文章编号:1000-2367(2021)04-0024-06 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2021.04.004

非线性色散耗散波动方程双线性元新的高精度估计

李玲,李秋红,兰奇逊

(河南城建学院 数理学院,河南 平顶山 467036)

摘　要:主要研究具有局部 Lipschitz 连续非线性项的色散耗散波动方程双线性元新的高精度估计.对于半离散格式,利用插值与投影相结合的思想,在精解 $u,u_t \in H^2(\Omega)$较弱的正则假设下,导出了 H^1 模意义下超逼近性,而以往文献在 $u,u_t,u_{tt} \in H^2(\Omega)$时却只能得到最优误差估计.进一步地,当 $u \in H^3(\Omega)$时,利用插值后处理技巧给出了整体超收敛结果,但不要求 $u_t,u_{tt} \in H^3(\Omega)$,进而改善以往文献的结果.最后,建立了一个全离散逼近格式并研究了其解的超逼近性.

关键词:非线性色散耗散波动方程;双线性元;半离散和全离散格式;插值与投影结合;超逼近和超收敛估计

中图分类号:O242.21　　**文献标志码:**A

考虑下面非线性色散耗散波动方程:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t - \Delta u_{tt} = f(u), \text{在 } \Omega \times (0,T] \text{ 中}, \\ u = 0, \text{在 } \partial\Omega \times (0,T] \text{ 上}, \\ u(X,0) = u_0(X), u_t(X,0) = u_1(X), \text{在 } \Omega \text{ 中}. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 是有界凸多边形区域,$\partial\Omega$ 是Ω 的边界,$u_0(X)$,$u_1(X)$,$f(u)$ 是已知的充分光滑的函数 $X=(x,y)$,$f(u)$ 关于 u 满足 $|f'(u)| \le l(1+|u|^p)$,$p>0$ 及 $l>0$ 是常数.

关于方程(1)的理论分析及有限元方法已有一些研究,例如,在 $f(u)$满足整体 Lipschitz 连续条件下,文献[1-4]分别用不同方法研究了整体解的存在性和唯一性.文献[5]研究了协调元在半离散和全离散格式的 L^2 和 H^1 模的最优误差估计.文献[6]研究了非常规 Hermite 型有限元的超收敛和外推,并在全离散格式下得到了最优误差估计.文献[7]给出了双线性元在半离散和全离散格式下的高精度分析.

本文的主要目的是在半离散和全离散格式下给出双线性元对问题(1)新的高精度估计.借助于该元的高精度结果、插值与投影相结合的分析技巧[8-11],在降低对精确解的正则性要求,以及非线性项 $f(u)$不满足局部 Lipschitz 连续条件下,给出相应的超逼近及超收敛结果,并大大简化了证明过程,从而改善了以往文献的相应结论.需要说明的是,本文结果对线性三角形同样成立.

1　半离散格式的超逼近和超收敛

设 T_h 为Ω 上的一族矩形剖分,满足正则性条件或拟一致假设.设 V^h 为双线性元空间,$V_0^h=\{\nu \in V^h, \nu|_{\partial\Omega}=0\}$,则文献[12] 证明了下面的引理.

引理 1　设 $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^3(\Omega)$,$\nu \in V^h$,$I_h$ 为双线性元插值算子,则

$$\int_\Omega \nabla(u - I_h u)\nabla \nu \mathrm{d}x\mathrm{d}y = O(h^2)\,|u|_3\,|\nu|_1. \tag{2}$$

引入投影算子 $R_h: H_0^1 \to V_0^h$,即对 $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$(\nabla(R_h u - u), \nabla \nu_h) + (R_h u - u, \nu_h) = 0, \forall \nu_h \in V_0^h, \tag{3}$$

收稿日期:2020-09-07;**修回日期:**2020-12-13.

基金项目:国家自然科学青年基金(61503122)

作者简介(通信作者):李玲(1969-),女,河南鲁山人,河南城建学院副教授,研究方向为计算数学,E-mail:liling950406@163.com.

