

# 一类推广的自治收敛定理的应用

童艳春, 陈娜

(周口师范学院 数学与统计学院, 河南 周口 466001)

**摘要:**主要研究一类带有快慢进展的结核病模型,利用再生矩阵法,通过推广的自治收敛定理证明该模型正平衡点的全局稳定性,并通过数值模拟验证其结果的正确性.从求证过程中可以看到,使用推广的自治收敛定理在解决全局稳定问题上有一定的规律可循,但在高维系统上也存在一定的局限性.

**关键词:**平衡点;全局渐近稳定性;自治收敛定理

**中图分类号:**O175.13

**文献标志码:**A

稳定性理论是由俄国数学家 Lyapunov 于 1892 年创立的,其特点是根据微分方程本身的结构和特点,研究当时间趋于无穷时解的性态.在自动控制、生态生物、生化反应等自然科学和工程技术等方面都有着广泛的应用.一般地,研究微分方程系统中平衡点的稳定性可利用系统在平衡点处的 Jacobian 矩阵进行判定.而在实际问题中,如何判定或证明平衡点的全局稳定性则更是关键的问题.目前,常用构造 Lyapunov 函数法解决全局稳定问题,但该函数的构造方法却多种多样,例如能量函数法,类比法,梯度法等等,没有一般的规律可循.

设  $n$  维自治系统

$$\frac{dx}{dt} = f(x), x \in \mathbf{R}^n, \quad (1)$$

其中  $f(x) \in C(D \subseteq \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$  满足解的存在唯一性条件,由初始条件  $x(t_0) = x_0$  决定的解  $x(t; t_0, x_0)$  的存在区间为  $[t_0, +\infty)^{[1-2]}$ .如果系统(1)具有稳健性,而且在区域  $D$  内可以排除存在周期解,那么平衡点的局部稳定就蕴含着全局稳定<sup>[3-4]</sup>.而平面系统中的 Bendixson-Dulac 准则是自治收敛定理向高维系统的推广,也为解决全局稳定问题提供了新的方法.关于更多平衡点稳定性问题可参阅文献[3-7].

## 1 基本理论

基本假设:1) 区域  $D$  是单连通的;2) 系统(1)在  $D$  内有唯一的平衡点  $x^* \in D$ ;3) 系统(1)在  $D$  内存在一个紧吸引子集  $K \subseteq D$ .

设  $P(x)$  是  $C_n^2 \times C_n^2$  矩阵函数,且在  $D$  上有连续导数.假设  $P^{-1}(x)$  存在,且在  $K$  上连续,定义

$$q = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x_0 \in K} \frac{1}{t} \int_0^t \mu(B(x(s; t_0, x_0))) ds, \quad (2)$$

其中  $B = P_f P^{-1} + P \frac{\partial f}{\partial x} P^{-1}$ ,  $P_f$  表示与  $P$  同阶的矩阵,且每一个元素为  $P$  的相应元素沿  $f$  方向的导数,  $\frac{\partial f^{[2]}}{\partial x} \in C_n^2 \times C_n^2$  表示 Jacobian 矩阵  $\frac{\partial f}{\partial x}$  的第二加性复合矩阵,  $\mu(B)$  为  $B$  的 Lozinskiĭ 测度,即  $\mu(B) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|I + hB\| - 1}{h}$ .

收稿日期:2015-11-27;修回日期:2016-07-26.

基金项目:国家自然科学基金(61103143);河南科技计划项目(162102310604);河南省高等学校重点研究项目(15A110047).

第1作者简介(通信作者):童艳春(1981-),女,河南周口人,周口师范学院讲师,研究方向为微分方程及其应用,E-mail: tongyan\_chun@126.com.

当  $q < 0$  时, 系统(1) 无任何闭轨道, 包括周期轨道、同宿轨道和异宿轨道的情形, 从而有如下定理成立.

推广的自治收敛定理<sup>[2]</sup> 若假设条件 1), 2) 和 3) 成立, 则当  $q < 0$  时, 系统(1) 在  $D$  内唯一的平衡点  $x^*$  是全局渐近稳定的.

由于构造 Lyapunov 函数法比较困难, 本文将利用推广的自治收敛定理, 通过定义(2) 来分析一类结核病模型的全局稳定性, 并以此对定理的应用做出客观的评价.

