

线性增长条件下的倒向重随机微分方程

陈 敏, 申晓慧, 江 龙

(中国矿业大学 理学院, 江苏 徐州 221116)

摘 要:研究倒向重随机微分方程,在生成元 f 关于 (y, z) 连续且线性增长、生成元 g 关于 (y, z) 满足 Mao 的非 Lipschitz 条件下,得到了其最小解存在定理.推广了倒向重随机微分方程在随机控制和数理金融等方面的应用.

关键词:倒向重随机微分方程;线性增长;非 Lipschitz 条件;最小解

中图分类号:O211

文献标志码:A

考虑如下倒向重随机微分方程(BDSDE)

$$y_t = \xi + \int_t^T f(s, y_s, z_s) ds + \int_t^T g(s, y_s, z_s) dB_s - \int_t^T z_s dW_s, t \in [0, T], \quad (1)$$

其中终端时间 $T > 0$ 为正实数; $(B_t)_{t \in [0, T]}$ 和 $(W_t)_{t \in [0, T]}$ 分别是 l 维和 d 维两个相互独立的标准 Brown 运动,关于 $(B_t)_{t \in [0, T]}$ 的积分是倒向 Itô 积分,关于 $(W_t)_{t \in [0, T]}$ 的积分是正向 Itô 积分;生成元 f, g 有如下定义:

$$f: \Omega \times [0, T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}, \quad g: \Omega \times [0, T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^l,$$

且对任意的 $(y, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$, $f(\cdot, y, z), g(\cdot, y, z)$ 均为联合可测函数. (f, g, T, ξ) 称为 BDSDE 的参数,将 (1) 式简单记为 $\text{BDSDE}(f, g, T, \xi)$.

当生成元 g 恒为 0 时, $\text{BDSDE}(f, g, T, \xi)$ 就是众所周知的倒向随机微分方程(简称 BSDE). 1990 年,文献[1]提出 BSDE 并在生成元 f 关于 (y, z) 的一致 Lipschitz 条件下建立了 BSDE 解的存在唯一性结果. 从那时起,一些学者们开始专注于这一领域的研究,他们在弱化生成元 f 关于 (y, z) 的一致 Lipschitz 条件方面做了大量的研究^[2-5].

1994 年,文献[6]第一次提出 BDSDE,并证明了生成元 f, g 关于 (y, z) 满足一致 Lipschitz 条件下 BDSDE 解的存在唯一性. 由此出发,一些学者对生成元 f, g 关于 (y, z) 满足一致 Lipschitz 条件进行弱化,并证明了 BDSDE 解的存在唯一性. 例如:文献[7]证明了生成元 f, g 关于 (y, z) 在 Mao 的非 Lipschitz 条件下 BDSDE 解的存在唯一性;文献[8]在生成元 f, g 关于 (y, z) 满足 Mao 的非 Lipschitz 条件下获得了 BDSDE 解的比较定理;文献[9]得到在生成元 f 关于 (y, z) 连续且线性增长,同时生成元 g 关于 (y, z) 一致 Lipschitz 条件下 BDSDE 解的存在性定理;文献[10]在文献[9]的基础上将生成元 f 的连续系数条件弱化为不连续系数条件,即生成元 f 关于 y 满足左 Lipschitz 条件,关于 z 满足 Lipschitz 条件,并在该条件下获得了 BDSDE 解的存在性;文献[11]得到在生成元 f 关于 y 左连续和左 Lipschitz 且关于 z 满足 Lipschitz 条件下 BDSDE 解的存在性定理;文献[12]在生成元 f 关于 y 满足 Osgood 条件,且生成元 g 关于 y 满足一类新的非 Lipschitz 条件下建立了 BDSDE 解的存在唯一性定理.

受上述文章的启发,本文进一步弱化生成元 f, g 关于 (y, z) 的条件,在生成元 f 关于 (y, z) 连续且线性增长,同时生成元 g 关于 (y, z) 满足 Mao 的非 Lipschitz 条件下,获得了 BDSDE 解的存在性定理.

