

T 形结构中的熵随机共振

段正路,段守惠,樊碧璇

(江西师范大学 物理与通信电子学院,南昌 330022)

摘要:在几何受限的布朗动力学系统中,系统结构对其中布朗粒子的运动能够产生许多新奇的影响,出现一些有意思的现象,例如随机共振.为此,对布朗粒子在漏斗状 T 形结构中的运动进行了数值探究,发现体系中存在熵随机共振现象.模拟结果显示 T 形结构中的熵随机共振与纵向力 G , 结构几何,以及横向周期驱动关系密切.借助熵势理论,T 形结构中的熵随机共振机制得到了充分阐释.由于 T 形结构具有简单性和一般性,在其中发现熵随机共振有助于进一步研究其他微结构系统中的随机共振现象,也有助于研究微结构系统中微小颗粒的控制与筛选.

关键词:布朗动力学系统;T 形结构;随机共振

中图分类号: O414

文献标志码: A

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



随机共振(Stochastic resonance, SR)是指在非线性系统中,噪声(随机干扰)对系统输出信号增强的一类现象.1981 年 BENZI 等人^[1]借助气候双稳态模型合理地解释了地球古气候周期性变迁的难题,并在此基础上提出随机共振这一概念^[2].此后,关于 SR 的研究多集中于双稳态系统^[3-7],其中包括一些实验验证.1983 年,FAUVE 和 HESLOT 首次在实验上,通过交流电路的 SCHMITT 触发器证实了随机共振现象^[6].1988 年,美国佐治亚理工大学 MCNAMARA, WIESENFELD 和 ROY 等人^[7]在环形激光器中发现随机共振现象.之后,微观动力学系统以及生物微结构中的随机共振引起了一定的关注^[8-12].其中,2008 年 BURADA 等人研究了布朗粒子在双腔结构中的运动,发现体系的熵势对其中的 SR 现象存在明显的影响,并由此提出熵随机共振^[11].2010 年 GHOSH 等人在 BURADA 的基础上提出双腔系统中的几何随机共振概念^[12].双腔系统中的 SR 对微小结构中的粒子,如细胞、纳米小颗粒等的运输,筛选与分离具有重要意义,因此激起了具有对称双腔结构 SR 现象的研究兴趣.然而,微观动力学系统中的 SR 可存在于多种几何结构体系中,如三腔系统^[13],甚至更复杂的多腔系统.尽管已有研究者提出了单稳态^[14]、三稳态^[15]以及多稳态^[16]的 SR 理论,但三腔或多腔系统的随机共振却少有研究.

受以上研究背景的启发,基于单稳态 SR 理论工作^[14],以及粒子在长通道中受熵势影响的扩散现象^[17],本文研究了布朗粒子在一种新颖而简单的 T 形腔室中的运动,并出于对布朗粒子在横向不再具备双稳、以及多稳态形式的受迫运动的好奇,参考双腔熵随机共振系统^[11],对 T 形腔中运动的布朗粒子施加一个横向周期驱动以及一个纵向外力,利用朗之万方程建立数值化模型,发现了 T 形腔室中的熵随机共振现象.

1 理论模型

布朗粒子在漏斗状 T 形结构中的运动,与 ZWANZIG 在文献^[17]中描述的粒子运动问题很相似,差别是此处用的是一个封闭的 T 形腔室,而不是开放的管状通道,且研究的是粒子的受迫运动,而不是自由扩散.对二维 T 形结构中的布朗粒子施加横向周期驱动 $F(t)$,以及一个纵向力 G ,可以建立图 1 所示模型,结构中

收稿日期:2022-02-27;修回日期:2022-03-08.

基金项目:国家自然科学基金(11964014);江西省主要学科学术与技术带头人(20204BCJ23026);江西省自然科学基金项目(20212BAB201018).

作者简介(通信作者):段正路(1977-),男,江西都昌人,江西师范大学教授,博士,研究方向为随机动力学,量子光学, E-mail:duanzhenglu@jxnu.edu.cn.