则类似于文献[9－12]，可以证明：对 $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 有

$$\| R_h u - u \|_0 + h \| R_h u - u \|_1 \leq Ch^2 \| u \|_2. \tag{4}$$

进一步地，若 $u \in H^3(\Omega)$ 则有

$$\| R_h u - I_h u \|_1 \leq ch^2 \| u \|_3. \tag{5}$$

问题(1)的变分形式为：求 $u \in H_0^1(\Omega)$，满足

$$\begin{cases}(u_{tt},\nu)+(\nabla u,\nabla\nu)+(\nabla u_t,\nabla\nu)+(\nabla u_{tt},\nabla\nu)=(f(u),\nu),\forall\nu\in H_0^1(\Omega),\\ u(X,0)=u_0(X),u_t(X,0)=u_1(X).\end{cases} \tag{6}$$

变分问题(6)的有限元逼近方程为：求 $u^h \in V_0^h$ 满足

$$\begin{cases}(u_{tt}^h,\nu)+(\nabla u^h,\nabla\nu)+(\nabla u_t^h,\nabla\nu)+(\nabla u_{tt}^h,\nabla\nu)=(f(u^h),\nu),\forall\nu\in V_0^h,\\ u^h(X,0)=R_h u_0(X),u_t^h(X,0)=R_h u_1(X).\end{cases} \tag{7}$$

定理 1　设 u, u^h 分别是问题(1) 和(6) 的解，$u, u_t \in H^2(\Omega)$，则有超逼近结果

$$\| u^h - R_h u \|_1 + \| u_t^h - R_h u_t \|_1 \leq ch^2 \left(\int_0^t (\| u \|_2^2 + \| u_t \|_2^2) \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

证明　令 $u - u^h = (u - R_h u) + (R_h u - u^h) = \eta + \theta$. $\forall \nu \in V_0^h$，由(1)和(6)式得

$$(\theta_{tt},\nu)+(\nabla\theta,\nabla\nu)+(\nabla\theta_t,\nabla\nu)+(\nabla\theta_{tt},\nabla\nu)=-(\eta_{tt},\nu)-$$

$$(\nabla\eta,\nabla\nu)-(\nabla\eta_t,\nabla\nu)-(\nabla\eta_{tt},\nabla\nu)+(f(u)-f(u^h),\nu)=\sum_{i=1}^5 I_i. \tag{9}$$

由 R_h 的定义知 $I_1 + I_4 = 0, I_2 = (\eta,\nu) \leq ch^2 \| u \|_2 \| \nu \|_0, I_3 = (\eta_t,\nu) \leq ch^2 \| u_t \|_2 \| \nu \|_0$.
又注意到 $f(u)$关于 u 满足局部 Lipschitz 连续条件，由文献[13]知

$$| I_5 | \leq c \| u - u^h \|_0 | \nu |_1 \leq c(\| \eta \|_0 + \| \theta \|_0) | \nu |_1 \leq ch^2 \| u \|_2 | \nu |_1 +$$

$$c \| \theta \|_0 | \nu |_1 \leq ch^4 \| u \|_2^2 + c \| \theta \|_0^2 + c | \nu |_1^2. \tag{10}$$

根据以上估计(9)式可变形为

$$(\theta_{tt},\nu)+(\nabla\theta,\nabla\nu)+(\nabla\theta_t,\nabla\nu)+(\nabla\theta_{tt},\nabla\nu)\leq ch^4(\| u \|_2^2 + \| u_t \|_2^2) + c\| \theta \|_0^2 + c | \nu |_1^2. \tag{11}$$

在(11)式中令 $\nu=\theta_t$ 有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\| \theta_t \|_0^2 + | \theta |_1^2 + | \theta_t |_1^2) \leq ch^4(\| u \|_2^2 + \| u_t \|_2^2) + c | \theta |_1^2 + c \| \theta_t \|_1^2. \tag{12}$$

对(12)式两端从 0 到 t 积分，并注意到 $\theta(X,0)=\theta_t(X,0)=0$，得

$$\| \theta \|_1^2 + \| \theta_t \|_1^2 \leq ch^4 \int_0^t (\| u \|_2^2 + \| u_t \|_2^2)\mathrm{d}s + c\int_0^t (\| \theta \|_1^2 + \| \theta_t \|_1^2)\mathrm{d}s, \tag{13}$$