收稿日期:2015-12-15;修回日期:2016-06-27.

基金项目:国家自然科学基金(11371362)

第 1 作者简介:陈 敏(1990—),女,江苏宿迁人,中国矿业大学硕士研究生,研究方向为概率论与数理统计.

通信作者:江 龙(1964—),男,中国矿业大学教授,博士,研究方向为随机分析与金融数学, E-mail: jianglong365@hotmail.com.

1 预备知识

在陈述主要结果之前,先介绍本文所使用的一些记号.用 $|\cdot|$ 表示 Euclid 空间 \mathbf{R} 中 Euclidean 范数.对于 $z \in \mathbf{R}^{k \times d}$, $|z| := \sqrt{\text{Tr}(zz^*)}$, 其中 z^* 是 z 的转置. 设 (Ω, \mathcal{F}, P) 是概率空间, $(B_t)_{t \in [0, T]}$ 和 $(W_t)_{t \in [0, T]}$ 是定义在该空间上分别取 \mathbf{R}^1 值和 \mathbf{R}^d 值的两个相互独立的 Brown 运动, \mathcal{N} 是 \mathcal{F} 中的全体 P -零测度集构成的集合. 对每一个 $t \in [0, T]$, 定义

$$\mathcal{F}_t := \mathcal{F}_{0,t}^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B,$$

对任意随机过程 $\{\eta_s\}$, $\mathcal{F}_{0,t}^\eta := \sigma\{\eta_r - \eta_s, s \leq r \leq t\} \vee \mathcal{N}$.

记 $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P; \mathbf{R})$ 表示所有 \mathbf{R} 值, \mathcal{F}_T 可测且满足 $E[|\xi|^2] < +\infty$ 的随机变量 ξ 构成的空间. $S^2(0, T; \mathbf{R})$ 表示所有 \mathbf{R} 值, (\mathcal{F}_t) -适应且满足 $E[\sup_{t \in [0, T]} |Y_t|^2] < +\infty$ 的连续过程 $(Y_t)_{t \in [0, T]}$ 构成的空间. $M^2(0, T; \mathbf{R}^1)$ 表示所有 \mathbf{R}^1 值, (\mathcal{F}_t) -循序可测且满足 $E\left[\int_0^T |z_t|^2 dt\right] < +\infty$ 的连续过程 $(Z_t)_{t \in [0, T]}$ 构成的空间. S 表示所有从 $\mathbf{R}_+ := [0, +\infty]$ 映射到 \mathbf{R}_+ 且仅在 0 点取值为 0 的非减连续函数全体.

本文考虑的 BDSDE (f, g, T, ξ) 的解是指存在一对随机过程 $(y_t, z_t)_{t \in [0, T]} \in S^2(0, T; \mathbf{R}) \times M^2(0, T; \mathbf{R}^1)$ 满足 BDSDE (f, g, T, ξ) .

下面介绍本文后面要用到的对生成元 f, g , 假设

(H1) $g(t, 0, 0) \in M^2(0, T; \mathbf{R}^1)$;

(H2) f 关于 (y, z) 连续且线性增长, 即存在常数 $0 < K < +\infty$, 使得 $dP \times dt - a. e.$, 对任意的 $(y, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$, 有

$$|f(t, y, z)| \leq K(1 + |y| + |z|);$$

(H3) 设凹函数 $\rho(\cdot) \in S$ 满足 $\int_{0^+} \frac{du}{\rho(u)} = +\infty$, 使得 $dP \times dt - a. e.$, 对任意 $(y_1, z_1), (y_2, z_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$, 有 $|g(t, y_1, z_1) - g(t, y_2, z_2)|^2 \leq \rho(|y_1 - y_2|^2) + \alpha |z_1 - z_2|^2$. 其中 $0 < \alpha < 1$ 是常数.

