

广义 Camassa-Holm 方程的解在加权空间中的持续性

李用声¹, 郭慧静¹, 赵永叶², 杨美玲³

(1. 华南理工大学 数学学院, 广州 510640; 2. 广州航海学院 基础教学部, 广州 510725;

3. 东莞理工学院 计算机科学与技术学院, 广东 东莞 523808)

摘要: 主要研究了具有 $k+1$ 阶非线性项的广义 Camassa-Holm 方程的解的性质. 一方面, 通过运用合适的容许权函数, 证明了该方程的解在加权空间 L^p 中的持续性. 另一方面, 也研究了当 $x \rightarrow +\infty$ 和 $x \rightarrow -\infty$ 时解的渐近性质.

关键词: 广义 Camassa-Holm 方程; 持续性; 加权空间

中图分类号: O175.29

文献标志码: A

本文研究下面广义 Camassa-Holm 方程在加权 L^p 空间中的持续性.

$$\begin{cases} u_t - u_{xxt} + (k+2)u^k u_x = (k+1)u^{k-1}u_x u_{xx} + u^k u_{xxx}, x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0, x \in \mathbf{R}, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $k \geq 1, k \in \mathbf{N}$.

当 $k=1$ 时, (1) 式化为著名的 Camassa-Holm 方程

$$u_t - u_{xxt} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}. \quad (2)$$

1981 年, FUCHSSTEINER 等^[1] 在研究具有双 Hamilton 结构的广义 KdV 方程的完全可积性时, Camassa-Holm 方程首次被推导出来. 后来, 该方程被 CAMASSA 等^[2] 作为在平坦底部水波的单向运动模型而提出. 他们发现 (2) 有许多特性, 例如完全可积性, 双 Hamilton 结构, 尖峰孤立波解, 拥有无穷多的守恒律, 等等. 因此, (2) 引起了许多数学家及物理学家的兴趣, 得到了巨大的发展. CONSTANTIN^[3] 研究了周期 Camassa-Holm 方程的 Cauchy 问题. 文献[4-6] 研究了初值 $u_0 \in H^s(\mathbf{R}) (s > \frac{3}{2})$ 的局部适定性. BYERS^[7] 证明了 Camassa-Holm 方程的 Cauchy 问题在 Sobolev 空间 $H^s(\mathbf{R}) (s < \frac{3}{2})$ 是不适定的. 这就说明 $s = \frac{3}{2}$ 是 Camassa-Holm 方程局部适定性的临界指标. WU 等^[8] 研究了弱耗散周期 Camassa-Holm 方程解的局部适定性, 爆破和衰减. 他们在文献[9] 中得到了弱耗散 Camassa-Holm 方程 Cauchy 问题的全局解和爆破现象. BRANDOLESE^[10] 研究了解 $u \in C([0, T], H^s(\mathbf{R}))$ 在加权空间中的持续性和非持续性.

关于广义 Camassa-Holm 方程, WU 等^[11] 研究了具有周期边界条件的广义 Camassa-Holm 方程. 他们得到了爆破准则, 并且在适当的假设下得到了强解和弱解的整体存在性. ZHAO 等^[12-13] 证明了局部适定性定理和爆破准则, 以及在具有指数权重的 L^∞ 空间中强解的持续性.

受文献[10, 14] 的启发, 本文将应用一大类适中的权函数, 在加权的 L^p 空间中, 研究问题(1)强解的持续性和渐近行为. 更确切地说, 对于 $T > 0$, 将找到一大类适中的权函数 ϕ , 使得

$$\sup_{t \in [0, T]} (\|u(t)\phi\|_{L^p} + \|(\partial_x u(t))\phi\|_{L^p}) < \infty,$$

收稿日期: 2022-03-29; 修回日期: 2022-06-23.

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(11831003); 国家自然科学基金(11971356); 中央高校基本科研业务费专项基金面上项目(2019MS110; 2019MS112); 广州市基础与应用基础研究项目(202102020283).

作者简介(通信作者): 李用声(1965-), 男, 湖北襄阳人, 华南理工大学教授, 博士生导师, 主要从事非线性发展方程与无穷维动力系统的研究, E-mail: yshli@scut.edu.cn.

其中 $\| \cdot \|_{L^p}$ 代表通常的 L^p 范数. 本文的结果对具有高阶非线性 Camassa-Holm 型方程持续性的有关结论进行了推广.