将 Gronwall 引理应用于(13)式有 $\| \theta \|_1^2 + \| \theta_t \|_1^2 \leq ch^4 \int_0^t (\| u \|_2^2 + \| u_t \|_2^2)\mathrm{d}s$. 即

$$\| \theta \|_1 + \| \theta_t \|_1 \leq ch^2 \left(\int_0^t (\| u \|_2^2 + \| u_t \|_2^2)\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{14}$$

再借助于三角不等式和(14)式得证(8)式.定理证毕.

为了取得整体超收敛结果，采用文献[8]中构造的插值后处理算子 $\prod_{2h}$，满足

$$\prod\nolimits_{2h} I_h \varphi = \prod\nolimits_{2h} \varphi, \forall \varphi \in H^2(\Omega), \tag{15}$$

$$\left\| \prod\nolimits_{2h} \varphi - \varphi \right\|_1 \leq ch^2 \| \varphi \|_3, \forall \varphi \in H^3(\Omega), \tag{16}$$

$$\left\| \prod\nolimits_{2h} \nu \right\|_1 \leq c \| \nu \|_1, \forall \nu \in V_0^h. \tag{17}$$

定理 2　设 u, u^h 分别为(1) 和(7) 的解，$u \in H^3(\Omega), u_t \in H^2(\Omega)$ 时，有下面超收敛结果

$$\left\| \prod\nolimits_{2h} u^h - u \right\|_1 \leq ch^2 \left\{ \left[\int_0^t (\| u \|_3^2 + \| u_t \|_2^2)\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{2}} + \| u \|_3 \right\}.$$

证明　依据(5)、(15)～(17)式及定理 1 得

$$\left\|\prod\nolimits_{2h}u^h-u\right\|_1\leq\left\|\prod\nolimits_{2h}u^h-\prod\nolimits_{2h}I_hu\right\|_1+\left\|\prod\nolimits_{2h}I_hu-u\right\|_1=$$
$$\left\|\prod\nolimits_{2h}(u^h-I_hu)\right\|_1+\left\|\prod\nolimits_{2h}u-u\right\|_1\leq c\|(u^h-I_hu)\|_1+$$
$$ch^2\|u\|_3\leq c\|\theta\|_1+\|R_hu-I_hu\|_1+ch^2\|u\|_3\leq$$
$$ch^2\left\{\left[\int_0^t(\|u\|_3^2+\|u_t\|_2^2)\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{2}}+\|u\|_3\right\}.$$

定理得证.

2 全离散格式下的超逼近估计

本节将给出问题(1)的一个全离散逼近格式及给出相应的超逼近差估计.

首先将区间 $[0,T]N$ 等分:$0=t_0<t_1<\cdots<t_{N-1}<t_N=T$,$t_{n+1}-t_n=\tau$,$U^n$ 表示当 $t=t_n=n\tau$ 时 $u(t_n)$ 在 V_0^h 中的逼近.引入下面一些符号.

$$u^n=u(t_n),u^n-U^n=(u^n-I_hu^n)+(I_hu^n-U^n)=\eta^n+\theta^n,\forall U^n\in V_0^h,\varphi^{n+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\varphi^{n+1}+\varphi^n),$$

$$\bar{\partial}_t\varphi^{n+\frac{1}{2}}=\tau^{-1}(\varphi^{n+1}-\varphi^n),\varphi^{n,\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}(\varphi^{n+1}+2\varphi^n+\varphi^{n-1})=\frac{1}{2}(\varphi^{n+\frac{1}{2}}+\varphi^{n-\frac{1}{2}}),$$

$$\bar{\partial}_t\varphi^n=(2\tau)^{-1}(\varphi^{n+1}-\varphi^{n-1})=\tau^{-1}(\varphi^{n+\frac{1}{2}}-\varphi^{n-\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}(\bar{\partial}_t\varphi^{n+\frac{1}{2}}+\bar{\partial}_t\varphi^{n-\frac{1}{2}}),$$

$$\bar{\partial}_{tt}\varphi^n=\tau^{-2}(\varphi^{n+1}-2\varphi^n+\varphi^{n-1})=\tau^{-1}(\bar{\partial}_t\varphi^{n+\frac{1}{2}}-\bar{\partial}_t\varphi^{n-\frac{1}{2}}).$$