(H'_2) 设凹函数 $\rho(\cdot) \in S$ 满足 $\int_{0^+} \frac{du}{\rho(u)} = +\infty$, 使得 $dP \times dt - a. e.$, 对任意 $(y_1, z_1), (y_2, z_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$, 有 $|f(t, y_1, z_1) - f(t, y_2, z_2)|^2 \leq \rho(|y_1 - y_2|^2) + C |z_1 - z_2|^2$. 其中 $C > 0$ 是常数.

注 1 $\rho(\cdot)$ 是至多线性增长函数. 因为 $\rho(\cdot)$ 是非减凹函数且 $\rho(0) = 0$, 所以存在常数 A , 使得对任意的 $x \in \mathbf{R}^+$, $0 \leq \rho(x) \leq A(1+x)$.

为了介绍与证明本文的主要结果, 介绍几个引理. 下面的引理 1 与引理 2 分别取自于文献[7]中的定理 1.1 与文献[8]中的定理 2.

引理 1 设生成元 g 满足假设 (H1) 及 (H3), 生成元 f 满足假设 $(f(t, 0, 0))_{t \in [0, T]} \in M^2(0, T; \mathbf{R})$ 和 (H'_2) , 则对任意的 $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P; \mathbf{R})$, BDSDE (f, g, T, ξ) 存在唯一解 $(y_t, z_t)_{t \in [0, T]}$.

引理 2 对任意的 $\xi^1, \xi^2 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P; \mathbf{R})$. 假设 BDSDE (f^1, g, T, ξ^1) 和 BDSDE (f^2, g, T, ξ^2) 满足引理 1 的假设条件, 则 BDSDE (f^1, g, T, ξ^1) 和 BDSDE (f^2, g, T, ξ^2) 分别有解 $(y_t^1, z_t^1)_{t \in [0, T]}$ 和 $(y_t^2, z_t^2)_{t \in [0, T]}$. 若 $dP - a. s.$, $\xi^1 \geq \xi^2$, 且满足 $dP \times dt - a. e.$, $f^1(t, y_t^1, z_t^1) \geq f^2(t, y_t^1, z_t^1)$, 则对任意的 $t \in [0, T]$, 有

$$dP - a. s., y_t^1 \geq y_t^2.$$

使用文献[2]中引理 1 的证明方法, 可以获得如下引理 3.

引理 3 假设生成元 f 满足条件 (H2) 时, 定义如下 $f_n(t, y, z)$:

$$f_n(t, y, z) = \inf_{u, v \in \mathbf{Q}} \{f(t, u, v) + n|y - u| + n|z - v|\}. \quad (2)$$

则对每一个 $n \geq 1$, 函数 $f_n(t, y, z)$ 是 (F_t) 的循序可测函数并满足 $dP \times dt - a. e.$,

(i) 线性增长: 任意的 y, z , $|f_n(t, y, z)| \leq K(1 + |y| + |z|)$, $0 < K < +\infty$;

(ii) 关于 n 单调: 任意的 y, z , $f_n(t, y, z)$ 关于 n 递增;

(iii) Lipschitz 条件:

任意的 y_1, y_2, z_1, z_2 , $|f_n(t, y_1, z_1) - f_n(t, y_2, z_2)| \leq n|y_1 - y_2| + n|z_1 - z_2|$;

(iv) 收敛:若 $(y_n, z_n) \rightarrow (y, z)$, 则 $f_n(t, y_n, z_n) \rightarrow f(t, y, z)$.

2 主要结果及其证明

下面的定理1是本文的主要结果.

定理1 设生成元 f, g 满足假设(H1)–(H3), 则对任意 $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P; \mathbf{R})$, BDSDE(f, g, T, ξ) 的解存在, 并存在唯一的最小解 $(y_t, z_t)_{t \in [0, T]}$, 即若 $(\hat{y}_t, \hat{z}_t)_{t \in [0, T]}$ 是 BDSDE(f, g, T, ξ) 的一个解, 则对每一个 $t \in [0, T]$, 必有 $y_t \leq \hat{y}_t$.