底部两侧边界向外倾斜,其斜率的大小满足 $k = d / (x_L - L)$.为了描述的简便,可将 T 形腔室的底部结构称为阱,阱两侧的边界称为阱侧壁.

对图 1 结构中布朗粒子的过阻尼运动,可以借助无量纲化朗之万方程

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}(t) + \vec{G} + \sqrt{D}\vec{\xi}(t), \quad (1)$$

描述^[11-12],其中, \vec{r} 是体系中布朗粒子的位置, $\vec{G} = -G\vec{e}_y$ 表示粒子受到的纵向力,且沿 y 轴负方向,横向力 $\vec{F}(t) = F(t)\vec{e}_x$ 则是粒子受到的外部周期驱动,一般形式为 $F(t) = F\cos(\omega t)$;随机力 $\vec{\xi}(t)$ 可视为为高斯白噪声,满足以下涨落耗散关系 $\langle \xi_x(t) \rangle = \langle \xi_y(t) \rangle = 0$, $\langle \xi_x(t)\xi_y(t') \rangle = 2\delta_{xy}\delta(t-t')$; D 为标准化噪声强度,与体系温度相关.将 $R(0, \sqrt{2D/\Delta t})$ 记为均值为 0, 标准差为 $\sqrt{2D/\Delta t}$ 的高斯分布随机数,利用 Euler 算法对(1) 式分 x, y 两个维度进行数值计算,可以得到任意标号为 i 的粒子从时间 t 到 $t + \Delta t$ 时刻的位置变化^[18]

$$x_i(t + \Delta t) = x_i(t) + [F(t) + R_{xi}(0, \sqrt{2D/\Delta t})]\Delta t,$$

$$y_i(t + \Delta t) = y_i(t) + [G + R_{yi}(0, \sqrt{2D/\Delta t})]\Delta t.$$

获得多粒子轨迹沿 x 方向的平均结果,

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t), i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

本文使用 MATLAB 软件,在程序中用条件语句对 T 形结构边界进行如下描述

$$\begin{cases} y \geq 0 \ \& \ y \leq y_L, x \in [-x_d, -x_L] \cup [x_L, x_d], \\ y \geq \pm kx + c \ \& \ y \leq y_L, x \in [-x_L, -L] \cup [L, x_L], \\ y \geq -d \ \& \ y \leq y_L, x \in [-L, L], \end{cases}$$

约束粒子的运动范围.要求粒子只能在 T 形结构内部运动,本文采用反射边界条件.

在外部周期力 $F(t)\vec{e}_x = F\cos(\omega t)\vec{e}_x$ 的作用下,由于布朗粒子对 $F(t)$ 的响应,其平均轨迹沿 x 轴方向会包含一个周期成分 $\bar{x}(D)\cos(\omega t + \varphi(D))$,其中 $\bar{x}(D)$ 为响应振幅, $\varphi(D)$ 是粒子响应 $F(t)$ 引起的相位差.模拟至少 500 个随机分布的布朗粒子在 T 形结构中受 $F(t)$ 的驱动,以时间间隔 $\Delta t = 0.001$ 游走至少 10^7 步,取粒子在 x 方向的平均运动轨迹,再按(2)式进行傅里叶变换^[19],可获得响应振幅 $\bar{x}(D)$, $\bar{x}(D)$ 满足

$$\begin{aligned} \bar{x}(D)\cos(\varphi(D)) &= \frac{1}{T} \int_0^T \langle x(t) \rangle \cos(\omega t) dt, \\ \bar{x}(D)\sin(\varphi(D)) &= \frac{1}{T} \int_0^T \langle x(t) \rangle \sin(\omega t) dt. \end{aligned} \quad (2)$$

通过曲线 $\bar{x}(D)$ 对体系的随机共振进行判断.扫描本文首页二维码,可以观看模拟动画.

