合并的误差均方

$MS_e=（SS_{e1}+SS_{e2}）/（df_{e1}+df_{e2}）$

此时可不进行试验处理间的多重比较。

表7 花生锈病药剂试验结果方差分析表

变异来源	SS	df	MS	F	$F_{0.05}$	$F_{0.01}$
A	25.72	2	12.86	214.33^{**}	4.10	7.55
B	45.24	2	22.62	377.00^{**}		
C	78.77	2	39.39	656.50^{**}		
区组	0.22	1	0.22	3.67^{ns}	4.96	10.01
模型误差(e_1)	96.23	2	48.12	802.00^{**}		
试验误差(e_2)	0.44	8	0.06			
总　的	246.62	17				

- 本例模型误差极显著，说明因素间存在交互作用，不必进行各因素水平间的多重比较，
- 应进行试验处理间的多重比较，以寻求最佳处理，即最优水平组合。

（1）A、B、C因素各水平平均数的多重比较

A因素各水平平均数的多重比较表（*SSR*法）

A因素	平均数 $\bar{x}_i$	$\bar{x}_i$ -28.93	$\bar{x}_i$ -30.73
A_1	31.83	2.90**	1.10*
A_2	30.73	1.80**	
A_3	28.93		

B因素	平均数 $\bar{x}_i$	$\bar{x}_i$ -28.28	$\bar{x}_i$ -31.32
B_1	31.90	3.62**	0.58**
B_3	31.32	3.04**	
B_2	28.28		

C因素	平均数 $\bar{x}_i$	$\bar{x}_i$ - 27.63	$\bar{x}_i$ -31.30
C_2	32.57	4.94**	1.27**
C_3	31.30	3.67**	
C_1	27.63		

A因素	平均数 $\bar{x}_i$	$\bar{x}_i$-28.93	$\bar{x}_i$-30.73
A_1	31.83	2.90^{**}	1.10^{*}
A_2	30.73	1.80^{**}	
A_3	28.93		

B因素	平均数 $\bar{x}_i$	$\bar{x}_i$-28.28	$\bar{x}_i$ -31.32
B_1	31.90	3.62^{**}	0.58^{**}
B_3	31.32	3.04^{**}	
B_2	28.28		

C因素	平均数 $\bar{x}_i$	$\bar{x}_i$ - 27.63	$\bar{x}_i$ -31.30
C_2	32.57	4.94^{**}	1.27^{**}
C_3	31.30	3.67^{**}	
C_1	27.63		

A因素各水平间、

B因素各水平间、

C因素各水平间 差异显著或极显著。

最优水平为A_1、B_1、C_2。

A因素	平均数 $\bar{x}_i$	$\bar{x}_i$-28.93	$\bar{x}_i$-30.73
A_1	31.83	2.90^{**}	1.10^{*}
A_2	30.73	1.80^{**}	
A_3	28.93		

B因素	平均数 $\bar{x}_i$	$\bar{x}_i$-28.28	$\bar{x}_i$ -31.32
B_1	31.90	3.62^{**}	0.58^{**}
B_3	31.32	3.04^{**}	
B_2	28.28		

*C*因素	平均数 $\bar{x}_i$	$\bar{x}_i$ - 27.63	$\bar{x}_i$ -31.30
C_2	32.57	4.94^{**}	1.27^{**}
C_3	31.30	3.67^{**}	
C_1	27.63		

本例模型误差显著，试验因素间存在交互作用，不宜从各因素水平间的多重比较中选出各因素的最优水平相组合来得到最优水平组合。

（2）各试验处理平均数间的多重比较

各试验处理平均数多重比较表（*LSD*法）

试验号	平均数 $\bar{x}$	$\bar{x}$-22.75	$\bar{x}$-27.20	$\bar{x}$-28.25	$\bar{x}$-29.70	$\bar{x}$-31.90	$\bar{x}$-32.35	$\bar{x}$-33.10	$\bar{x}$-34.35
2	34.90	12.15**	7.70**	6.65**	5.20**	3.00**	2.55**	1.80**	0.55
7	34.35	11.60**	7.15**	6.10**	4.65**	2.45**	2.00**	1.25**	
4	33.10	10.35**	5.90**	4.85**	3.40**	1.20**	0.75*		
3	32.35	9.60**	5.15**	4.10**	2.65**	0.45			
6	31.90	9.15**	4.70**	3.65**	2.20**				
9	29.70	6.95**	2.50**	1.45**					
1	28.25	5.50**	1.05**						
5	27.20	4.45**							
8	22.75								