证明 设生成元 f, g 满足假设(H1)–(H3), 按(2)式定义 f_n , 则由引理3(iii)可以知道:

$$|f_n(t, y_1, z_1) - f_n(t, y_2, z_2)|^2 \leq 2n^2 |y_1 - y_2|^2 + 2n^2 |z_1 - z_2|^2.$$

令 $\kappa(x) = \rho(x) + 2n^2 x$, 则有

$$|f_n(t, y_1, z_1) - f_n(t, y_2, z_2)|^2 \leq \kappa(|y_1 - y_2|^2) + 2n^2 |z_1 - z_2|^2;$$

$$|g(t, y_1, z_1) - g(t, y_2, z_2)|^2 \leq \kappa(|y_1 - y_2|^2) + \alpha |z_1 - z_2|^2.$$

对于函数 $\kappa(x)$, 可以证明 $\kappa(x) \in S$ 且满足 $\int_{0^+} \frac{du}{\kappa(u)} = +\infty$, 所以生成元 $g(t, y, z)$ 满足假设(H1)和(H3), 根据引理3的(i)可以知道: 对任意的 $n \geq 1$, 生成元 $f_n(t, y, z)$ 满足假设 $f(t, 0, 0) \in M^2(0, T; \mathbf{R})$ 和(H2). 所以根据引理1得: 对任意 $n \geq 1, \xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P; \mathbf{R})$, BDSDE(f_n, g, T, ξ) 和 BDSDE(h, g, T, ξ) 分别有唯一的解 $(y_t^n, z_t^n)_{t \in [0, T]}$ 和 $(Y_t, Z_t)_{t \in [0, T]}$, 其中 $h(t, y, z) := K(1 + |y| + |z|)$, $0 < K < +\infty$.

以下分3个步骤完成定理1的证明.

第1步: 证明存在常数 C_1, C_2 , 对任意的 $n \geq 1$, 有

$$E[\sup_{t \in [0, T]} |y_t^n|^2] \leq C_1, E\left[\int_0^T |z_s^n|^2 ds\right] \leq C_2. \quad (3)$$

考虑引理2, 并结合引理3(i)得到, 对任意的 $n \geq 1$, 有

$$y_t^1 \leq y_t^n \leq y_t^n + 1 \leq Y_t, dP \times dt - a. e..$$

由单调有界定理可知, 存在一个 (\mathcal{F}_t) -循序可测的过程 $(y_t)_{t \in [0, T]}$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_t^n = y_t, dP \times dt - a. e.. \quad (4)$$

也可以得到, $dP \times dt - a. e.$, 对任意的 $n \geq 1$, 有

$$E[\sup_{t \in [0, T]} |y_t^n|^2] \leq E[G^2] < +\infty. \quad (5)$$

其中 $G := \sup_n \sup_{t \in [0, T]} |y_t^n|$.

故存在独立于 n 的常数 C_1 , 使得 $E[\sup_{t \in [0, T]} |y_t^n|^2] \leq C_1$.

下面对 $|y_t^n|^2$ 作 Itô 公式得, 对任意的 $n \geq 1$, 有

$$E[|y_t^n|^2] + E\left[\int_t^T |z_s^n|^2 ds\right] = E[|\xi|^2] + 2E\left[\int_t^T y_s^n f_n(s, y_s^n, z_s^n) ds\right] + E\left[\int_t^T |g(s, y_s^n, z_s^n)|^2 ds\right].$$

结合(H3), 注1以及不等式 $2ab \leq (\mu - 1)a^2 + (\mu - 1)^{-1}b^2$ ($\mu > 1$), 对任意的 $n \geq 1$, 有

$$|g(s, y_s^n, z_s^n)|^2 \leq |g(s, y_s^n, z_s^n) - g(s, 0, 0) + g(s, 0, 0)|^2 \leq$$

$$\mu |g(s, y_s^n, z_s^n) - g(s, 0, 0)|^2 + \left(1 + \frac{1}{\mu - 1}\right) |g(s, 0, 0)|^2 \leq$$

$$\mu [A(1 + |y_s^n|^2) + \alpha |z_s^n|^2] + \left(1 + \frac{1}{\mu - 1}\right) |g(s, 0, 0)|^2.$$