本文的主要结论陈述如下:

定理 1 设 $T > 0, s > \frac{3}{2}$ 且 $2 \leq p \leq \infty$. 令 $u \in C([0, T], H^s(\mathbf{R}))$ 是问题(1) 如下初值对应的强解

$$u_0 \phi \in L^p(\mathbf{R}) \text{ 且 } (\partial_x u_0) \phi \in L^p(\mathbf{R}), \tag{3}$$

其中, ϕ 是容许权函数, 则对于任意的 $t \in [0, T]$, 有

$$\| u(t) \phi \|_{L^p} + \| (\partial_x u(t)) \phi \|_{L^p} \leq (\| u_0 \phi \|_{L^p} + \| (\partial_x u_0) \phi \|_{L^p}) e^{CM^k t},$$

其中, 常数 $C > 0$ 仅依赖于 $A, C_0, \alpha = \inf_{\mathbf{R}} v > 0, \int_{\mathbf{R}} \frac{v(x)}{e^{|x|}} dx < \infty$ (见定义 1) 和 M , 其中

$$M \equiv \sup_{t \in [0, T]} (\| u(t) \|_{L^\infty} + \| \partial_x u(t) \|_{L^\infty}) < \infty. \tag{4}$$

定理 1 中权函数 ϕ 的例子可以选取如下:

$$\phi(x) = \phi_{a,b,c,d}(x) = e^{a|x|^b} (1 + |x|)^c (\ln(e + |x|))^d,$$

其中 $a \geq 0, c, d \in \mathbf{R}, 0 \leq b \leq 1, ab < 1$.

注意到定理 1 并没有包含 $\phi = \phi_{1,1,c,d}, c < 0, d \in \mathbf{R}, \frac{1}{|c|} < p \leq \infty$ 的极限情形. 对于更一般的快速增长的权函数 $(1 + |\cdot|)^c (\ln(e + |\cdot|))^d \in L^p(\mathbf{R})$, 有下面定理 2 的持续性结果.

定理 2 设 $2 \leq p \leq \infty$ 且 ϕ 是容许权函数, 并将条件 $\int_{\mathbf{R}} \frac{v(x)}{e^{|x|}} dx < \infty$ 换成 $ve^{-|\cdot|} \in L^p(\mathbf{R})$. 若初值 u_0 满足

$$\begin{cases} u_0 \phi \in L^p(\mathbf{R}), \\ u_0 \phi^{\frac{1}{k+1}} \in L^{k+1}(\mathbf{R}), \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} (\partial_x u_0) \phi \in L^p(\mathbf{R}), \\ (\partial_x u_0) \phi^{\frac{1}{k+1}} \in L^{k+1}(\mathbf{R}), \end{cases}$$

且 $u \in C([0, T], H^s(\mathbf{R})) (s > \frac{3}{2})$ 是问题(1) 对应于初值 u_0 的强解, 则有

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} (\| u(t) \phi \|_{L^p} + \| (\partial_x u(t)) \phi \|_{L^p}) &< \infty, \\ \sup_{t \in [0, T]} (\| u(t) \phi^{\frac{1}{k+1}} \|_{L^p} + \| (\partial_x u(t)) \phi^{\frac{1}{k+1}} \|_{L^p}) &< \infty. \end{aligned}$$

下面给出问题(1)的强解关于空间变量的渐近性质.

定理 3 设权函数 $\phi(x) = \phi_{a,b,c,d}(x) = e^{a|x|^b} (1 + |x|)^c (\ln(e + |x|))^d$, 其中 $a \geq 0, 0 \leq b \leq 1, ab < 1, c, d \in \mathbf{R}$. 令 $s > \frac{3}{2}$ 且 $u_0 \in H^s, u_0 \not\equiv 0$ 满足 $u_0 \phi, (\partial_x u_0) \phi \in L^\infty(\mathbf{R}), u \in C([0, T], H^s(\mathbf{R}))$ 是问题(1) 的强解, 则

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \phi(x) (|u(x, t)| + |\partial_x u(x, t)|) < \infty. \tag{5}$$

另外, 下面的渐近性质成立

$$\begin{cases} u(x, t) = u_0(x) + e^{-x} t [\Phi^+(t) + \alpha_1(x, t)] - e^{-x} t [\Psi^+(t) + \alpha_2(x, t)], \\ u(x, t) = u_0(x) - e^x t [\Phi^-(t) + \beta_1(x, t)] - e^x t [\Psi^-(t) + \beta_2(x, t)], \end{cases} \tag{6}$$

其中, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha_{1,2}(x, t) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \beta_{1,2}(x, t) = 0$, 且 $\Phi^\pm, \Psi^\pm(t)$ 是 $[0, T]$ 上的连续函数.

1 预备知识

首先, 给出一些标准定义. 通常来说, 权函数是 \mathbf{R} 上的简单非负函数. 如果权函数 v 满足

$$v(x + y) \leq v(x)v(y), \forall x, y \in \mathbf{R},$$

则称 v 具有次可乘性. 另外, 对于给定的具有次可乘性的权函数 v , 如果正函数 ϕ 满足

$$\exists C_0 > 0, s.t. \phi(x + y) \leq C_0 v(x)\phi(y), \forall x, y \in \mathbf{R},$$

则称 ϕ 是 v -适中的.对于具有次可乘性的函数 v ,如果 ϕ 是 v -适中的,就说 ϕ 是适中的.

BRANDOLESE 在文献[10]中给出了一个权函数的例子:

$$\phi(x) = \phi_{a,b,c,d}(x) = e^{a|x|^b} (1 + |x|)^c (\ln(e + |x|))^d, \tag{7}$$

(i)对于 $a, c, d \geq 0$ 和 $0 \leq b \leq 1$, $\phi_{a,b,c,d}$ 是次可乘的.