各试验处理间平均数多重比较结果，除第2号试验处理与第7号试验处理 、第3号试验处理与第 6 号试验处理平均产量差异不显著外，其余各试验处理平均产量间差异极显著或显著，

最优水平组合为第 2 号试验处理$A_1B_2C_2$（或第7号试验处理$A_3B_1C_3$）

（2）各试验处理平均数间的多重比较

各试验处理平均数多重比较表（*LSD*法）

试验号	平均数 $\bar{x}$	$\bar{x}-22.75$	$\bar{x}-27.20$	$\bar{x}-28.25$	$\bar{x}-29.70$	$\bar{x}-31.90$	$\bar{x}-32.35$	$\bar{x}-33.10$	$\bar{x}-34.35$
2	34.90	12.15^{**}	7.70^{**}	6.65^{**}	5.20^{**}	3.00^{**}	2.55^{**}	1.80^{**}	0.55
7	34.35	11.60^{**}	7.15^{**}	6.10^{**}	4.65^{**}	2.45^{**}	2.00^{**}	1.25^{**}	
4	33.10								
3	32.35								
6	31.90								
9	29.70								
1	28.25								
5	27.20								
8	22.75								

本例模型误差显著，试验因素间存在交互作用，

应以试验处理间的多重比较寻求的最优水平组合，

即第2号试验处理 $A_1B_2C_2$ （或第7号试验处理 $A_3B_1C_3$ ）

为该试验的最优水平组合。

- （1）当正交表中存在空白列，且该列的平方和较大时，可以采用*F*检验的方法，即将该列的均方和与组内误差相比，如果差异显著，则该列有可能是某两个因子的交互作用所在列，从而需要修改模型。
- （2）若正交表中无空白列，那么就不能对模型的合适性作检验，但可以组内误差对因子或交互作用进行显著性检验。
- （3）若在方差分析表中发现某些因子或交互作用的均方和比误差均方和还要小，那么它们肯定不显著，因此可以把它们的平方和与误差的平方和合并，以提高误差估计的精度。

DOI：10.19336/j.cnki.trtb.2000.03.014
第31卷第3期 土 壤 通 报 Jun. 31, No. 3
2000年6月 Chinese Journal of Soil Science Jun., 2000

文章编号：0564-3945(2000)03-0135-05

正交试验设置重复的必要性和统计分析方法

王兴仁[1]，张录达[1]，王华方[2]
（1. 中国农业大学，北京 100094；2. 北京林业大学，北京 100083）

摘 要：以牡丹株形化控试验为例研究了正交设计试验设置重复的必要性及统计分析方法。结果表明，对正交设计，只有设置适当重复并进行方差分析和多重比较，才能够确定试验随机误差，进而对试验因素的效应和模型误差作出科学评估。

关 键 词：正交设计；设置重复；统计方法
中图分类号：S131[+].3 文献标识码：A

1 目的和意义

正交设计广泛应用于各研究领域的多因素多水平试验。该试验一般不设重复，统计分析时，利用研究因素的水平重复作为"隐重复"，将空列或共……列作为"误差列"进行方差分析。当"空列"……大或无空列时，就难以通过方差分析对试……科学结论。目前，对这一问题的解决尚缺……究。林德光曾介绍有重复正交试验的方差……但至今尚未引起广泛的重视。在已发表的……见到有重复的正交试验，统计方法也存在……此，本文以牡丹化控试验为例，研究了正交……复的必要性和系统的统计分析方法。

2 理论基础

任何一个正交表，包括用"并列法"、"……"裂区法"等得到的正交表[3]，各列水平数……势系数，其试验效应分析都符合独立比较的原则[4]。因此，对一个有重复，采用完全随机区组设计的正交试验，其方差分析的线性可加模型可用下式表示：

$$y_{ij} = \mu + \sum_{k=1}^{m} a_{ijk} + \beta_j + \varepsilon_{ij} \quad (1)$$

其中，$i=1,2,\cdots,N$，为试验处理数；$j=1,2,\cdots,R$，为试验重复次数或区组数；$k=1,2,\cdots,m$，为正交表实用列数（包括空列）。y_{ij}为每一观测值；μ为总体平均数；a_{ijk}为第k列的试验效应；β_j为区组效应；ε_{ij}为试验随机误差，服从$N(0,\sigma^2)$分布。