## 2 带有快慢进展的结核病模型

带有快慢进展的结核病模型<sup>[8]</sup> 是一类最具代表性的 SEI 模型, 将总人口分为易感者类( $S$ )、潜伏者类( $E$ ) 和活动性结核病患者( $I$ ) 三类. 单位时间内受结核菌感染的个体  $\beta SI$  被分为两部分:  $f\beta SI$  为快速发病的人数, 而另一部分  $(1-f)\beta SI$  则被潜伏起来. 潜伏者类在单位时间内发病的人数为  $kE$ . 人口出生率和自然死亡率分别为  $\Lambda$  和  $\mu$ . 该模型可表示为

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \beta SI - \mu S, \\ \frac{dE(t)}{dt} = (1-f)\beta SI - (k+\mu)E, \\ \frac{dI(t)}{dt} = f\beta SI + kE - \mu I. \end{cases} \quad (3)$$

利用再生矩阵方法<sup>[9]</sup>, 系统(3) 的基本再生数为

$$R_0 = f\beta \frac{\Lambda}{\mu} \frac{1}{\mu} + (1-f)\beta \frac{k}{k+\mu} \frac{\Lambda}{\mu} \frac{1}{\mu}.$$

从生物学角度出发,  $R_0$  表示在所有人口均是易感者的人群内, 一位结核病患者在他的整个患病期间所产生的活动性结核患者的平均人数, 其中第一、二项分别表示该患者在快、慢进展途径下产生的新病人数. 易知, 系统(3) 始终有一无病平衡点  $P_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0\right)^T$ . 特别地, 当  $R_0 > 1$  时, 系统(2) 有唯一的正平衡点  $P_1 = (S^*, E^*, I^*)^T$ , 其中

$$S^* = \frac{\Lambda}{\mu} \frac{1}{R_0}, E^* = (1-f) \frac{\Lambda}{k+\mu} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right), I^* = \frac{\mu}{\beta} (R_0 - 1).$$

对于系统(3), 由初始条件  $(S_0, E_0, I_0)^T \in \mathbf{R}_+^3$  决定的解  $S(t), E(t), I(t)$  在  $[0, +\infty)$  上唯一且非负下面将在可行域  $D = \left\{ (S, E, I)^T \in \mathbf{R}_+^3 \mid S + E + I \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$  内研究(3) 的解的性态.

**引理 1** 当  $R_0 > 1$  时,  $P_1$  在区域  $D$  内是局部渐近稳定的.

**证明** 系统(2) 在正平衡点  $P_1$  处的 Jacobian 矩阵为

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} -\beta I^* - \mu & 0 & -\beta S^* \\ (1-f)\beta I^* & -(k+\mu) & (1-f)\beta S^* \\ f\beta I^* & k & f\beta S^* - \mu \end{pmatrix}.$$

故  $J(P_1)$  的特征多项式可表示为

$$|\lambda I_{3 \times 3} - J(P_1)| = \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3, \quad (4)$$

其中,  $a_1 = -f\beta S^* + \beta I^* + k + 3\mu$ ,  $a_2 = (k+\mu)(-f\beta S^* + \beta I^* + 2\mu) + \mu(\beta I^* + \mu) - [\mu f + k(1-f)]\beta S^*$ ,  $a_3 = \mu(k+\mu)(-f\beta S^* + \beta I^* + \mu) + k\mu(1-f)\beta S^*$ .

当  $R_0 > 1$  时,

$$a_1 = -f\beta S^* + \beta I^* + k + 3\mu = -f\beta \frac{\Lambda}{\mu} \frac{1}{R_0} + \mu R_0 + k + 2\mu > k + 2\mu > 0,$$

$$a_3 = \mu(k+\mu)[-f\beta S^* + \beta I^* + \mu] + k\mu(1-f)\beta S^* = \mu^2(k+\mu)R_0 - \mu(k+\mu)f\beta \frac{\Lambda}{\mu} \frac{1}{R_0} +$$

$$k\mu(1-f)\beta \frac{\Lambda}{\mu} \frac{1}{R_0} > k\mu(1-f)\beta \frac{\Lambda}{\mu} \frac{1}{R_0} > 0.$$

令  $T = -f\beta S^* + \beta I^* + \mu$ , 则有

$$T - (1-f)\beta \frac{k}{k+\mu} S^* = \mu R_0 - \left[ f\beta + (1-f)\beta \frac{k}{k+\mu} \right] \frac{\Delta}{\mu} \frac{1}{R_0} > 0,$$