(ii)如果 $a, c, d \in \mathbf{R}$ 且 $0 \leq b \leq 1$,那么 ϕ 是适中的.更准确来说,对于 $|a| \leq \alpha, b \leq \beta, |c| \leq \gamma$ 和 $|d| \leq \sigma$,存在正数 $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ 使得 $\phi_{a,b,c,d}$ 是 $\phi_{\alpha,\beta,\gamma,\sigma}$ -适中的.

下面给出 Camassa-Holm 型方程容许权函数的定义.

定义 1 ϕ 称为 Camassa-Holm 型方程的容许权函数,如果 ϕ 是 \mathbf{R} 上的局部绝对连续函数,且满足

(i)对某些 $A > 0, |\phi'(x)| \leq A |\phi(x)|, \text{ a.e. } x \in \mathbf{R};$

(ii) ϕ 是 v -适中的,其中权函数 v 是次可乘的,满足 $\inf_{x \in \mathbf{R}} v(x) > 0$ 和 $\int_{\mathbf{R}} \frac{v(x)}{e^{|x|}} dx < \infty.$

权函数适中性的重要性,可以由以下加权 Young 不等式体现.

命题 1^[10] 设 $1 \leq p \leq \infty$ 且 v 是 \mathbf{R}^n 上次可乘的权函数,则以下两个条件是等价的:

(i) ϕ 是对应常数 $C_0 > 0$ 的 v -适中的权函数.

(ii)对所有的可测函数 f_1 和 f_2 ,下面的加权 Young 不等式成立:

$$\| (f_1 * f_2) \phi \|_{L^p} \leq C_0 \| f_1 v \|_{L^1} \| f_2 \phi \|_{L^p}.$$

2 定理 1 的证明

令 $G(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$,则 $G(x)$ 是 $u - u_{xx} = \delta$ 的基本解,其中 δ 是 Dirac 广义函数,对任意的 $f \in L^p(\mathbf{R}),$

$1 \leq p \leq \infty$,有 $(1 - \partial_{xx})^{-1} f = G(x) * f.$ 因此(1)式可以改写为

$$\begin{cases} u_t + u^k u_x + G * (F_1(u))_x + G * F_2(u) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \tag{8}$$

其中,

$$F_1(u) = \frac{2k-1}{2} u^{k-1} u_x^2 + u^{k+1}, F_2(u) = \frac{k-1}{2} u^{k-2} u_x^3. \tag{9}$$

ZHAO 等^[12]证明了(8)的局部适定性.

定理 4 设 $1 \leq p, r \leq \infty$ 且 $s > \max\{\frac{3}{2}, 1 + \frac{1}{p}\}.$ 令 $u_0 \in B_{p,r}^s,$ 则存在 $T > 0$ 使得问题(8) 在空间 $E_{p,r}^s(T)$ 中有唯一解 $u.$ 解算子 $S(t) : u_0 \mapsto u = S(t)u_0$ 是从 $B_{p,r}^s$ 到 $E_{p,r}^{s'}(T) (s' < s)$ 上的局部 Hölder 连续映射,即:对两个初值函数 $u_0, v_0 \in B_{p,r}^s,$ 与其对应的解 $u(t) = S(t)u_0, v(t) = S(t)v_0$ 满足

$$\| u(t) - v(t) \|_{B_{p,r}^{s'}} \leq C \| u_0 - v_0 \|_{B_{p,r}^{\theta}},$$

其中,若 $s' \leq s - 1,$ 则 $\theta = 1;$ 若 $s - 1 < s' < s,$ 则 $\theta = s - s'.$

为了证明解在加权空间中的持续性,给出非线性项的估计.

引理 1 设 $1 \leq p \leq \infty, s > \frac{3}{2}, u \in C([0, T], H^s(\mathbf{R}))$ 是问题(8) 的解,那么对于任意适中的权函数 $f,$

下列估计式成立

$$\| F_1(u) f \|_{L^p} + \| F_2(u) f \|_{L^p} \leq CM^k (\| u f \|_{L^p} + \| u_x f \|_{L^p}),$$

其中, $F_1(u)$ 和 $F_2(u)$ 由(9) 式定义, C 依赖于 k 和 M (见(4) 式).

证明 由 $F_1(u)$ 的表达式和 Hölder 不等式,可以得到

$$\begin{aligned} \| F_1(u) f \|_{L^p} &\leq \| \frac{2k-1}{2} u^{k-1} u_x^2 f \|_{L^p} + \| u^{k+1} f \|_{L^p} \leq c' (\| u f \|_{L^p} \| u \|_{L^\infty}^{k-2} \| u_x \|_{L^\infty}^2 + \\ &\| u f \|_{L^p} \| u \|_{L^\infty}^k) \leq c' M^k \| u f \|_{L^p}, \end{aligned}$$

其中 c' 依赖于 $k.$

同样的,可以得到

$$\| [\frac{k-1}{2} u^{k-2} u_x^3] f \|_{L^p} \leq c'' \| u_x f \|_{L^p} \| u \|_{L^\infty}^{k-2} \| u_x \|_{L^\infty}^2 \leq c'' M^k \| u_x f \|_{L^p}.$$

由此就证得上述估计式成立.