据式(1)，数据总变异平方和SS_T及自由度df_T可分解如下：

$$SS_T = \sum_{k=1}^{m} SS_K + SS_B + SS_e \quad (2)$$

$$df_T = \sum df_K + df_B + df_e \quad (3)$$

……验结果如表2，方差分析结果如表3。

表1 $L_{16}(4^5)$正交表的水平设计（浓度，mg/L）

水平	1列(A)	2列(B)	3列(C)	4列(D)	5列(E，空列)
1	0	0	0	0	
2	1000	25	100	500	
3	1500	50	150	800	
4	2000	80	250	1300	

本试验为非区组设计的有重复试验。所以式(2)和(3)区组效应不存在。由表2知，处理数N=16，实用列m=5。其中第5列为空列，用以估计模型误差。重复次数R=5，每列水平数h=4，水平重复次数据r=4。

研究4种生长延缓剂（A,B,C,D）对牡丹矮化的影响，

$$L_{16}(4^5)$$

水平	1列(A)	2列(B)	3列(C)	4列(D)	5列(空)
1	0	0	0	0	
2	1000	25	100	500	
3	1500	50	150	800	
4	2000	80	250	1300	

表 2　$L_{16}(4^5)$正交设计方案及化控试验结果(植高, cm)

处理号	1(A)	2(B)	3(C)	4(D)	5(E)	重复 y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	$\bar{y}$
1	1	1	1	1	1	34.6	33.3	28.0	30.8	30.6	31.46
2	1	2	2	2	2	31.4	37.3	29.7	33.2	33.8	33.08
3	1	3	3	3	3	26.0	36.5	22.0	17.7	24.6	25.36
4	1	4	4	4	4	28.3	26.7	26.3	26.0	19.6	25.38
5	2	1	2	3	4	35.7	41.9	33.0	36.6	35.7	36.58
6	2	2	1	4	3	42.1	31.3	35.7	27.3	28.0	32.88
7	2	3	4	1	2	23.3	22.0	36.1	35.2	31.1	29.54
8	2	4	3	2	1	32.2	27.6	23.2	10.9	4.0	19.58
9	3	1	3	4	2	34.3	38.6	35.6	36.7	34.2	35.88
10	3	2	4	3	1	28.7	34.7	33.1	38.3	38.2	34.60
11	3	3	1	2	4	15.1	27.2	25.0	24.2	25.5	23.40
12	3	4	2	1	3	28.4	23.6	31.2	26.7	27.6	27.50
13	4	1	4	2	3	30.7	34.2	32.0	40.6	38.6	35.22
14	4	2	3	1	4	32.7	27.3	35.0	33.4	36.6	33.00
15	4	3	2	4	1	30.6	17.8	27.1	25.1	27.6	25.64
16	4	4	1	3	2	33.7	37.2	33.7	24.0	19.1	29.54
T1	576.4	695.4	586.4	607.5	556.4						
T2	592.9	667.8	614.0	556.4	640.2						
T3	606.9	519.1	569.1	630.4	604.8						
T4	617.0	510.0	623.7	598.9	591.8						

表 3 化控剂对牡丹株高影响试验结果的方差分析

变异因素	平方和(SS)	自由度(df)	均方(Ms)	F	$F_{0.05}$	$F_{0.01}$
研究因素						
A	46.62	3	15.54	0.533		
B	1416.40	3	471.53	16.174**	2.17	4.11
C	94.29	3	31.43	1.078	2.17	4.11
D	143.55	3	47.85	1.641	2.17	4.11
因素总和(A+B+C+D)	1699.06	12	141.58	4.86**	1.90	2.47
模型误差(E)	179.79	3	59.93	2.056	2.17	4.11
随机误(e)	1865.78	64	29.15			
总变异	3744.62	79				

不同重复正交试验方差分析结果比较

重复	变异因素	平方和（SS）	自由度（df）	统计项目 均方差(MS)	均方比（F）	$F_{0.05}$	$F_{0.01}$
	因素						
	A	100.8	3	33.6	2.71	9.28	29.46
	B	268.2	3	89.4	7.21	9.28	29.46
I	C	40.1	3	13.4	1.08	9.28	29.46
	D	87.3	3	29.1	2.35	9.28	29.46
	A+B+C+D	496.4	12	41.4	3.34	8.74	27.05

(1) 不设重复, 试验效应被误差掩盖

5 个无重复试验的总体效应(A +B +C +D)均未达到显著性检验水准, 而有重复试验则达到了 5 %概率显著性水准。这是因为在不设重复时, 试验随机误差分散或隐含在正交表各列之中, 由于随机误差与模型误差相混杂，而且较大，至使 F 检验的误差均方差相对增大。而在有重复试验时, 对空列的模型误差可以统计检验并从总变异中剔除, 从而提高了试验的精度。