再考虑假设(H2), 不等式 $2ab \leq \lambda a^2 + \lambda^{-1}b^2$ ($\lambda > 0$) 和(5)式得, 对任意的 $n \geq 1$, 有

$$\begin{aligned} E\left[\int_t^T |z_s^n|^2 ds\right] &\leq E[|\xi|^2] + 2KE\left[\int_t^T y_s^n (1 + |y_s^n| + |z_s^n|) ds\right] + \\ 2E\left[\int_t^T \mu [A(1 + |y_s^n|^2) + \alpha |z_s^n|^2] + \left(1 + \frac{1}{\mu - 1}\right) |g(s, 0, 0)|^2 ds\right] &\leq \\ E[|\xi|^2] + KT^2 + \mu AT + (K + 2KT + \lambda KT + \mu AT)E[G^2] + \\ \left(1 + \frac{1}{\mu - 1}\right) E\left[\int_t^T |g(s, 0, 0)|^2 ds\right] + (K/\lambda + \mu\alpha)E\left[\int_t^T |z_s^n|^2 ds\right]. \end{aligned}$$

取 $\mu = \frac{1+\alpha}{2\alpha}, \lambda = \frac{2K}{1-\mu\alpha}$. 由于 $0 < \alpha < 1$, 故知道 $1 < \mu < 1/\alpha, \lambda > 0$ 且 $K/\lambda + \mu\alpha = (3+\alpha)/4 < 1$,

所以有 $E\left[\int_t^T |z_s^n|^2 ds\right] \leq \frac{4}{1-\alpha} C_2'$, 其中 C_2' 是取决于 $\xi, K, T, A, \mu, \lambda, G$ 且独立于 n 的常数.

于是存在仅取决于 $\alpha, \xi, K, T, A, \mu, \lambda, G$ 且独立于 n 的常数 C_2 , 使得

$$E\left[\int_t^T |z_s^n|^2 ds\right] \leq C_2.$$

第2步: 证明 $(y_t^n, z_t^n)_{t \in [0, T]}$ 是 $S^2(0, T; \mathbf{R}) \times M^2(0, T; \mathbf{R}^d)$ 中的柯西列.

对 $|y_t^n - y_t^m|^2$ 作 Itô 公式得, 对任意的 $n, m \geq 1$, 有

$$\begin{aligned} E[|y_0^n - y_0^m|^2] + E\left[\int_0^T |z_s^n - z_s^m|^2 ds\right] &= 2E\left[\int_0^T (y_s^n - y_s^m)(f_n(s, y_s^n, z_s^n) - f_m(s, y_s^m, z_s^m)) ds\right] + \\ E\left[\int_0^T |g(s, y_s^n, z_s^n) - g(s, y_s^m, z_s^m)|^2 ds\right] &\leq 2\left(E\left[\int_0^T |y_s^n - y_s^m|^2 ds\right]\right)^{\frac{1}{2}} \left(E\left[\int_0^T |f_n(s, y_s^n, z_s^n) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. f_m(s, y_s^m, z_s^m)|^2 ds\right]\right)^{\frac{1}{2}} + E\left[\int_0^T |g(s, y_s^n, z_s^n) - g(s, y_s^m, z_s^m)|^2 ds\right]. \end{aligned}$$

根据(3)式及假设(H2)有

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^T |f_n(s, y_s^n, z_s^n) - f_m(s, y_s^m, z_s^m)|^2 ds\right] &\leq 2E\left[\int_0^T |f_n(s, y_s^n, z_s^n)|^2 + |f_m(s, y_s^m, z_s^m)|^2 ds\right] \leq \\ &4K^2 E\left[\int_0^T (2 + |y_s^n|^2 + |y_s^m|^2 + |z_s^n|^2 + |z_s^m|^2) ds\right] \leq 8K^2(T + C_1 T + C_2), \end{aligned}$$

其中, C_1, C_2 是独立于 m, n 的常数.