定理 1 的证明 对于任意的正整数 N , 考虑 ϕ 的 N -截断

$$f(x) = f_N(x) = \min\{\phi, N\}.$$

那么, $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 是局部绝对连续函数, 满足 $\| f \|_{L^\infty} \leq N$, $|f'(x)| \leq A |f(x)|$ a.e. $x \in \mathbf{R}$.

另外, 令 $\alpha = \inf_{x \in \mathbf{R}} v(x) > 0$. 由次可乘性的定义, 有 $f(x+y) \leq C_1 v(x) f(y)$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$, 其中 $C_1 = \max\{C_0, \alpha^{-1}\}$. 也就是说, f 是 v -适中的权函数(对应常数 $C_1 > 0$). 另外, 常数 C_1 不依赖于 N . 这就是说, f 是关于 N 一致的 v -适中的加权函数.

首先考虑 $p \neq \infty$ 的情形. (8) 式乘以 $|uf|^{p-2}(uf)f$, 在 \mathbf{R} 上积分, 可以得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \| uf \|_{L^p}^p + \int_{\mathbf{R}} u^k u_x f |uf|^{p-1} dx + \int_{\mathbf{R}} (f \partial_x G * F_1(u)) |uf|^{p-2}(uf) dx + \\ \int_{\mathbf{R}} (fG * F_2(u)) |uf|^{p-2}(uf) dx = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

注意到 f 是 v -适中的加权函数(对应常数 C_1), 由 Hölder 不等式和命题 1, 有

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} (f \partial_x G * F_1(u)) |uf|^{p-2}(uf) dx + \int_{\mathbf{R}} (fG * F_2(u)) |uf|^{p-2}(uf) dx \leq \\ \| uf \|_{L^p}^{p-1} (\| f(\partial_x G * F_1(u)) \|_{L^p} + \| f(G * F_2(u)) \|_{L^p}) \leq \\ C_2 \| uf \|_{L^p}^{p-1} (\| \partial_x G v \|_{L^1} \| F_1(u) f \|_{L^p} + \| Gv \|_{L^1} \| F_2(u) f \|_{L^p}) \leq \\ C_3 \| uf \|_{L^p}^{p-1} (\| F_1(u) f \|_{L^p} + \| F_2(u) f \|_{L^p}). \end{aligned} \quad (11)$$

在最后一个不等式中, 应用了 $|\partial_x G(x)| \leq \frac{1}{2} e^{-|x|}$ 和 $\int_{\mathbf{R}} \frac{v(x)}{e^{|x|}} dx < \infty$. 另外,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} u^k u_x f |uf|^{p-1} dx \leq \| uf \|_{L^p}^{p-1} \| u^k u_x f \|_{L^p} \leq \| uf \|_{L^p}^{p-1} \| u_x f \|_{L^p} \| u \|_{L^\infty}^k \leq \\ M^k \| uf \|_{L^p}^{p-1} \| u_x f \|_{L^p}. \end{aligned} \quad (12)$$

因此, 由(10)~(12)式和引理 1, 可得:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \| uf \|_{L^p} \leq C_3 (\| F_1(u) f \|_{L^p} + \| F_2(u) f \|_{L^p}) + M^k \| u_x f \|_{L^p} \leq \\ C_4 M^k (\| uf \|_{L^p} + \| u_x f \|_{L^p}), \end{aligned} \quad (13)$$

其中 C_4 依赖于 k, v 和 ϕ , 但是不依赖于 p .

接下来, 估计 $u_x f$. (8) 式关于 x 求导, 并且由等式 $-\partial_{xx} G * f = f - G * f$, 可得:

$$\partial_t(u_x) + k u^{k-1} u_x^2 + u^k u_{xx} - F_1(u) + G * F_1(u) + \partial_x G * F_2(u) = 0. \quad (14)$$

(14)式乘以 $|u_x f|^{p-2}(u_x f)f$, 关于 x 在 \mathbf{R} 上积分, 可得:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} \partial_t(u_x) |u_x f|^{p-2}(u_x f) f dx + \int_{\mathbf{R}} k u^{k-1} u_x^2 |u_x f|^{p-2}(u_x f) f dx + \int_{\mathbf{R}} u^k u_{xx} |u_x f|^{p-2}(u_x f) f dx - \\ \int_{\mathbf{R}} F_1(u) |u_x f|^{p-2}(u_x f) f dx + \int_{\mathbf{R}} (G * F_1(u)) |u_x f|^{p-2}(u_x f) f dx + \\ \int_{\mathbf{R}} (\partial_x G * F_2(u)) |u_x f|^{p-2}(u_x f) f dx = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