重复	变异因素	平方和（SS）	自由度（df）	统计项目 均方差(MS)	均方比（F）	$F_{0.05}$	$F_{0.01}$
IV	C	250.9	3	83.6	3.14	9.28	29.46
	D	37.9	3	12.9	0.47	9.28	29.46
	A+B+C+D	951.8	12	79.3	2.98	8.74	27.05
	E	79.9	3	26.6			
	A	113.6	3	37.9	1.92	9.28	29.46
	B	769.3	3	256.4	13.0 *	9.28	29.46
V	C	156.5	3	52.2	2.65	9.28	29.46
	D	80.4	3	26.8	1.34	9.28	29.46
	A+B+C+D	1119.8	12	93.3	4.73	8.74	27.05
	E	59.2	3	19.7			

不同重复正交试验方差分析结果比较

重复	变异因素	平方和 (SS)	自由度 (df)	统计项目 均方差(MS)	均方比 (F)	$F_{0.05}$	$F_{0.01}$
	因素						
	A	100.8	3	33.6	2.71	9.28	29.46
	B	268.2	3	89.4	7.21	9.28	29.46
I	C	40.1	3	13.4	1.08	9.28	29.46
	D	87.3	3	29.1	2.35	9.28	29.46
	A+B+C+D	496.4	12	41.4	3.34	8.74	27.05
	模型误差(E)	37.1	3	12.4			

(2) 不设重复, 效应规律被误差干扰

5 个无重复试验的 F 值由大至小有 5 种不同排序: Ⅰ-BADC、Ⅱ-BDAC 、Ⅲ-BACD、Ⅳ-BCAD、Ⅴ-BCAD。而有重复试验的排序为 BDCA， 与前者均不相同。它们的共同点是, B 因素总是排在首位。这一差异规律, 只有在有重复试验中才能揭示并得到统计学上的认可。

重复	变异因素	平方和 (SS)	自由度 (df)	统计项目 均方差(MS)	均方比 (F)	$F_{0.05}$	$F_{0.01}$
	A	62.8	3	20.9	0.79	9.28	29.46
	B	520.3	3	173.4	6.52	9.28	29.46
	C	250.9	3	83.6	3.14	9.28	29.46
Ⅳ	D	37.9	3	12.9	0.47	9.28	29.46
	A+B+C+D	951.8	12	79.3	2.98	8.74	27.05
	E	79.9	3	26.6			
	A	113.6	3	37.9	1.92	9.28	29.46
	B	769.3	3	256.4	13.0*	9.28	29.46
Ⅴ	C	156.5	3	52.2	2.65	9.28	29.46
	D	80.4	3	26.8	1.34	9.28	29.46
	A+B+C+D	1119.8	12	93.3	4.73	8.74	27.05
	E	59.2	3	19.7			

不同重复正交试验方差分析结果比较

重复	变异因素	平方和（SS）	自由度（df）	统计项目均方差（MS）	均方比（下）	$F_{0.05}$	$F_{0.01}$
	因素						
	A	100.8	3	33.6	2.71	9.28	29.46
	B	268.2	3	89.4	7.21	9.28	29.46
I	C	40.1	3	13.4	1.08	9.28	29.46
	D	87.3	3	29.1	2.35	9.28	29.46
	A+B+C+D	496.4	12	41.4	3.34	8.74	27.05
	E	73.0	3	24.3			
	A	62.8	3	20.9	0.79	9.28	29.46
	B	520.3	3	173.4	6.52	9.28	29.46
	C	250.9	3	83.6	3.14	9.28	29.46
IV	D	37.9	3	12.9	0.47	9.28	29.46
	A+B+C+D	951.8	12	79.3	2.98	8.74	27.05
	E	79.9	3	26.6			
	A	113.6	3	37.9	1.92	9.28	29.46
	B	769.3	3	256.4	13.0*	9.28	29.46
	C	156.5	3	52.2	2.65	9.28	29.46
V	D	80.4	3	26.8	1.34	9.28	29.46
	A+B+C+D	1119.8	12	93.3	4.73	8.74	27.05
	E	59.2	3	19.7			

(3) 无重复正交试验的统计结论是可疑的

在无重复情况下，空列或均方差最小列的随机误差和模型误差混杂在一起。这些列可以作为方差分析误差的假定条件时，模型误差非常小，与随机误差相比可以忽略不计。但这一假设是否成立，只有通过有重复试验，经统计检验后才能知道。