2 纵向力 G 引起的熵随机共振

经典双腔熵随机共振(Entropic stochastic resonance, ESR)要求一个额外的纵向力 G 作用在系统中的布朗粒子上.这是经典双腔 ESR 与几何随机共振之间的一个显著差别.为此,首先探究 T 形结构中纵向力 G 对体系共振的影响.通过对比图 2(a)与(b),可以发现漏斗状 T 形系统中,纵向力 G 对体系表现出随机共振现象至关重要,即使 T 形结构阱侧壁的斜率远大于 1,在没有纵向力 G ,即 $G = 0$ 时,体系依然不能呈现出 SR 现象.

图 2(b)中的 $\bar{x}(D)$ 曲线显示,在纵向力 G 存在的情况下,随着结构中阱侧壁斜率 k 的减小,随机共振时 $\bar{x}(D)$ 曲线的峰值 $\bar{x}(D_{\max})$ 增大,而极低噪声 $D \rightarrow 0$ 时,对应着曲线的起点 $\bar{x}(D_0)$ 却在减小. $\bar{x}(D_0)$ 与阱的

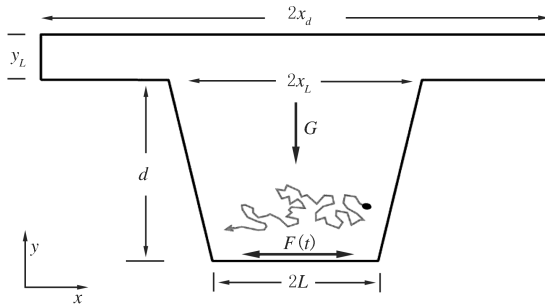
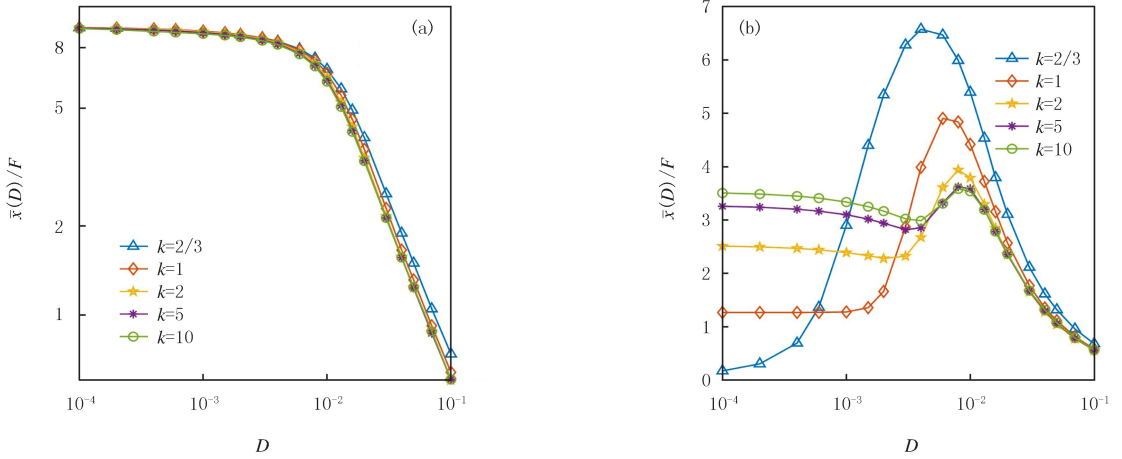


图1 布朗粒子在漏斗状T形腔中的运动模型

Fig.1 Motion model of a Brownian particle in a funnel-like T-shaped chamber

底部宽度 L 近似满足线性关系 $\bar{x}(D_0) \approx 4L/\pi$.



响应振幅 $\bar{x}(D)$ 曲线随 k 的变化 (a) $G=0.00$, (b) $G=0.15$. 其中, $k=2/3$ 对应结构中阱的底部宽度为 0; $F=0.1, \omega=0.02, x_d=0.75, x_L=0.3, y_L=0.02, d=0.2$.