从而存在仅取决于 K, T, C_1, C_2 且独立于 m, n 的常数 \bar{K} , 使得

$$\left(E\left[\int_0^T |f_n(s, y_s^n, z_s^n) - f_m(s, y_s^m, z_s^m)|^2 ds\right]\right)^{\frac{1}{2}} \leq \bar{K}.$$

另一方面, 由文献[5]知, 对任意的 $q \geq 1, x \in \mathbf{R}^+$, 有

$$\rho(x) \leq (q + 2A)x + \rho\left(\frac{2A}{q + 2A}\right). \quad (6)$$

于是根据(6)式及假设(H3)有

$$\begin{aligned} E[|y_0^n - y_0^m|^2] + E\left[\int_0^T |z_s^n - z_s^m|^2 ds\right] &\leq 2\bar{K} \left(E\left[\int_0^T |y_s^n - y_s^m|^2 ds\right]\right)^{\frac{1}{2}} + \\ (q + 2A)E\left[\int_0^T |y_s^n - y_s^m|^2 ds\right] &+ \alpha E\left[\int_0^T |z_s^n - z_s^m|^2 ds\right] + \rho(2A/q + 2A), \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^T |z_s^n - z_s^m|^2 ds\right] &\leq \frac{1}{1-\alpha} [2\bar{K} \left(E\left[\int_0^T |y_s^n - y_s^m|^2 ds\right]\right)^{\frac{1}{2}} + \\ (q + 2A)E\left[\int_0^T |y_s^n - y_s^m|^2 ds\right] &+ \rho\left(\frac{2A}{q + 2A}\right)]. \end{aligned}$$

而由(5)式知, 对任意的 $n, m \geq 1, s \in [0, T]$, 有 $dP - a. s.$, $|y_s^n - y_s^m| \leq 2G$. 再结合(4)式, 这样由 Lebesgue 控制收敛定理可知, 当 $n, m \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$E\left[\int_t^T |y_s^n - y_s^m|^2 ds\right] \rightarrow 0. \quad (7)$$

于是在上面不等式中, 先令 $n, m \rightarrow +\infty$, 再令 $q \rightarrow +\infty$, 可以得到

$$E\left[\int_0^T |z_s^n - z_s^m|^2 ds\right] \rightarrow 0.$$

于是 $(z_t^n)_{t \in [0, T]}$ 是 $M^2(0, T; \mathbf{R}^d)$ 中的一个柯西列, 其极限必在该空间中, 不妨设其极限为 $(z_t)_{t \in [0, T]}$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left[\int_0^T |z_s^n - z_s|^2 ds\right] = 0. \quad (8)$$

于是, 可以选取序列 $\{n\}$ 的一个子列 $\{n_k\}$ (不妨仍记为 $\{n\}$), 使得

$$E\left[\int_0^T |z_s^n - z_s|^2 ds\right] \leq 1/2^n.$$

因此

$$E\left[\int_0^T \sup_n |z_s^n - z_s|^2 ds\right] \leq E\left[\int_0^T \sum_{n=1}^{+\infty} |z_s^n - z_s|^2 ds\right] \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty.$$

故有

$$E\left[\int_0^T \sup_n |z_s^n|^2 ds\right] \leq 2E\left[\int_0^T \sup_n |z_s^n - z_s|^2 ds\right] + 2E\left[\int_0^T |z_s|^2 ds\right] < +\infty. \quad (9)$$

考虑引理 3 的(iv), (4) 式和(8) 式, 当 $n \rightarrow +\infty$, 有

$$f_n(s, y_s^n, z_s^n) \rightarrow f(s, y_s, z_s), dP \times dt - a. e. \quad (10)$$