不同重复正交试验方差分析结果比较

重复	变异因素	平方和 (SS)	自由度 (df)	统计项目 均方差(MS)	均方比 (F)	$F_{0.05}$	$F_{0.01}$
	因素						
	A	100.8	3	33.6	2.71	9.28	29.46
	B	268.2	3	89.4	7.21	9.28	29.46
I	C	40.1	3	13.4	1.08	9.28	29.46
	D	87.3	3	29.1	2.35	9.28	29.46
	A+B+C+D	496.4	12	41.4	3.34	8.74	27.05

(4) 失拟误差的评估可以提供有价值的科研信息

模型误差是那些影响试验效应, 而又未在本试验中进行研究的哪些因素或交互作用。究竟是哪些因素或交互作用，可以由正交设计的交互作用表查得。通过有重复试验评估失拟误差大小并查出造成失拟误差较大的原因, 对得到科学试验结论和开展进一步研究无疑具有重要意义。

重复	变异因素	平方和 (SS)	自由度 (df)	统计项目 均方差(MS)	均方比 (F)	$F_{0.05}$	$F_{0.01}$
	E	73.0	3	24.3			
	A	62.8	3	20.9	0.79	9.28	29.46
	B	520.3	3	173.4	6.52	9.28	29.46
	C	250.9	3	83.6	3.14	9.28	29.46
IV	D	37.9	3	12.9	0.47	9.28	29.46
	A+B+C+D	951.8	12	79.3	2.98	8.74	27.05
	E	79.9	3	26.6			
	A	113.6	3	37.9	1.92	9.28	29.46
	B	769.3	3	256.4	13.0 *	9.28	29.46
	C	156.5	3	52.2	2.65	9.28	29.46
V	D	80.4	3	26.8	1.34	9.28	29.46
	A+B+C+D	1119.8	12	93.3	4.73	8.74	27.05
	E	59.2	3	19.7			

为提高零件内孔研磨工序质量进行工艺参数的选优试验，

考察孔的锥度值，

希望其越小越好。

因子	水平一	水平二
A：研孔工艺设备	通用夹具	专用夹具
B：生铁研圈直径	特殊铸铁	一般灰铸铁
C：留研量（mm）	0.01	0.015

$$L_8(2^7)$$

表头设计	A	B		C			
列号	1	2	3	4	5	6	7

在每一水平组合下加工了四个零件，测量其锥度，

实验结果如下：

试验号	1 A	2 B	3	4 C	5	6	7	试验结果				和
1	1	1	1	1	1	1	1	1.5	1.7	1.3	1.5	6
2	1	1	1	2	2	2	2	1	1.2	1	1	4.2
3	1	2	2	1	1	2	2	2.5	2.2	3.2	2	9.9
4	1	2	2	2	2	1	1	2.5	2.5	1.5	2.8	9.3
5	2	1	2	1	2	1	2	1.5	1.8	1.7	1.5	6.5
6	2	1	2	2	1	2	1	1	2.5	1.3	1.5	6.3
7	2	2	1	1	2	2	1	1.8	1.5	1.8	2.2	7.3
8	2	2	1	2	1	1	2	1.9	2.6	2.3	2	8.8

试验号	1 A	2 B	3	4 C	5	6	7	试验结果				和
1	1	1	1	1	1	1	1	1.5	1.7	1.3	1.5	6
2	1	1	1	2	2	2	2	1	1.2	1	1	4.2
3	1	2	2	1	1	2	2	2.5	2.2	3.2	2	9.9
4	1	2	2	2	2	1	1	2.5	2.5	1.5	2.8	9.3
5	2	1	2	1	2	1	2	1.5	1.8	1.7	1.5	6.5
6	2	1	2	2	1	2	1	1	2.5	1.3	1.5	6.3
7	2	2	1	1	2	2	1	1.8	1.5	1.8	2.2	7.3
8	2	2	1	2	1	1	2	1.9	2.6	2.3	2	8.8
T_1	29.4	28.0	26.3	29.7	31.0	30.6	28.9	$T = 58.3$				
T_2	28.9	35.3	32.0	28.6	27.3	27.7	29.4					
SS_j	0.008	4.728	1.015	0.038	0.428	0.263	0.008					