考虑问题(2)全离散逼近格式:求 $U^n\in V_0^h$,满足

$$\begin{cases}(\bar{\partial}_{tt}U^n,\nu)+(\nabla U^{n,\frac{1}{4}},\nabla\nu)+(\nabla\bar{\partial}_tU^n,\nabla\nu)+(\nabla\bar{\partial}_{tt}U,\nabla\nu)=(f^{n,\frac{1}{4}}(U),\nu),\forall\nu\in V_0^h,\\ U^0=R_hu_9,U^1=R_h(u_0+u_1\tau+\frac{1}{2}u_{tt}(0)\tau^2),\end{cases}\tag{18}$$

其中 $n\geq2$.

定理 3 设 u^n,U^n 分别是问题(1)和(18)的解,$u,u_t\in H^2(\Omega)$,则有

$$\|R_hu^n-U^n\|_1=O(h^2+\tau^2),\tag{19}$$

其中 $n=0,1,2,\cdots,n$.

证明 $\forall\nu\in V_0^h$,(2)式可以写为

$$(\bar{\partial}_{tt}u^n,\nu)+(\nabla u^{n,\frac{1}{4}},\nabla\nu)+(\nabla\bar{\partial}_tu^n,\nabla\nu)+(\nabla\bar{\partial}_{tt}u^n,\nabla\nu)=$$
$$(f^{n,\frac{1}{4}}(u),\nu)+(R_2^n,\nu)+(\nabla R_1^n,\nabla\nu)+(\nabla R_2^n,\nabla\nu),\tag{20}$$

其中 $R_1^n=\bar{\partial}_tu^n-u_t^{n,\frac{1}{4}}=O(\tau^2)$,$R_2^n=\bar{\partial}_{tt}u^n-u_{tt}^{n,\frac{1}{4}}=O(\tau^2)$.

利用(18)和(20)式得

$$(\bar{\partial}_{tt}\theta^n,\nu)+(\nabla\theta^{n,\frac{1}{4}},\nabla\nu)-(\nabla\bar{\partial}_t\theta^n,\nabla\nu)+(\nabla\bar{\partial}_{tt}\theta^n,\nabla\nu)=-(\bar{\partial}_{tt}\eta^n,\nu)-$$
$$(\nabla\eta^{n,\frac{1}{4}},\nabla\nu)+(\nabla\bar{\partial}_t\eta^n,\nabla\nu)+(\nabla\bar{\partial}_{tt}\eta^n,\nabla\nu)+(f^{n,\frac{1}{4}}(u)-f^{n,\frac{1}{4}}(U),\nu)+$$
$$(R_2^n,\nu)+(\nabla R_1^n,\nabla\nu)+(\nabla R_2^n,\nabla\nu)=\sum_{i=1}^8G_i.\tag{21}$$

在(21)式中令 $\nu=\bar{\partial}_t\theta^n$ 则其左边的各项估计为

$$(\bar{\partial}_{tt}\theta^n,\bar{\partial}_t\theta^n)=(2\tau)^{-1}(\|\bar{\partial}_t\theta^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2-\|\bar{\partial}_t\theta^{n-\frac{1}{2}}\|_0^2),\tag{22}$$

$$(\nabla\theta^{n,\frac{1}{4}},\nabla\bar{\partial}_t\theta^n)=(2\tau)^{-1}(\nabla\theta^{n+\frac{1}{2}}+\nabla\theta^{n-\frac{1}{2}},\nabla\theta^{n+\frac{1}{2}}-\nabla\theta^{n-\frac{1}{2}})=$$
$$(2\tau)^{-1}(|\theta^{n+\frac{1}{2}}|_1^2-|\theta^{n-\frac{1}{2}}|_1^2),\tag{23}$$