对每一个 $s \in [0, T]$, 令

$$H_s = K(1 + G + \sup_n |z_s^n|).$$

从假设(H2) 和引理 3 的(i) 可知, 对任意的 $n \geq 1$, $dP \times dt - a. e.$,

$$|f_n(s, y_s^n, z_s^n) - f(s, y_s, z_s)| \leq 2H_s. \quad (11)$$

再结合(5) 式和(9) 式, 由不等式 $(a + b + c)^2 \leq 4a^2 + 4b^2 + 4c^2$ 和 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned} E\left[\left(\int_0^T |H_s| ds\right)^2\right] &\leq 4K^2 E\left[T^2 + \left(\int_0^T G ds\right)^2 + \left(\int_0^T \sup_n |z_s^n| ds\right)^2\right] \leq \\ &4K^2 (T^2 + T^2 E[G^2] + T \int_0^T \sup_n |z_s^n|^2 ds) < +\infty. \end{aligned}$$

考虑到(10) 式、(11) 式及上述不等式, 利用 Lebesgue 控制收敛定理知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left[\left(\int_0^T |f_n(s, y_s^n, z_s^n) - f(s, y_s, z_s)| ds\right)^2\right] = 0. \quad (12)$$

另一方面, 考虑假设(H3)、(6) 式和 BDG 不等式, 得到

$$\begin{aligned} E\left[\left|\int_0^T (g(s, y_s^n, z_s^n) - g(s, y_s, z_s)) dB_s\right|^2\right] &\leq 8E\left[\int_0^T |g(s, y_s^n, z_s^n) - g(s, y_s, z_s)|^2 ds\right] \leq \\ &8(q + 2A)E\left[\int_0^T |y_s^n - y_s|^2 ds\right] + 8\alpha E\left[\int_0^T |z_s^n - z_s|^2 ds\right] + 8\rho\left(\frac{2A}{q + 2A}\right). \end{aligned}$$

结合(4) 式及(8) 式, 当 $q \rightarrow +\infty$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left[\left|\int_0^T (g(t, y_t^n, z_t^n) - g(t, y_t, z_t)) dB_t\right|^2\right] = 0. \quad (13)$$

同时, 有 $dP \times dt - a. e.$, 对每一个 $n, m \geq 1, t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} |y_t^n - y_t^m| &\leq \int_t^T |f_n(s, y_s^n, z_s^n) - f_m(s, y_s^m, z_s^m)| ds + \left|\int_t^T (g(s, y_s^n, z_s^n) - \right. \\ &\quad \left. g(s, y_s^m, z_s^m)) dB_s\right| + \left|\int_t^T (z_s^n - z_s^m) dW_s\right|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{t \in [0, T]} |y_t^n - y_t^m|^2\right] &\leq 2E\left[\left(\int_0^T |f_n(s, y_s^n, z_s^n) - f_m(s, y_s^m, z_s^m)| ds\right)^2\right] + \\ &2E\left[\sup_{t \in [0, T]} \left|\int_t^T (g(s, y_s^n, z_s^n) - g(s, y_s^m, z_s^m)) dB_s\right|^2\right] + 2E\left[\sup_{t \in [0, T]} \left|\int_t^T (z_s^n - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. z_s^m) dW_s\right|^2\right] \leq 2E\left[\left(\int_0^T |f_n(s, y_s^n, z_s^n) - f_m(s, y_s^m, z_s^m)| ds\right)^2\right] + \\ &16E\left[\int_0^T |g(s, y_s^n, z_s^n) - g(s, y_s^m, z_s^m)|^2 ds\right] + 16E\left[\int_0^T |z_s^n - z_s^m|^2 ds\right]. \end{aligned}$$

在上述不等式中先令 $m \rightarrow +\infty$, 再考虑(8) 式, (12) 式以及(13) 式, 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left[\sup_{t \in [0, T]} |y_t^n - y_t|^2\right] = 0. \quad (14)$$

因而 $(y_t)_{t \in [0, T]}$ 是连续过程, 并且 $E\left[\sup_{t \in [0, T]} |y_t|^2\right] < +\infty$. 所以 $(y_t)_{t \in [0, T]} \in S^2(0, T; \mathbf{R})$.

第 3 步: 证明 $(y_t, z_t)_{t \in [0, T]}$ 是 BDSDE (f, g, T, ξ) 的最小解.