$$SS_j = \frac{1}{4 \times 4}(T_{j1}^2 + T_{j2}^2) - \frac{T^2}{8 \times 4}$$

试验号	1 A	2 B	3	4 C	5	6	7	试验结果				和
1	1	1	1	1	1	1	1	1.5	1.7	1.3	1.5	6
2	1	1	1	2	2	2	2	1	1.2	1	1	4.2
3	1	2	2	1	1	2	2	2.5	2.2	3.2	2	9.9
4	1	2	2	2	2	1	1	2.5	2.5	1.5	2.8	9.3
5	2	1	2	1	2	1	2	1.5	1.8	1.7	1.5	6.5
6	2	1	2	2	1	2	1	1	2.5	1.3	1.5	6.3
7	2	2	1	1	2	2	1	1.8	1.5	1.8	2.2	7.3
8	2	2	1	2	1	1	2	1.9	2.6	2.3	2	8.8
T_1	29.4	28.0	26.3	29.7	31.0	30.6	28.9					
T_2	28.9	35.3	32.0	28.6	27.3	27.7	29.4					

$$T = 58.3$$

$$SS_T = \sum (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum x_{ij}^2 - \frac{T^2}{8 \times 4} = 10.275$$

试验号	1 A	2 B	3	4 C	5	6	7	试验结果				和
1	1	1	1	1	1	1	1	1.5	1.7	1.3	1.5	6
2	1	1	1	2	2	2	2	1	1.2	1	1	4.2
3	1	2	2	1	1	2	2	2.5	2.2	3.2	2	9.9
4	1	2	2	2	2	1	1	2.5	2.5	1.5	2.8	9.3
5	2	1	2	1	2	1	2	1.5	1.8	1.7	1.5	6.5
6	2	1	2	2	1	2	1	1	2.5	1.3	1.5	6.3
7	2	2	1	1	2	2	1	1.8	1.5	1.8	2.2	7.3
8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	8.8
T_1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]					
T_2	28.9	35.3	32.0	28.6	27.3	27.7	29.4					

$$df_{e2} = df_T - df_t = (32-1)-(8-1) = 24$$

$$T = 58.3$$

$$SS_t = 4 \times \sum(\bar{x}_{ij} - \bar{x})^2 = \frac{1}{4} \times \sum T_{ij}^2 - \frac{T^2}{8 \times 4} = 6.487$$

$$SS_{e2} = SS_T - SS_t = 10.275 - 6.487 = 3.788$$

试验号	1 A	2 B	3	4 C	5	6	7	试验结果				和
1	1	1	1	1	1	1	1	1.5	1.7	1.3	1.5	6
2	1	1	1	2	2	2	2	1	1.2	1	1	4.2
3	1	2	2	1	1	2	2	2.5	2.2	3.2	2	9.9
4	1	2	2	2	2	1	1	2.5	2.5	1.5	2.8	9.3
5	2	1	2	1	2	1	2	1.5	1.8	1.7	1.5	6.5
6	2	1	2	2	1	2	1	1	2.5	1.3	1.5	6.3
7	2	2	1	1	2	2	1	1.8	1.5	1.8	2.2	7.3
8										.3	2	8.8
T_1	29.4	28.0	26.3	29.7	31.0	30.6	28.9					
T_2	28.9	35.3	32.0	28.6	27.3	27.7	29.4					
SS_j	0.008	4.728	1.015	0.038	0.428	0.263	0.008					

$$df_{e1} = df_3 + df_5 + df_6 + df_7 = 4$$

$$T = 58.3$$

$$SS_{e1} = SS_3 + SS_5 + SS_6 + SS_7 = 1.714$$

$$SS_{e2} = SS_T - SS_t = 10.275 - 6.487 = 3.788$$

$$df_{e2} = df_T - df_t = (32-1) - (8-1) = 24$$

$$df_{e1} = df_3 + df_5 + df_6 + df_7 = 4$$

$$SS_{e1} = SS_3 + SS_5 + SS_6 + SS_7 = 1.714$$

$$F = \frac{MS_{e1}}{MS_{e2}} = 2.715 \quad > \quad F_{0.1(4,24)} = 2.19$$

0.1水平下拒绝，因子间可能存在交互作用。

交互作用显著性 检验

$$H_{01}:(ab)_{ij}=0,\text{对一切}i,j$$

$$H_{02}:(ac)_{ik}=0,\text{对一切}i,k$$

$$H_{03}:(bc)_{jk}=0,\text{对一切}j,k$$

对空白列每一列进行检验

列号	平方和	自由度	均方和	F 比
3	$S_3=1.015$	$f_3=1$	$MS_3=1.015$	$F_3=6.43$*
5	$S_5=0.428$	$f_5=1$	$MS_5=0.428$	$F_5=2.71$
6		$f_6=1$	$MS_6=0.263$	$F_6=1.67$
7	$S_7=0.008$	$f_7=1$	$MS_7=0.008$	$F_7=0.05$
纯误差	$S_{内}=3.788$	$f_{内}=24$	$MS_{内}=0.1578$	