图2 T形结构中 G 引起的熵随机共振

Fig.2 Entropic stochastic resonance induced by G in T-shaped structures

从结构以及粒子对横向力 $F(t)$ 的响应来看,上述情形可作如下理解.当 k 值较小时,阱侧壁倾斜角度小,粒子容易突破 G 产生的势垒 $V(x, y) = Gy$,并在阱外响应 $F(t)$.于是粒子运动能够获得更大的周期振动成分,对应振幅峰值 $\bar{x}(D_{max})$ 较大.从能量势与几何的角度考虑,可以理解低噪声时 $\bar{x}(D_0)$ 与阱的底部宽度 L 之间的几何关联.噪声取极限 $D \rightarrow 0$ 时,粒子难以克服 G 产生的势垒作用,从而导致其横向位移的周期振动中以振幅接近 L 的成分为主,经傅里叶变化即可获得 $\bar{x}(D_0)$ 与 L 之间的线性关系.

由于图 2(b)显示的随机共振严格要求纵向力 G 的存在,且与结构关联密切,而系统结构又可沿周期力 $F(t)$ 在横向等效为熵势,根据文献[11]这种随机共振现象可视为熵随机共振.

漏斗状 T 形结构中熵势的引入过程可以参考文献[17,20],在此引入其中的一些关键步骤.对外部场中粒子的自由扩散,引入如下二维 Smoluchowski 方程

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, y, t) = D e^{-V(x, y)/D} \frac{\partial}{\partial x} e^{V(x, y)/D} P(x, y, t) + D e^{-V(x, y)/D} \frac{\partial}{\partial y} e^{V(x, y)/D} P(x, y, t), \quad (3)$$

其中, $P(x, y, t)$ 为粒子的概率密度分布, $V(x, y)$ 表示粒子所处的能量势.在 T 形结构中 G 存在的情况下, $V(x, y)$ 可视为 Gy .对(3)式进行积分,可以得到

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = D \frac{\partial}{\partial x} \int dy [e^{-V(x, y)/D} \frac{\partial}{\partial x} e^{V(x, y)/D} P(x, y, t)]. \quad (4)$$

假设粒子在 y 方向的分布满足局部平衡,则可在(4)式中引入一个与横向位置 x 关联的势函数 $A(x)$. $A(x)$ 满足 $e^{-A(x, y)/D} = \int dy e^{-V(x, y)/D}$.从而可以得到粒子在 y 方向局部平衡的密度分布 $\rho(y; x) = e^{-V(x, y)/D} e^{A(x)/D}$.故 $P(x, y, t) \approx P(x, t) \rho(y; x)$,代入(4)式,可以得到如下二维动力学方程

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = D \frac{\partial}{\partial x} e^{A(x)/D} \frac{\partial}{\partial x} e^{A(x)/D} P(x, t),$$

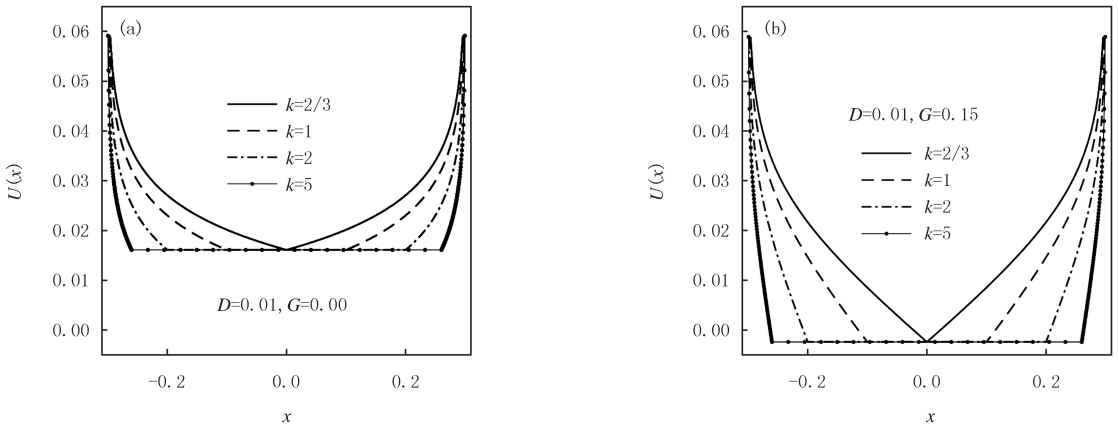
其中,势函数 $A(x)$ 即为熵势的理论形式.在 G 存在的情况下,其满足如下形式