注意到

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} u^k u_{xx} f |u_x f|^{p-2}(u_x f) dx = \int_{\mathbf{R}} u^k (\partial_x(u_x f) - u_x f_x) |u_x f|^{p-2}(u_x f) dx = \\ \int_{\mathbf{R}} u^k \partial_x \left(\frac{|u_x f|^p}{p} \right) dx - \int_{\mathbf{R}} u^k |u_x f|^{p-2}(u_x f) u_x f_x dx, \end{aligned} \quad (16)$$

又由 $f'(x) \leq A |f(x)|$, 可知

$$\int_{\mathbf{R}} u^k u_{xx} f | u_x f |^{p-2} (u_x f) dx \leq C_5 M^k \| u_x f \|_{L^p}^p + A M^k \| u_x f \|_{L^p}^p \leq C_6 M^k \| u_x f \|_{L^p}^p. \quad (17)$$

将(17)式代入(15)式,由命题 1,有

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \| u_x f \|_{L^p}^p &\leq - \int_{\mathbf{R}} k u^{k-1} u_x^2 | u_x f |^{p-2} (u_x f) f dx + C_6 M^k \| u_x f \|_{L^p}^p + \int_{\mathbf{R}} F_1(u) | u_x f |^{p-2} (u_x f) f dx - \\ &\int_{\mathbf{R}} (fG * F_1(u)) | u_x f |^{p-2} u_x f dx - \int_{\mathbf{R}} (f\partial_x G * F_2(u)) | u_x f |^{p-2} u_x f dx \leq k \| u \|_{L^\infty}^{k-1} \| u_x \|_{L^\infty} \| u_x f \|_{L^p}^p + \\ &C_6 M^k \| u_x f \|_{L^p}^p + \| F_1(u) f \|_{L^p} \| u_x f \|_{L^p}^{p-1} + \| u_x f \|_{L^p}^{p-1} (\| F_1(u) f \|_{L^p} + \| F_2(u) f \|_{L^p}) \leq \\ &k M^k \| u_x f \|_{L^p}^p + C_6 M^k \| u_x f \|_{L^p}^p + C_7 M^k \| u_x f \|_{L^p}^{p-1} (\| u f \|_{L^p} + \| u_x f \|_{L^p}). \end{aligned}$$

因此,

$$\frac{d}{dt} \| u_x f \|_{L^p} \leq C_8 M^k (\| u f \|_{L^p} + \| u_x f \|_{L^p}). \quad (18)$$

由(13)和(18)式,可得:

$$\frac{d}{dt} (\| u f \|_{L^p} + \| u_x f \|_{L^p}) \leq C M^k (\| u f \|_{L^p} + \| u_x f \|_{L^p}),$$

其中, C 和 M 不依赖于 p . 由 Gronwall 不等式可知,对任意的 $t \in [0, T]$,有

$$\| u f \|_{L^p} + \| u_x f \|_{L^p} \leq (\| u_0 f \|_{L^p} + \| (\partial_x u_0) f \|_{L^p}) e^{C M^k t},$$

其中, $C > 0$ 依赖于 k, v 和 ϕ . 注意到对于 a.e. $x \in \mathbf{R}$, 当 $N \rightarrow \infty$ 时, $f(x) = f_N(x) \rightarrow \phi(x)$. 由(3)式可得

$$\| u \phi \|_{L^p} + \| u_x \phi \|_{L^p} \leq (\| u_0 \phi \|_{L^p} + \| (\partial_x u_0) \phi \|_{L^p}) e^{C M^k t}. \quad (19)$$

下面证明 $p = \infty$ 的情形. 注意到 $u_0, \partial_x u_0 \in L^2(\mathbf{R}) \cap L^\infty(\mathbf{R})$ 且 $f = f_N \in L^\infty(\mathbf{R})$. 所以,对于任意的 $2 \leq q < \infty$, 有

$$\| u f \|_{L^q} + \| u_x f \|_{L^q} \leq (\| u_0 f \|_{L^q} + \| (\partial_x u_0) f \|_{L^q}) e^{C M^k t},$$

其中, C 和 M 不依赖于 q . 令 $q \rightarrow \infty$, 有

$$\| u f \|_{L^\infty} + \| u_x f \|_{L^\infty} \leq (\| u_0 f \|_{L^\infty} + \| (\partial_x u_0) f \|_{L^\infty}) e^{C M^k t}.$$

令 $N \rightarrow \infty$, 则 $p = \infty$ 时, 估计式(19)成立. 这就完成了定理 1 的证明.