$$F_{0.05(1,24)} = 4.26$$

第3列不能作为误差项，其它5,6,7列与 组内误差合并作为误差项，

本例中第3列对应于A，B的交互作用列，需要列出方差分析表进一步检验。

变异来源	平方和	自由度	方差	F值
A	0.008	1	0.008	0.047
B	4.728	1	4.728	28.453*
C	0.038	1	0.038	0.228
AB互作	1.015	1	1.015	6.110 *
e1	0.698	3	0.233	1.401
组内误差	3.788	24	0.158	
e	4.486	27	0.166	
T	10.275	31		

$$F_{0.05(3,24)} = 3.01$$

$$F_{0.05(1,27)} = 4.21$$

变异来源	平方和	自由度	方差	F值
A	0.008	1	0.008	0.047
B	4.728	1	4.728	28.453*
C	0.038	1	0.038	0.228
AB互作	1.015	1	1.015	6.110 *
e1	0.698	3	0.233	1.401
组内误差	3.788	24	0.158	
e	4.486	27	0.166	
T	10.275	31		

- 方差分析表可知，在水平0.05下，因子B及AB交互作用显著；
- 如果安排试验时正交表中无空白列，则不能检验交互作用的存在性，但可以把组内误差作为对因子或交互作用显著性检验。

最佳水平组合的选择

	A1	***A2***
B1	1.275	1.600
B2	2.400	2.0125

因子B及AB交互作用对锥度值有显著影响的，

因为交互作用显著，为使锥度值最小，

只要选出因子A与B的水平搭配中最小值就可以。

A_1B_1为最佳水平组合，即采用通用夹具与特殊铸铁做的生铁研圈为好。

试验号	1 A	2 B	3	4 C	5	6	7	试验结果				和
1	1	1	1	1	1	1	1	1.5	1.7	1.3	1.5	6
2	1	1	1	2	2	2	2	1	1.2	1	1	4.2
3	1	2	2	1	1	2	2	2.5	2.2	3.2	2	9.9
4	1	2	2	2	2	1	1	2.5	2.5	1.5	2.8	9.3
5	2	1	2	1	2	1	2	1.5	1.8	1.7	1.5	6.5
6	2	1	2	2	1	2	1	1	2.5	1.3	1.5	6.3
7	2	2	1	1	2	2	1	1.8	1.5	1.8	2.2	7.3
8	2	2	1	2	1	1	2	1.9	2.6	2.3	2	8.8
T_1	29.4	28.0	26.3	29.7	31.0	30.6	28.9	$T = 58.3$				
T_2	28.9	35.3	32.0	28.6	27.3	27.7	29.4					
SS_j	0.008	4.728	1.015	0.038	0.428	0.263	0.008					

3.2.4 重复取样的方差分析

- 重复试验可以提高试验结果统计分析的可靠性，但同时也随试验次数的成倍增加而增加试验费用。

- 在实际工作中，对每个试验处理同时抽取n个样品进行测试，这种方法叫做重复取样。

3.2.4 重复取样的方差分析

- 重复取样仅反映了原材料的不均匀性及测定试验指标时的测量误差，不能反映整个试验过程中的试验干扰，属于局部误差。

- 通常局部误差比试验误差要小一些。原则上不能用来检验各因素及其交互作用的显著性，否则，会得出几乎所有因素及其交互作用都是显著的不正确结论。

3.2.4 重复取样的方差分析

- 重复取样可提高统计分析的可靠性，但它与重复试验有区别。
- 重复试验反映的是整个试验过程中的各种干扰引起的误差，是整体误差。

3.2.4 重复取样的方差分析

- 若符合以下情况，也可以把重复取样得到的试样误差当作试验误差，进行检验。

（1）正交表各列已排满，无空列提供误差SS_{e1}。这时，可用重复取样误差作为试验误差来检验显著性。若有一半左右因素及交互作用不显著，就可以认为这种检验是合理的。