从而可得

$$\begin{aligned} a_1 a_2 - a_3 &= (T+k+2\mu)[(k+\mu)(T+\mu) + \mu T - k(1-f)\beta S^*] - [\mu T(k+\mu) + k\mu(1-f)\beta S^*] = \\ &= (k+\mu)(T+k+2\mu) \left[ T - (1-f)\beta \frac{k}{k+\mu} S^* \right] + \mu(k+\mu) \left[ T - (1-f)\beta \frac{k}{k+\mu} S^* \right] + \\ &= \mu(k+\mu)(k+2\mu) + \mu T(T+\mu) > \mu(k+\mu)(k+2\mu) + \mu T(T+\mu) > 0. \end{aligned}$$

根据 Hurwitz 判据, 当  $a_1 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 - a_3 > 0$  时, 特征多项式(4)的所有根都具有负实部. 于是当  $R_0 > 1$  时  $P_1$  在  $D$  内是局部渐近稳定的

**引理 2** 当  $R_0 > 1$  时疾病是一致持续的, 即存在  $\eta > 0$ , 使得系统(3) 由初始条件  $(S_0, E_0, I_0)^T \in \mathbf{R}_+ \times \text{int}(\mathbf{R}_+^2) \cap D$  决定的解  $I(t)$  满足  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} I(t) \geq \eta$ .

**证明** 定义  $X_0 = \{(S, E, I)^T \in D \mid E > 0, I > 0\}, \partial X_0 = D \setminus X_0$ . 则  $X_0$  是系统(3) 的正向不变集,  $\partial X_0$  相对于  $D$  是闭的. 另外, 系统(3) 是点耗散的. 令

$$M_\eta = \{(S_0, E_0, I_0)^T \in \partial X_0 \mid (S(t), E(t), I(t))^T \in \partial X_0, \forall t \geq 0\}, \Omega_{M_\eta} = \bigcup_{\phi_0 \in M_\eta} \omega(\phi_0).$$

不难看出  $M_\eta = \{(S_0, 0, 0)^T \mid 0 \leq S_0 \leq \frac{\Delta}{\mu}\}$ , 故  $\Omega_{M_\eta} = \{P_0\}$ , 且  $\{P_0\}$  是  $\Omega_{M_\eta}$  的一个孤立的非循环覆盖. 下面证明  $\{P_0\}$  对于集合  $X_0$  是弱排斥的, 即系统(3) 经过初始条件  $\phi_0 \in X_0$  的解  $\psi_t(\phi_0)$  满足  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \text{d}(\psi_t(\phi_0), P_0) > 0$ . 若不然, 对于  $\forall 0 < \eta < \frac{\Delta}{\mu}$ , 总存在  $T > 0$ , 使得当  $t \geq T$  时有

$$\frac{\Delta}{\mu} - \eta \leq S(t) \leq \frac{\Delta}{\mu} + \eta, 0 \leq E(t) \leq \eta, 0 \leq I(t) \leq \eta.$$

因此, 当  $t \geq T$  时有

$$\begin{cases} \frac{dE(t)}{dt} \geq (1-f)\beta \left(\frac{\Delta}{\mu} - \eta\right) I - (k+\mu)E, \\ \frac{dI(t)}{dt} \geq f\beta \left(\frac{\Delta}{\mu} - \eta\right) I + kE - \mu I. \end{cases} \tag{5}$$

考虑系统(5) 的辅助系统

$$\begin{cases} \frac{d\bar{E}(t)}{dt} = (1-f)\beta \left(\frac{\Delta}{\mu} - \eta\right) \bar{I} - (k+\mu)\bar{E}, \\ \frac{d\bar{I}(t)}{dt} = f\beta \left(\frac{\Delta}{\mu} - \eta\right) \bar{I} + k\bar{E} - \mu \bar{I}. \end{cases} \tag{6}$$

记

$$M(\eta) = \begin{pmatrix} -(k+\mu) & (1-f)\beta \left(\frac{\Delta}{\mu} - \eta\right) \\ k & f\beta \left(\frac{\Delta}{\mu} - \eta\right) - \mu \end{pmatrix}, s(M(\eta)) = \max\{\text{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(M(\eta))\},$$

其中  $\sigma(M(\eta))$  表示  $M(\eta)$  的所有特征根构成的集合. 当  $R_0 > 1$  时, 有  $s(M(0)) > 0$ . 由于  $s(M(\eta))$  关于  $\eta$  连续, 故存在充分小的  $\eta_0 > 0$ , 使得当  $0 < \eta < \eta_0$  时有  $s(M(\eta)) > 0$ . 又由于  $M(\eta)$  是合作的, 不可约矩阵, 故  $s(M(\eta))$  是  $M(\eta)$  的一个单重特征根, 且对应的特征向量为正. 因此, 当  $t \rightarrow +\infty$  时系统(6) 的解  $\bar{E}(t), \bar{I}(t) \rightarrow +\infty$ . 由比较定理<sup>[1]</sup> 可知, 当  $t \rightarrow +\infty$  时系统(3) 的解  $E(t), I(t) \rightarrow +\infty$ , 这与假设矛盾, 故  $\{P_0\}$  对于  $X_0$  是弱排斥的.