3 定理 2 的证明

$\phi^{\frac{1}{k+1}}$ 是 $v^{\frac{1}{k+1}}$ - 适中的权函数, 满足 $| (\phi^{\frac{1}{k+1}})' | \leq \frac{A}{k+1} \phi^{\frac{1}{k+1}}$. 此外, $\inf_{\mathbf{R}} v^{\frac{1}{k+1}} > 0$. 由条件 $v e^{-|x|} \in L^p(\mathbf{R})$, $v^{\frac{1}{k+1}} e^{-\frac{|x|}{k+1}} \in L^{(k+1)p}(\mathbf{R})$ 和 Hölder 不等式, 可知 $v^{\frac{1}{k+1}} e^{-|x|} \in L^1(\mathbf{R})$, 那么该权函数满足定理 1 中的条件. 关于权函数 $\phi^{\frac{1}{k+1}}$, 在定理 1 中令 $p = k + 1$, 可以得到

$$\| u \phi^{\frac{1}{k+1}} \|_{L^{k+1}} + \| u_x \phi^{\frac{1}{k+1}} \|_{L^{k+1}} \leq (\| u_0 \phi^{\frac{1}{k+1}} \|_{L^{k+1}} + \| (\partial_x u_0) \phi^{\frac{1}{k+1}} \|_{L^{k+1}}) e^{C M^k t}.$$

当 $p < \infty$ 时, 在证明定理 1 的过程中, 有下面的不等式

$$\frac{d}{dt} \| u f \|_{L^p} \leq M^k \| u f \|_{L^p} + \| f(\partial_x G * F_1(u)) \|_{L^p} + \| f(G * F_2(u)) \|_{L^p}, \quad (20)$$

和

$$\frac{d}{dt} \| u_x f \|_{L^p} \leq C_9 M^k (\| u f \|_{L^p} + \| u_x f \|_{L^p}) + \| f(\partial_x G * F_2(u)) \|_{L^p} + \| f(G * F_1(u)) \|_{L^p}. \quad (21)$$

由命题 1 和条件 $v e^{-|x|} \in L^p(\mathbf{R})$, 可得

$$\begin{aligned} \| f(\partial_x G * F_1(u)) \|_{L^p} &\leq C_{10} \| e^{-|x|} v \|_{L^p} \| f(\frac{2k-1}{2} u^{k-1} u_x^2 + u^{k+1}) \|_{L^1} \leq C_{11} (\| f u^{k-1} u_x^2 \|_{L^1} + \\ &\| f^{\frac{1}{k+1}} u \|_{L^{k+1}}^{k+1}) \leq C_{11} (\| f^{\frac{k-1}{k+1}} u^{k-1} \|_{L^{\frac{k+1}{k-1}}} \| f^{\frac{2}{k+1}} u_x^2 \|_{L^{\frac{k+1}{2}}} + \| f^{\frac{1}{k+1}} u \|_{L^{k+1}}^{k+1}) \leq \end{aligned}$$

$$C_{11}(\|f^{\frac{1}{k+1}}u\|_{L^{k+1}}^{k-1}\|f^{\frac{1}{k+1}}u_x\|_{L^{k+1}}^2+\|f^{\frac{1}{k+1}}u\|_{L^{k+1}}^{k+1})\leq C_{12}e^{(k+1)CM^k t}, \quad (22)$$

其中 C_{12} 不依赖于 $p < \infty$ 和 N .

类似地,可以得到如下估计:

$$\|f(G * F_2(u))\|_{L^p} \leq C_{13}e^{(k+1)CM^k t}, \quad (23)$$

$$\|f(G * F_1(u))\|_{L^p} \leq C_{14}e^{(k+1)CM^k t}, \quad (24)$$

$$\|f(\partial_x G * F_2(u))\|_{L^p} \leq C_{15}e^{(k+1)CM^k t}. \quad (25)$$

由(20)、(22)和(23)式可得

$$\frac{d}{dt}\|uf\|_{L^p} \leq M^k\|uf\|_{L^p} + C_{16}e^{(k+1)CM^k t}. \quad (26)$$

将(24)、(25)式代入(21)式,有

$$\frac{d}{dt}\|u_x f\|_{L^p} \leq C_9 M^k(\|uf\|_{L^p} + \|u_x f\|_{L^p}) + C_{17}e^{(k+1)CM^k t}. \quad (27)$$

最后,由(26)和(27)式,可得

$$\frac{d}{dt}(\|uf\|_{L^p} + \|u_x f\|_{L^p}) \leq C_{18}M^k(\|uf\|_{L^p} + \|u_x f\|_{L^p}) + C_{19}e^{(k+1)CM^k t}.$$

应用 Gronwall 不等式,得到

$$\|uf\|_{L^p} + \|u_x f\|_{L^p} \leq e^{C_{18}M^k t}[(\|u_0 f\|_{L^p} + \|(\partial_x u_0)f\|_{L^p}) + C_{19}t e^{(k+1)CM^k t}],$$

其中, C_{18} 和 C_{19} 不依赖于 $p < \infty$ 和 N .

令 $N \rightarrow \infty$,可以得到 $2 \leq p < \infty$ 时的结果.与定理 1 的讨论一样,令 $q \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty$,可以得到 $p = \infty$ 时的结果.由此就完成了定理 2 的证明.