$$A(x) = -D \ln \int_{Y_i(x)}^{Y_u(x)} e^{-Gy/D} dy, \quad (5)$$

其中, $Y_u(x), Y_i(x)$ 分别对应结构的上边界和下边界.仅考虑 T 形结构中阱的等效熵势,可以将(5)式化为

$$U(x) = \begin{cases} -D \ln \left[\int_{Y_i(x)}^0 e^{-Gy/D} dy \right] = -D \ln \left[\frac{D}{G} (e^{-GY_i(x)/D} - 1) \right], & G \neq 0, \\ -D \ln [-Y_i(x)], & G = 0. \end{cases} \quad (6)$$

在图 3(a)中,漏斗状 T 形结构中阱等效的熵势表现出明显的几何依赖性,并且,改变 T 形结构中阱的斜率,并没有影响熵势的高度.在没有纵向力 G 时,横向的熵势变化并不能引起体系的随机共振(图 2(a)).引入的纵向力 G 后,结构等效的熵势获得了明显增强(图 3(b)).由文献[17]可知 T 形结构或其他结构中纯粹的熵势高低不表示粒子自由能的大小,仅表示结构对粒子扩散的一种阻碍.在将粒子的二维运动等效为一维运动的过程中,可将这种阻碍认为是熵势对粒子扩散的减缓.



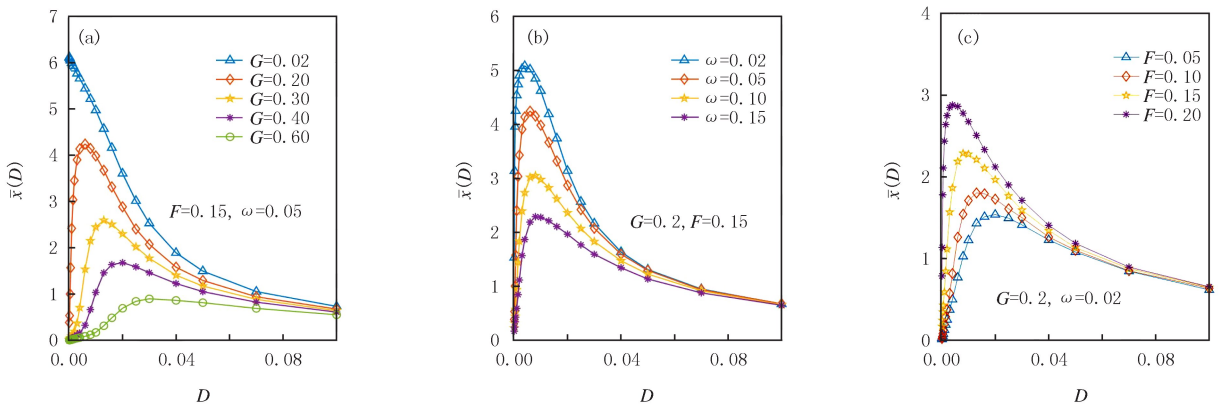
不同斜率大小时, 漏斗状 T 形结构中阱等效的熵势 (a) $G=0.00$, (b) $G=0.15$; 其他参数 $D=0.01, d=0.2, x_L=0.3$.

图3 熵势函数曲线

Fig.3 The curve of entropy potential function

在漏斗状 T 形腔中,没有纵向力 G 时,结构的阻碍并不足以引起体系的随机共振;而引入的纵向力 G 与体系的内部几何产生关联,增强了结构对粒子响应 $F(t)$ 的阻碍,导致体系呈现出了随机共振.因此,根据文献[11],也可以理解为 G 对系统熵势的增强,并导致了体系的熵随机共振.