因此, 根据文献[10] 中的定理可知, 存在  $\eta > 0$  使得系统(2) 经过初始条件  $\phi_0 \in X_0$  的解  $\psi_t(\phi_0)$  满足:

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \text{d}(\psi_t(\phi_0), \partial X_0) \geq \eta,$$

即对给定的  $\eta > 0$ , 系统(3) 满足初始条件  $(S_0, E_0, I_0)^T \in X_0$  的解  $E(t), I(t)$  满足  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} E(t) \geq \eta$ ,

$\liminf_{t \rightarrow +\infty} I(t) \geq \eta$ , 由引理 2 知, 当  $R_0 > 1$  时系统 (3) 是一致持续的因此在  $D$  内存在一个紧吸引子集  $K$ .

### 3 平衡点的全局稳定性

**定理 1** 当  $R_0 > 1$  时  $P_1$  在区域  $D$  内是全局渐近稳定的.

**证明** 系统 (3) 的右端项关于  $(S, E, I)^T$  的 Jacobian 矩阵

$$J = \begin{pmatrix} -\beta I - \mu & 0 & -\beta S \\ (1-f)\beta I & -(k+\mu) & (1-f)\beta S \\ f\beta I & k & f\beta S - \mu \end{pmatrix}$$

的第二加性复合矩阵为

$$J^{[2]} = \begin{pmatrix} -\beta I - k - 2\mu & (1-f)\beta S & \beta S \\ k & -\beta I + f\beta S - 2\mu & 0 \\ -f\beta I & (1-f)\beta I & f\beta S - k - 2\mu \end{pmatrix}.$$

令矩阵函数  $P = P(S, E, I)$  为

$$P = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 \frac{E}{I} & 0 \\ 0 & a_3 \frac{E}{I} & \frac{E}{I} \end{pmatrix},$$

其中, 常数  $a_1, a_2, a_3$  满足  $(1-f)\left(1 + \frac{\mu}{k+\mu}\right) > a_1 \geq a_2 + a_3 \geq 1-f, ka_3 > \mu a_2$ . 由于

$$P_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 \frac{E}{I} \left(\frac{E'}{E} - \frac{I'}{I}\right) & 0 \\ 0 & a_3 \frac{E}{I} \left(\frac{E'}{E} - \frac{I'}{I}\right) & \frac{E}{I} \left(\frac{E'}{E} - \frac{I'}{I}\right) \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} \frac{I}{E} & 0 \\ 0 & -\frac{a_3}{a_2} \frac{I}{E} & \frac{I}{E} \end{pmatrix},$$

所以

$$B = P_f P^{-1} + P J^{[2]} P^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

其中

$$B_{11} = -\beta I - k - 2\mu, B_{12} = \left(\frac{a_1}{a_2}[(1-f) - a_3]\beta \frac{SI}{E}, a_1 \beta \frac{SI}{E}\right),$$

$$B_{21} = \begin{pmatrix} \frac{a_2 k}{a_1} \frac{E}{I} \\ \frac{a_3 k}{a_1} \frac{E}{I} - \frac{1}{a_1} f\beta E \end{pmatrix}, B_{22} = \begin{pmatrix} -\beta I + f\beta S - 2\mu + \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} & 0 \\ \frac{a_3}{a_2}(k - \beta I) + \frac{1}{a_2}(1-f)\beta I & f\beta S - k - 2\mu + \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} \end{pmatrix}.$$

令  $\mu(B)$  表示  $B$  的 Lozinskii 测度, 则  $\mu(B) \leq \sup\{g_1, g_2\}$ , 其中  $g_1 = \mu_1(B_{11}) + |B_{12}|, g_2 = |B_{21}| + \mu_1(B_{22})$ , 而  $|\cdot|$  表示矩阵的 1-范数,  $\mu_1(\cdot)$  表示关于 1-范数的 Lozinskii 测度, 于是

$$\mu_1(B_{11}) = -\beta I - k - 2\mu, |B_{12}| = \max\left\{\frac{a_1}{a_2}[(1-f) - a_3]\beta \frac{SI}{E}, a_1 \beta \frac{SI}{E}\right\}.$$