考虑到(8) 式, (12) 式, (13) 式及(14) 式, 在 BDSDE (f, g, T, ξ) 中两边取极限得到

$$y_t = \xi + \int_t^T f(s, y_s, z_s) ds + \int_t^T g(s, y_s, z_s) dB_s - \int_t^T z_s W_s, t \in [0, T].$$

故 $(y_t, z_t)_{t \in [0, T]}$ 是 $\text{BDSDE}(f, g, T, \xi)$ 的一个解. 设 $(\hat{y}_t, \hat{z}_t)_{t \in [0, T]}$ 是 $\text{BDSDE}(f, g, T, \xi)$ 的任意一个解, 考虑引理 3 的(ii) 和(iv), 由引理 2 可知, 对任意的 $t \in [0, T]$ 和 $n \geq 1$, dP -a. s., $y_t^n \leq \hat{y}_t$, 从而有 $y_t = \lim_{n \rightarrow \infty} y_t^n \leq \hat{y}_t$. 这就说明 $(y_t, z_t)_{t \in [0, T]}$ 是 $\text{BDSDE}(f, g, T, \xi)$ 最小解.

注 2 当定理 1 中取 $\rho(x) = Kx (K \geq 0)$ 时, 可以得到文献[9] 的结果.

参 考 文 献

- [1] Pardoux E, Peng S G. Adapted solution of a backward stochastic differentialequation[J]. Systems Control Letters, 1990, 14: 55-61.
- [2] Lepeltier J P, SanMartin J. Backward stochastic differential equations with continuous coefficient[J]. Statistics Probability Letters, 1997, 32(4): 425-430.
- [3] Mao X R. Adapted solutions of backward stochastic differential equations with non-Lipschitz coefficients[J]. Stochastic Processes and their Applications, 1995, 58: 281-292.
- [4] Kobylanski M. Backward stochastic differential equations and partial equations with quadratic growth[J]. The Annals of Probability, 2000, 28(2): 558-602.
- [5] Fan S J, Jiang L, Davison M. Uniqueness of solutions for multidimensional BSDEs with uniformly continuous generators[J]. Comptes Rendus Mathematique, 2010, 348(11): 683-686.
- [6] Pardoux E, Peng S G. Backward doubly stochastic differential equations and systems of quasilinear SPDEs[J]. Probability Theory Related Fields, 1994, 98(2): 209-227.
- [7] 周少甫, 曹小勇, 郭 潇. 倒向双重随机微分方程[J]. 应用数学, 2004, 17(1): 95-103.
- [8] 韩宝艳, 邢塔旭. 非 Lipschitz 条件下的倒向重随机微分方程[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2007, 35(4): 26-29.
- [9] Shi Y F, Gu Y L, Liu K. Comparison theorems of backward doubly stochastic differential equations and applications[J]. Stochastic Analysis and Applications, 2005, 23: 97-110.
- [10] Zhu Q F, Shi Y F. A class of backward doubly stochastic differential equations with discontinuous coefficients[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2014, 30(4): 965-976.
- [11] Lin Q. A generalized existence theorem of backward doubly stochastic differential equations[J]. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2010, 26(8): 1525-1534.
- [12] 王先飞, 江 龙, 马娇娇. 具有 Osgood 型生成元的多维倒向重随机微分方程[J]. 山东大学学报(理学版), 2015, 50(08): 24-33.

Backward Doubly Stochastic Differential Equations under Linear Growth Condition

CHEN Min, SHEN Xiaohui, JIANG Long

(College of Science, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China)

Abstract: This paper aims to investigate the uniqueness of minimal solution of Backward Doubly Stochastic Differential Equations, where the generator f is continuous and has a linear growth in (y, z) , and the generator g satisfies Mao's non-Lipschitz condition in (y, z) . The research results can be applied in stochastic controls and mathematical finance.

Keywords: Backward Doubly Stochastic Differential Equations; linear growth; non-Lipschitz condition; minimal solution