4 定理 3 的证明

在定理 3 的假设条件下,不等式(5)是成立的.事实上,因为 $u_0 \phi, (\partial_x u_0)\phi \in L^\infty(\mathbf{R})$,并且 ϕ 是容许权函数,所以定理 1 成立,当 $p = \infty$ 时,有

$$\|u(t)\phi\|_{L^\infty} + \|(\partial_x u(t))\phi\|_{L^\infty} < \infty, \forall t \in [0, T].$$

因此,对于 $t \in [0, T]$

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \phi(x)(|u(x, t)| + |\partial_x u(x, t)|) < \infty \quad (28)$$

是一致成立的.对(8)的第一个式子进行积分,可得

$$u(x, t) = u_0(x) - \int_0^t u^k u_x(x, s) ds - \int_0^t \partial_x G * F_1(u)(x, s) ds - \int_0^t G * F_2(u)(x, s) ds. \quad (29)$$

在(28)式中,取 $\phi(x) = e^{\frac{|x|}{k+1}}$,可得 $|u(x, t)| + |\partial_x u(x, t)| \leq C_{20}e^{\frac{|x|}{k+1}}$.除此以外,可得

$$\left| \int_0^t u^k u_x ds \right| \leq C_{20}^{k+1} e^{-|x|} t \rightarrow 0, |x| \rightarrow +\infty. \quad (30)$$

在 $0 < t \leq T$ 上,令

$$\Phi^\pm(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} e^{\pm y} h_1(y, t) dy, h_1(y, t) = \frac{1}{t} \int_0^t F_1(u)(y, s) ds,$$

和

$$\Psi^\pm(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} e^{\pm y} h_2(y, t) dy, h_2(y, t) = \frac{1}{t} \int_0^t F_2(u)(y, s) ds.$$

由 $F_1(u) = \frac{2k-1}{2} u^{k-1} u_x^2 + u^{k+1}$ 和(28)式,可以得到

$$e^{|y|} |F_1(u)| \leq k \left[e^{\frac{|y|}{k+1}} (|u| + |u_x|) \right]^{k+1} = k \left[e^{\frac{|y|}{k+1}} (1 + |y|) (\ln(e + |y|))^d (|u| + |u_x|) \right]^{k+1} (1 + |y|)^{-(k+1)} (\ln(e + |y|))^{-(k+1)d} \leq B (1 + |y|)^{-(k+1)} (\ln(e + |y|))^{-(k+1)d},$$

其中,

$$B = k \left[\sup_{y \in \mathbf{R}} e^{\frac{|y|}{k+1}} (1 + |y|) (\ln(e + |y|))^d (|u| + |u_x|) \right]^{k+1} < \infty.$$

因此,对于任意的 $t \in [0, T]$, 有

$$\int_{\mathbf{R}} e^{|y|} |F_1(u)| dy < \infty. \tag{31}$$

类似地,对于任意的 $t \in [0, T]$, 有

$$\int_{\mathbf{R}} e^{|y|} |F_2(u)| dy < \infty. \tag{32}$$

所以 $\Phi^\pm(t)$ 和 $\Psi^\pm(t)$ 的定义是合理的.另外,由解的连续性可知,当 $t \rightarrow 0^+$ 时,有 $h_1(t) \rightarrow F_1(u_0), h_2(t) \rightarrow F_2(u_0)$.所以可以扩充 $\Phi^\pm(t)$ 和 $\Psi^\pm(t)$ 在 $t = 0$ 处的定义,令 $\Phi^\pm(0) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} e^{\pm y} F_1(u_0) dy, \Psi^\pm(0) =$

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} e^{\pm y} F_2(u_0) dy.$$

由 $G(x - y) = \frac{1}{2} e^{-|x-y|}$ 和 $\partial_x G(x - y) = -\frac{1}{2} \text{sgn}(x - y) e^{-|x-y|}$, 可得

$$\begin{aligned} - \int_0^t \partial_x G * F_1(u)(x, s) ds &= \frac{1}{2} \int_0^t ds \int_{\mathbf{R}} \text{sgn}(x - y) e^{-|x-y|} F_1(u) dy = \frac{1}{2} \int_0^t ds \int_{-\infty}^x e^{-x+y} F_1(u) dy - \\ &\frac{1}{2} \int_0^t ds \int_x^{+\infty} e^{-x-y} F_1(u) dy = \frac{1}{2} \int_0^t ds \int_{\mathbf{R}} e^{-x+y} F_1(u) dy - \frac{1}{2} \int_0^t ds \int_x^{+\infty} (e^{-x-y} + e^{-x+y}) F_1(u) dy = \\ &e^{-x} t [\Phi^+(t) - \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} (e^y + e^{2x-y}) h_1(y, t) dy]. \end{aligned} \tag{33}$$

由(31)式可知,当 $x \rightarrow +\infty$ 时,有

$$\begin{aligned} | \int_x^{+\infty} (e^y + e^{2x-y}) h_1(y, t) dy | &\leq 2 \int_x^{+\infty} e^y |h_1(y, t)| dy = 2 \int_x^{+\infty} e^y | \frac{1}{t} \int_0^t F_1(u) ds | dy \leq \\ &\frac{2}{t} \int_0^t ds \int_x^{+\infty} e^y |F_1(u)| dy \rightarrow 0. \end{aligned} \tag{34}$$

另一方面,

$$- \int_0^t G * F_2(u)(x, s) ds = -e^{-x} t [\Psi^+(t) - \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} (e^y - e^{2x-y}) h_2(y, t) dy], \tag{35}$$

由(32)式可知,当 $x \rightarrow +\infty$ 时,有

$$| \int_x^{+\infty} (e^y - e^{2x-y}) h_2(y, t) dy | \leq \frac{2}{t} \int_0^t ds \int_x^{+\infty} e^y |F_2(u)| dy \rightarrow 0. \tag{36}$$

结合(29)、(30)和(33)~(36)式,证明了(6)式中的第一个渐近性质.