由于  $a_2 + a_3 \geq 1-f$ , 即  $\frac{(1-f) - a_3}{a_2} \leq 1$ , 则

$$|B_{12}| = a_1 \beta \frac{SI}{E}, |B_{21}| = \frac{a_2 k}{a_1} \frac{E}{I} + \frac{a_3 k}{a_1} \frac{E}{I} - \frac{1}{a_1} f\beta E = \frac{a_2 + a_3}{a_1} k \frac{E}{I} - \frac{1}{a_1} f\beta E,$$

$$\mu_1(B_{22}) = f\beta S - 2\mu + \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} + \max\left\{-\beta I + \frac{a_3}{a_2}(k - \beta I) + \frac{1}{a_2}(1-f)\beta I, -k\right\} -$$

$$f\beta S - 2\mu + \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} + \max\left\{k \frac{a_3}{a_2} - \left[1 + \frac{a_3 - (1-f)}{a_2}\right]\beta I, -k\right\}.$$

由此可得

$$g_1 = -\beta I - k - 2\mu + a_1\beta \frac{SI}{E}, \tag{7}$$

$$g_2 = \frac{a_2 + a_3}{a_1}k \frac{E}{I} - \frac{1}{a_1}f\beta E + f\beta S - 2\mu + \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} + \max\left\{k \frac{a_3}{a_2} - \left[1 + \frac{a_3 - (1-f)}{a_2}\right]\beta I, -k\right\}. \tag{8}$$

此外,由系统(3)中第2、3个方程可知

$$\beta \frac{SI}{E} = \frac{1}{1-f} \frac{E'}{E} + \frac{1}{1-f}(k + \mu), \tag{9}$$

$$\frac{I'}{I} = f\beta S + k \frac{E}{I} - \mu. \tag{10}$$

将(9)式代入(7)式,有

$$g_1 = \frac{a_1}{1-f} \frac{E'}{E} - \beta I + \frac{a_1}{1-f}(k + \mu) - k - 2\mu.$$

注意到  $(1-f)\left(1 + \frac{\mu}{k + \mu}\right) > a_1$ , 即  $\frac{a_1}{1-f}(k + \mu) < k + 2\mu$ , 不妨令  $c = k + 2\mu - \frac{a_1}{1-f} \cdot (k + \mu) (> 0)$ ,

则可得

$$g_1 = \frac{a_1}{1-f} \frac{E'}{E} - \beta I - c < \frac{a_1}{1-f} \frac{E'}{E} - c.$$

将(10)式代入(8)式,有

$$g_2 = \frac{E'}{E} + \frac{a_2 + a_3 - a_1}{a_1}k \frac{E}{I} - \frac{1}{a_1}f\beta E - \mu + \max\left\{k \frac{a_3}{a_2} - \left[1 + \frac{a_3 - (1-f)}{a_2}\right]\beta I, -k\right\}.$$

由于  $a_1 \geq a_2 + a_3$  和  $a_2 + a_3 \geq 1 - f$ , 所以

$$g_2 < \frac{E'}{E} + k \frac{a_3}{a_2} - \mu.$$

令  $d = \mu - k \frac{a_3}{a_2} > 0$  (注意到  $ka_3 > \mu a_2$ ), 则有  $g_2 < \frac{E'}{E} - d$ . 令  $m = \max\left\{\frac{a_1}{1-f}, 1\right\} (> 0)$ ,  $n = \min\{c,$

$d\} (> 0)$ , 故可得

$$\mu(B) \leq \sup\{g_1, g_2\} < \sup\left\{\frac{a_1}{1-f} \frac{E'}{E} - c, \frac{E'}{E} - d\right\} = m \frac{E'}{E} - n.$$

对于系统(3),从任意初始条件  $(S_0, E_0, I_0)^T \in D$  出发的解  $S(t), E(t), I(t)$ , 有

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mu(B) ds < \frac{1}{t} \int_0^t \left[m \frac{E'}{E} - n\right] ds = m \frac{\ln E(t) - \ln E_0}{t} - n.$$

由于

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln E(t) - \ln E_0}{t} = 0,$$

因此可得

$$q = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \mu(B) ds \right\} \leq -n.$$

因此,根据推广的自治收敛定理,当  $R_0 > 1$  时系统(3)中唯一的正平衡点  $P_1$  在  $D$  内全局渐近稳定.