将漏斗状 T 形结构中阱的斜率固定为 $k=2/3$,分别探究不同纵向力 G ,以及横向驱动强度 F 与频率 ω ,对系统熵随机共振的影响.在图 4 中,振幅曲线 $\bar{x}(D)$ 表现出明显的熵随机共振特点^[11]:1) F 与 ω 恒定时, $\bar{x}(D)$ 曲线表示的共振峰值 $\bar{x}(D_{max})$ 随 G 的减小而增大,而当 $G \rightarrow 0$ 时,体系中没有呈现出随机共振现象,即纵向力 G 对体系 SR 的产生不可或缺;2) ω 与 G 恒定时,振幅曲线的峰值 $\bar{x}(D_{max})$ 随 F 增大而增大,而对应的最佳噪声 D_{max} 却随之减小;3) F 与 G 恒定时,曲线峰值 $\bar{x}(D_{max})$ 随频率 ω 的减小明显增大.



$x_d=0.75, y_L=0.02, x_L=0.3, d=0.2, k=2/3$.

图4 不同参数对固定 T 形结构中熵随机共振的影响

Fig.4 Effects of different parameters on ESR in fixed T-shaped structure

对上述现象首先从熵势考虑,微小纵向力 G 对体系熵势的增强不够显著,导致弱噪声时漏斗状 T 形结构中的阱,不能阻碍粒子对 $F(t)$ 达到最佳响应,于是当 $G \rightarrow 0$ 时体系中也并没有观察到随机共振现象.随着 G

的增大,体系中阱对粒子的约束增强,粒子更倾向于在阱中滞留,共振时粒子逃逸出阱所需的噪声 D_{\max} 也随之增大,而由粒子平均轨迹获得的曲线峰值 $\bar{x}(D_{\max})$,显然会因为粒子的横向运动空间受到更大的压制而减小.从结构上考虑,对于固定强度的 G ,驱动强度 F 越弱,粒子在横向受 F 拖拽沿阱侧壁克服能量势,并响应 $F(t)$ 获得更大的周期振动越困难,故共振时要求的噪声 D_{\max} 越大,而峰值 $\bar{x}(D_{\max})$ 越低;驱动强度 F 固定时,较小的频率 ω ,则能保证粒子有充足的时间从结构的阱内运动到阱外,从而更好地响应 $F(t)$ 在阱外获得更大的周期振动,于是频率越低,共振时曲线的峰值 $\bar{x}(D_{\max})$ 越大.

3 结 论

文章主要探究了受迫运动的布朗粒子在漏斗状 T 形结构中的熵随机共振现象.在没有纵向力 G 的情况下,漏斗状 T 形系统中无随机共振现象.然而,在体系中引入 G 之后,可以观察到明显的熵随机共振现象.改变 G ,周期驱动,以及体系结构,对系统中的 SR 现象都有明显的影响.结合纵向力引起的能量势以及体系结构引起的熵势,揭示了体系中的熵随机共振产生的机制. T 形结构是一种典型的简单结构,在其中发现熵随机共振对不同微观体系中随机共振的研究都有参考意义,尤其在应用中可以为微观粒子,如细胞、生物大分子、纳米小颗粒等在狭长通道中的运输,筛选与分离提供参考.