$$(\nabla\bar{\partial}_t\theta^n,\nabla\bar{\partial}_t\theta^n)=|\bar{\partial}_t\theta^n|_1^2,\tag{24}$$

$$(\nabla \overline{\partial}_{tt}\theta^n, \nabla \overline{\partial}_t\theta^n) = (2\tau)^{-1}(|\overline{\partial}_t\theta^{n+\frac{1}{2}}|_1^2 - |\overline{\partial}_t\theta^{n-\frac{1}{2}}|_1^2). \tag{25}$$

接下来,估计(21)式的右端各项.注意到

$$G_1 + G_4 = 0,\ |\overline{\partial}_t\varphi^n|_2^2 \le c\tau^{-1}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} |\varphi_t|_2^2 \mathrm{d}s. \tag{26}$$

类似于上节中 I_2 及 I_3 的估计,由 R_h 的定义可知,

$$G_2 = (\eta^{n,\frac{1}{4}}, \overline{\partial}_t\theta^n) \le ch^2\|u^{n,\frac{1}{4}}\|_2 \|\overline{\partial}_t\theta^n\|_0 \le ch^4\|u^{n,\frac{1}{4}}\|_2^2 + \varepsilon|\overline{\partial}_t\theta^n|_1^2 \le$$
$$ch^4\|u\|_{L^\infty(H^2)}^2 + \varepsilon|\overline{\partial}_t\theta^n|_1^2, \tag{27}$$

其中 $\|\varphi\|_{L^\infty(H^\rho)} = \sup\limits_{0\le t\le T}\|\varphi\|_{H^\rho(\Omega)}, \forall \varphi \in H^\rho(\Omega)$,$\rho$ 为正整数.

同理

$$G_3 = (\overline{\partial}_t\eta^n, \nu) = (2\tau)^{-1}(((u^{n+1} - u^{n-1}) - I_h(u^{n+1} - u^{n-1})), \overline{\partial}_t\theta^n) \le ch^2(2\tau)^{-1}|u^{n+1} -$$
$$u^{n-1}|_2 |\overline{\partial}_t\theta^n|_1 \le ch^4(2\tau)^{-2}|u^{n+1} - u^{n-1}|_2^2 + \varepsilon|\overline{\partial}_t\theta^n|_1^2 \le ch^4|\overline{\partial}_t u^n|_2^2 + \varepsilon|\overline{\partial}_t\theta^n|_1^2 \le$$
$$ch^4\tau^{-1}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}|u_t|_2^2\mathrm{d}s + \varepsilon|\overline{\partial}_t\theta^n|_1^2 \le ch^4\tau^{-1}\|u_t\|_{L^\infty(H^2)}^2 + \varepsilon|\overline{\partial}_t\theta^n|_1^2, \tag{28}$$

注意到 $f(u)$满足局部 Lipschitz 连续条件,由文献[13]及插值理论知

$$|G_5| \le (\frac{1}{4}[(f(u^{n+1}) - f(U^{n+1})) + 2(f(u) - f(U)) + (f(u^{n-1} - f(U^{n-1}))], \overline{\partial}_i\theta^n) \le$$
$$c(\|\eta^{n+1}\|_0^2 + \|\eta^n\|_0^2 + \|\eta^{n-1}\|_0^2) + c(\|\theta^{n+1}\|_0^2 + \|\theta^n\|_0^2 + \|\theta^{n-1}\|_0^2) + \varepsilon|\overline{\partial}_t\theta^n|_1^2 \le$$
$$ch^4(\|u^{n+1}\|_2^2 + \|u^n\|_2^2 + \|u^{n-1}\|_2^2) + c(\|\theta^{n+1}\|_0^2 + \|\theta^n\|_0^2 + \|\theta^{n-1}\|_0^2) + \varepsilon|\overline{\partial}_t\theta^n|_1^2 \le$$
$$ch^4\|u\|_{L^\infty(H^2)}^2 + c(\|\theta^{n+1}\|_0^2 + \|\theta^n\|_0^2 + \|\theta^{n-1}\|_0^2) + \varepsilon|\overline{\partial}_t\theta^n|_1^2. \tag{29}$$