### 4 数值结果

本节通过数值模拟来显示模型(3)中正平衡点  $P_1$  的全局稳定性. 取参数  $\Lambda = 20, \beta = 1.2 \times 10^{-4}, f = 0.05, k = 0.003, \mu = 0.0143$ , 则可得基本再生数  $R_0 = 2.527$  对于模型(3),从6组不同初始条件出发,解  $I(t)$  均最终趋于平衡状态,如图1所示.

## 5 结 论

本文应用推广的自治收敛定理证明了一类带有快慢进展的结核病模型的正平衡点的全局稳定性. 与构造 Lyapunov 函数法相比, 使用推广的自治收敛定理在解决全局稳定问题上有一定的规律可循. 然而由于定理涉及  $C_n^2 \times C_n^2$  矩阵, 使得在应用于高维系统, 如  $n \geq 4$  时出现困难, 可见推广的自治收敛定理在解决高维系统全局稳定性上也存在一定的局限性.

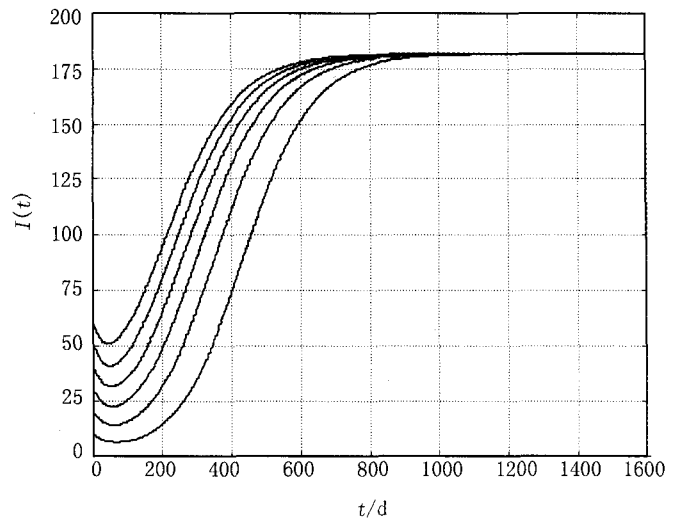


图1 正平衡点 $P_1$ 的全局稳定性态

## 参 考 文 献

- [1] 马知恩, 周义仓. 常微分方程稳定性与稳定性方法[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [2] 王高雄, 周之铭, 朱思铭, 等. 常微分方程[M]. 3版. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [3] Yang Y L, Li J Q, Ma Z E, et al. Global stability of two models with incomplete treatment for tuberculosis[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2010, 43(1): 79-85.
- [4] OU S C, CHUNG H Y, CHUANG C Y. A biomathematic models for tuberculosis using Lyapunov stability functions [J]. Lecture Notes in Computer Science, 2010, 6377(1): 447-453.
- [5] Chen H, Chen Liliang. Global stability of a discrete tuberculosis model[J]. Journal of East China Normal University (Natural Science), 2015, 6: 72-80.
- [6] CAO H, ZHOU Y. The age-structured SEIT model with application to tuberculosis transmission in china [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2012, 55(3/4): 385-395.
- [7] HUO H F, FENG L X. Global Stability of an Epidemic Model with Incomplete Treatment and Vaccination[J]. Discrete Dynamics in Nature and Society, 2012, 2012(1): 87-88.
- [8] Blower S M, Mclean A R, Porco T, et al. The intrinsic transmission dynamics of tuberculosis epidemics[J]. Nature Medicine, 1995(1): 815-821.
- [9] Vanden D P, Watmough J. Reproduction Numbers and Sub-threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models for Disease Transmission[J]. Mathematical Biosciences, 2002, 180: 29-48.
- [10] Thieme H R. Persistence under relaxed point-dissipativity (with application to an epidemic model)[J]. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1993, 24(2): 407-435.

## The Application of an Extended Autonomous Convergence Theorem

TONG Yanchun, CHEN Na

(School of Mathematics and Statistics, Zhoukou Normal University, Zhoukou 466001, China)

**Abstract:** In this paper, we mainly focus on a class of tuberculosis (TB) model with fast progress. With the help of the renewable matrix method, the global stability of the tuberculosis model is proved by an extended autonomous convergence theorem. And the accuracy of the model's conclusions are proved by numerical simulation. It can be seen that the autonomous convergence theorem to deal with the problem of global stability has certain rules to follow, but there has certain limitation in high-dimensional systems.

**Keywords:** equilibrium point; global asymptotic stability; autonomous convergence theorem