参 考 文 献

- [1] BENZI R, SUTERA A, VULPIANI A. The mechanism of stochastic resonance[J]. *Journal of Physics A*, 1981, 14(11): L453-L457.
- [2] BENZI R, PARISI G, SUTERA A, et al. Stochastic resonance in climatic change[J]. *Tellus*, 1982, 34(1): 10-15.
- [3] GAMMAITONI L, HÄNGGI P, JUNG P, et al. Stochastic resonance[J]. *Reviews of Modern Physics*, 1998, 70(1): 223-287.
- [4] DYKMAN M, MCCLINTOCK P, MANNELLA R, et al. Stochastic resonance in the linear and nonlinear responses of a bistable system to a periodic field[J]. *JETP Lett*, 1990, 52(3): 141-144.
- [5] GAMMAITONI L, MARCHESONI F, MENICHELLA-SAETTA E, et al. Stochastic resonance in bistable systems[J]. *Physical Review Letters*, 1989, 62(4): 349-352.
- [6] FAUVE S, HESLOT F. Stochastic resonance in a bistable system[J]. *Physics Letters A*, 1983, 97(1/2): 5-7.
- [7] MCNAMARA B, WIESENFELD K, ROY R. Observation of stochastic resonance in a ring laser[J]. *Physical Review Letters*, 1988, 60(25): 2626-2629.
- [8] 练子丹. 噪声的利用[J]. *国外科技动态*, 1997(5): 23-25.
- [9] WIESENFELD K, MOSS F. 背景噪声的好处[J]. *科学(中文版)*, 1995(12): 22-25.
- [10] WIESENFELD K, MOSS F. Stochastic resonance and the benefits of noise: from ice ages to crayfish and SQUIDS[J]. *Nature*, 1995, 373(6509): 33-36.
- [11] BURADA P S, SCHMID G, REGUERA D, et al. Entropic stochastic resonance[J]. *Physical Review Letters*, 2008, 101(13): 130602.
- [12] GHOSH P K, MARCHESONI F, SAVEL'EV S E, et al. Geometric stochastic resonance[J]. *Physical Review Letters*, 2010, 104(2): 020601.
- [13] MEI R X, XU Y, LI Y G, et al. Characterizing stochastic resonance in a triple cavity[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 2021, 379(2198): 20200230.
- [14] EVSTIGNEEV M, REIMANN P, PANKOV V, et al. Stochastic resonance in monostable overdamped systems[J]. *EPL*, 2004, 65(1): 7-12.
- [15] XU P F, JIN Y F, XIAO S M. Stochastic resonance in a delayed triple-well potential driven by correlated noises[J]. *Chaos*, 2017, 27(11): 113109.
- [16] NICOLIS C. Stochastic resonance in multistable systems: the role of intermediate states[J]. *Physical Review E*, 2010, 82(1): 011139.
- [17] ZWANZIG R. Diffusion past an entropy barrier[J]. *The Journal of Physical Chemistry*, 1992, 96(10): 3926-3930.
- [18] 郭颖旦, 丁望峰, 杨建宋. 朗之万方程在布朗运动数值模拟中的时间尺度分析[J]. *杭州师范大学学报(自然科学版)*, 2015, 14(2): 170-174.
- [19] GUO Y D, DING W F, YANG J S. Time scale analysis of the Langevin equation in Brownian motion numerical simulations[J]. *Journal of Hangzhou Normal University(Natural Science Edition)*, 2015, 14(2): 170-174.
- [19] READ M P, GLAVEY R, MARCHESONI F, et al. Synchronization of geometric stochastic resonance by a bi-harmonic drive[J]. *The European Physical Journal B*, 2014, 87(9): 206.

[20] BURADA P S,SCHMID G,REGUERA D,et al.Entropic stochastic resonance:the constructive role of the unevenness[J].The European Physical Journal B,2009,69(1):11-18.

Entropic stochastic resonance in a T-shaped structure

Duan Zhenglu, Duan Shouhui, Fan Bixuan

(College of Physics and Communication Electronics, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China)

Abstract: In Brownian dynamical systems with confined structures, the system structures have many novel effects on the motion of Brownian particles inside, such as stochastic resonances. Hence, the motion of Brownian particles in a simple funnel-like T-shaped structure was investigated, and it was found that entropic stochastic resonance phenomenon exists in the system. Furthermore, the simulation results show that the entropic stochastic resonance in T-shaped structure is closely related to the vertical force G , the structure geometry, and the transverse periodic drive. According to the entropy potential theory, the mechanism of entropic stochastic resonance in T-shaped structure is fully explained. The entropic stochastic resonance in T-shaped structure is helpful for the exploration of stochastic resonance in different microscopic systems, as well as the control and screening of micro particles in the systems.

Keywords: Brownian dynamical systems; T-shaped structure; stochastic resonance

[责任编辑 杨浦 刘洋]