根据 Cauchy-Schwartz 不等式有

$$G_6 + G_7 + G_8 \le c(\|R_2^n\|_0^2 + \|\nabla R_1^n\|_0^2 + \|\nabla R_2^n\|_0^2) + \varepsilon|\overline{\partial}_t\theta^n|_1^2 \le c\tau^4 + \varepsilon|\overline{\partial}_t\theta^n|_1^2. \tag{30}$$

综合(22)~(25)式和(27)~(30)式,并取 $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$得

$$(2\tau)^{-1}[(\|\overline{\partial}_t\theta^{j+\frac{1}{2}}\|_0^2 - \|\overline{\partial}_t\theta^{j-\frac{1}{2}}\|) + (\|\theta^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 - \|\theta^{j-\frac{1}{2}}\|_1^2) + (|\overline{\partial}_t\theta^{j+\frac{1}{2}}|_1^2 - |\overline{\partial}_t\theta^{j-\frac{1}{2}}|_1^2)] \le$$
$$ch^4(\|u\|_{L^\infty(H^2)}^2 + \|u_t\|_{L^\infty(H^2)}^2) + c\tau^4 + c(\|\theta^{j+1}\|_1^2 + \|\theta^j\|_0^2 + \|\theta^{j-1}\|_0^2). \tag{31}$$

对(31)式两边同乘以 2τ,并关于 j 从 1 到 $n-1$ 求和得

$$\|\overline{\partial}_t\theta^{n-\frac{1}{2}}\|_0^2 + |\theta^{n-\frac{1}{2}}|_1^2 + |\overline{\partial}_t\theta^{n-\frac{1}{2}}|_0^2 \le \|\overline{\partial}_t\theta^{\frac{1}{2}}\|_0^2 + |\theta^{\frac{1}{2}}|_1^2 + |\overline{\partial}_t\theta^{\frac{1}{2}}|_1^2 +$$
$$cm^4\tau\sum_{j=1}^{n-1}(\|u\|_{L^\infty(H^2(\Omega))}^2 + \|u_t\|_{L^\infty(H^2(\Omega))}^2) + c\sum_{j=1}^{n-1}\tau^5 +$$
$$c\tau\sum_{j=1}^{n-1}(\|\theta^{j+1}\|_0^2 + \|\theta^j\|_0^2 + \|\theta^{j-1}\|_0^2). \tag{32}$$

利用 (18)式可知 $\theta^1 = U^1 - I_h u^1 = O(\tau^3)$,并注意到 $\theta^0 = 0$ 有

$$\|\overline{\partial}_t\theta^{\frac{1}{2}}\|_0^2 + |\theta^{\frac{1}{2}}|_1^2 + |\overline{\partial}_t\theta^{\frac{1}{2}}|_1^2 = \tau^{-2}\|\theta^1 - \theta^0\|_0^2 + \frac{1}{4}\|\theta^1 + \theta^0\|_1^2 + \tau^{-2}|\theta^1 - \theta^0|_1^2 =$$
$$\tau^{-2}\|\theta^1\|_0^2 + \frac{1}{4}\|\theta^1\|_1^2 + \tau^{-2}\|\theta^1\|_1^2 = O(\tau^4). \tag{33}$$

由于$(n-1)\tau \le N\tau = T$ 成立

$$ch^2\tau\sum_{j=1}^{n-1}(\|u\|_{L^\infty(H^2(\Omega))}^2 + \|u_t\|_{L^\infty(H^2(\Omega))}^2) + c\sum_{j=1}^{n-1}\tau^5 = O(h^4 + \tau^4). \tag{34}$$