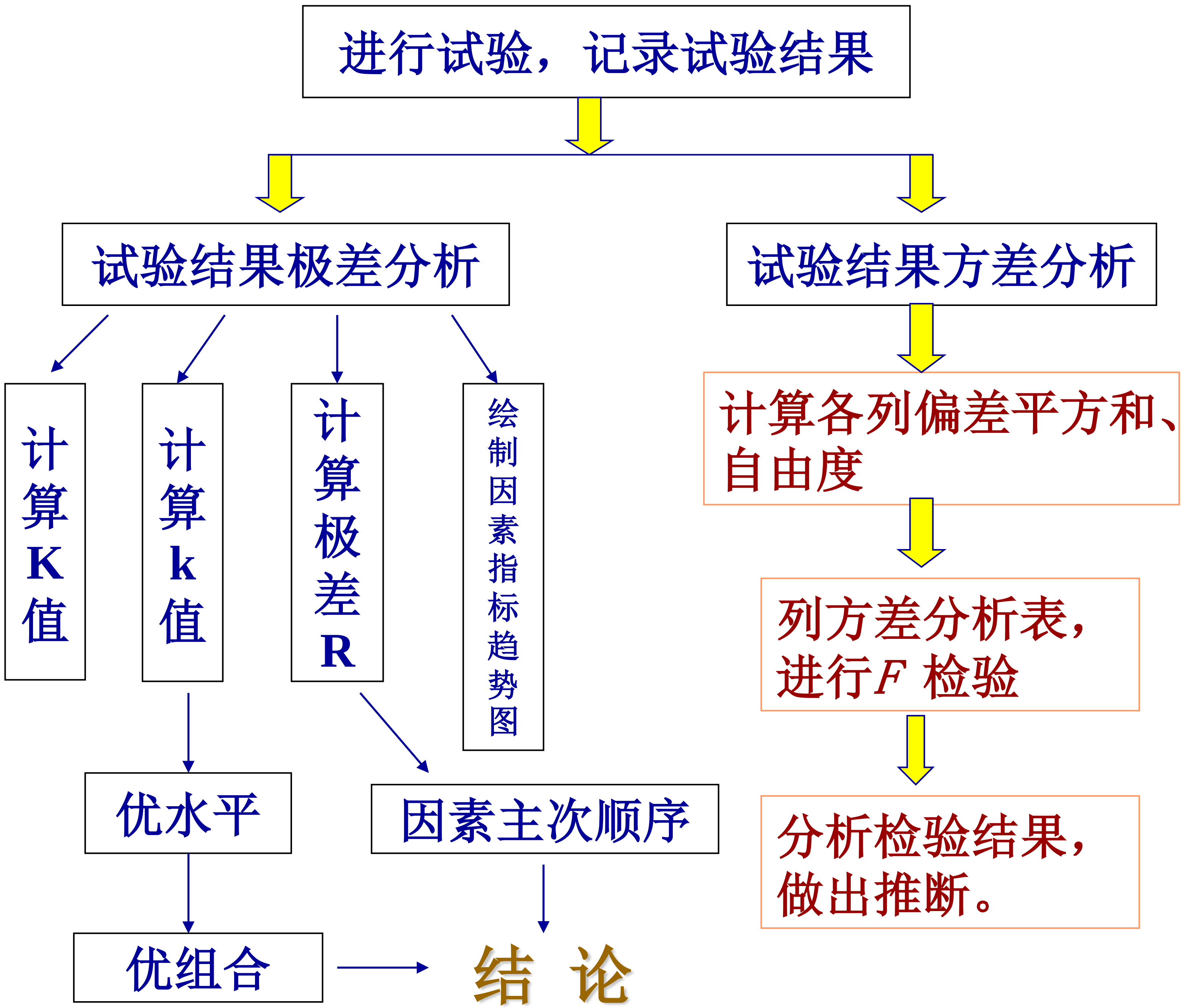
（2）若重复取样得到的误差SS_{e2}与整体误差SS_{e1}相差不大，两个误差的F值小于F_a（df_{e1}, df_{e2}），表明差异不显著。这时，就可以将二者合并作为试验误差用于检验。即

$$SS_e = SS_{e1} + SS_{e2} \qquad df_e = df_{e1} + df_{e2}$$

重复取样

重复试验

方差分析步骤及计算方法一样。


进行试验，记录试验结果
试验结果极差分析
试验结果方差分析
计算K值
计算k值
计算极差R
绘制因素指标趋势图
计算各列偏差平方和、自由度
列方差分析表，进行F检验
分析检验结果，做出推断。
优水平
因素主次顺序
优组合
结 论