用同样的方法,可以得到

$$\begin{aligned} - \int_0^t \partial_x G * F_1(u)(x, s) ds &= -e^x t [\Phi^-(t) - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x (e^{-2x+y} + e^{-y}) h_1(y, t) dy], \\ - \int_0^t G * F_2(u)(x, s) ds &= -e^x t [\Psi^-(t) - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x (e^{-y} - e^{-2x+y}) h_2(y, t) dy], \end{aligned}$$

并且当 $x \rightarrow -\infty$ 时,

$$\begin{aligned} | \int_{-\infty}^x (e^{-2x+y} + e^{-y}) h_1(y, t) dy | &\leq \frac{2}{t} \int_0^t ds \int_{-\infty}^x e^{-y} |F_1(u)| dy \rightarrow 0, \\ | \int_{-\infty}^x (e^{-y} - e^{-2x+y}) h_2(y, t) dy | &\leq \frac{2}{t} \int_0^t ds \int_{-\infty}^x e^{-y} |F_2(u)| dy \rightarrow 0. \end{aligned}$$

这就完成了(6)式中的第二个渐近性质.由此就完成了定理 3 的证明.

参 考 文 献

[1] FUCHESSTEINER B, FOKAS A S. Symplectic structures, their Bäcklund transformations and hereditary symmetries[J]. Physica D,

- 1981,4(1):47-66.
- [2] CAMASSA R,HOLM D D.An integrable shallow water equation with peaked solitons[J].Phys Rev Lett,1993,71(11):1661-1664.
- [3] CONSTANTIN A.On the Cauchy problem for the periodic Camassa-Holm equation[J].J Diff Eqns,1997,141(2):218-235.
- [4] CONSTANTIN A,ESCHER J.Global existence and blow-up for a shallow water equation[J].Ann Scuola Norm Sup Pisa Cl Sci,1998,26(4):303-328.
- [5] CONSTANTIN A,ESCHER J.Well-posedness,global existence,and blow-up phenomena for a periodic quasi-linear hyperbolic equation [J].Commun Pure Appl Math,1998,51(5):475-504.
- [6] LI Y A,OLVER P J.Well-posedness and blow-up solutions for an integrable nonlinearly dispersive model wave equation[J].J Diff Eqns,2000,162(1):27-63.
- [7] BYERS P.Existence time for the Camassa-Holm equation and the critical Sobolev index[J].Indiana Univ Math J,2006:941-954.
- [8] WU S Y,YIN Z Y.Blow up,blow up rate and decay of the solution of the weakly dissipative Camassa-Holm equation[J].J Math Phys,2006,47(1):013504.
- [9] WU S Y,YIN Z Y.Global existence and blow up phenomena for the weakly dissipative Camassa-Holm equation[J].J Diff Eqns,2009,246(11):4309-4321.
- [10] BRANDOLESE L.Breakdown for the Camassa-Holm equation using decay criteria and persistence in weighted spaces[J].Int Math Res Notices,2012,2012(22):5161-5181.
- [11] WU Y,ZHAO P.A Note on the generalized Camassa-Holm equation[J].J Funct Space,2014,2014:1-12.
- [12] ZHAO Y Y,LI Y S,YAN W.Local well-posedness and persistence properties for the generalized Novikov equation[J].Discr Contin Dyn Syst Ser A,2014,34(2):803-820.
- [13] ZHAO Y Y,LI Y S,YAN W.The global weak solutions to the Cauchy problem of the generalized Novikov equation[J].Appl Anal,2015,94(7):1334-1354.
- [14] WEI L,ZENG Q.Persistent Decay of Solutions to the k -abc Equation in Weighted L^p Spaces[J].J Dyn Diff Eqns,2020,32(1):219-232.

Persistence properties for a generalized Camassa-Holm equation in weighted spaces

Li Yongsheng¹, Guo Huijing¹, Zhao Yongye², Yang Meiling³

(1. School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China; 2. Department of Basic Courses, Guangzhou Maritime University, Guangzhou 510725, China; 3. School of Computer Science and Technology, Dongguan University of Technology, Dongguan 523808, China)

Abstract: In this paper, we study the generalized Camassa-Holm equation with $(k+1)$ -degree nonlinearities. By use of moderate weight functions, we prove some persistence results for the solution to the equation in weighted L^p spaces. We also establish the asymptotic profiles of the solution as $x \rightarrow +\infty$ and $x \rightarrow -\infty$.

Keywords: generalized Camassa-Holm equations; persistence properties; weighted spaces

[责任编辑 陈留院 赵晓华]