利用(33)和(34)式,将(32)式变形为

$$\|\overline{\partial}_t\theta^{n-\frac{1}{2}}\|_0^2 + |\theta^{n-\frac{1}{2}}|_0^2 + |\overline{\partial}_t\theta^{n-\frac{1}{2}}|_1^2 \le c(h^4 + \tau^4) + c\tau\sum_{j=1}^{n-1}(\|\theta^{j+1}\|_0^2 + \|\theta^j\|_0^2 + \|\theta^{j-1}\|_0^2), \tag{35}$$

注意到

$$|\theta^{n-\frac{1}{2}}|_1^2=\frac{1}{2}|\theta^n+\theta^{n-1}|_1^2=\frac{1}{4}(|\theta^n|_1^2+|\theta^{n-1}|_1^2)+\frac{1}{2}(\nabla\theta^n,\nabla\theta^{n-1}),$$

$$(\nabla\theta^n,\nabla\theta^{n-1})\le\frac{1}{4}|\theta^n|_1^2+|\theta^{n-1}|_1^2.$$

由(35)式不难得 $(1-c\tau)\|\theta^n\|_1^2\le c(h^4+\tau^4)+c\tau\sum_{j=0}^{n-1}\|\theta^j\|_1^2$.取 τ 充分小,使得 $1-c\tau>0$,再应用离散的 Gronwall 引理可得证本定理证毕.

注记1 本文使用插值与投影相结合技巧文献[8-11],对于半离散格式来说,不仅大大简化了文献[7]中的证明过程,而且在导出超逼近性质时只需 $u,u_t\in H^2(\Omega)$ 不必像文献[7]一样要求 $u,u_t\in H^3(\Omega)$.另一方面,当 $u\in H^3(\Omega)$,$u_t\in H^2(\Omega)$ 时,由(5)式及定理3,可推出文献[7]中的结果:

$$\|I_hu^h-u^h\|_1\le\|I_hu^h-R_hu^h\|_1+\|R_hu^h-u^h\|_1\le c(h^2+\tau^2).$$

但这里不要求 $u_t\in H^3(\Omega)$,且对 u_{tt} 无要求,从而也改善了文献[7]中结论.

注记2 对于全离散格式,本文要求 $u,u_t\in H^2(\Omega)$ 而不需文献[7]中的那样要求它们都属于 $H^3(\Omega)$,并且也同样使证明过程更加简洁.

注记3 不难验证,这里的方法和结果对线性三角形元亦适用.另外,本文的思想也可用于处理其他非线性方程.而且把对非线性项的要求从整体 Lipschitz 连续拓宽到局部 Lipschitz 连续的情形,同样可改善相关文献的结果.

参 考 文 献

[1] 尚亚东.方程 $u_{tt}-\Delta u-\Delta u_t-\Delta u_{tt}=f(u)$ 的初值问题[J].应用数学学报,2000,23:385-392.
SHANG Y D.Initial boundary value problem of equation $u_{tt}-\Delta u-\Delta u_t-\Delta u_{tt}=f(u)$[J].Acta Mathematicae Applicatae Sinica,2000,23:385-392.

[2] 徐润章,赵希人,沈继红,等.具色散耗散项的四阶波动方程解的渐进性质[J].应用数学与力学,2008,29:235-239.
XU R Z,ZHAO X R,SHEN J H,et al.Asymptotic Behaviour of Solution for Fourth Order Wave Equation With Dispersive and Dissipative Terms[J].Applied Mathematics and Mechanics,2008,29:235-239.

[3] LIU Y C,XU R Z.Potential well method for Cauchy problem of generalized double dispersion equations[J].Journal of Mathematical Analysis Applications,2008,338:1169-1187.

[4] XU R Z,LIU Y C,YU T.Global existence of solution for Cauchy problem of multidimensional generalized double dispersion equations[J].Nonlinear Analysis,2009,71:4977-4983.

[5] 孙同军.一类高维非线性色散耗散波动方程的有限元分析[J].山东大学学报(工学版),2003,33:712-716.
SUN T J.The finite element method for a class of multi-dimensional nonlinear dispersive-dissipative wave equations[J].Journal of Shandong University(Engineering Science),2003,33:712-716.

[6] 樊明智,张建军,石东洋,等.非线性色散耗散波动方程的 Hermite 型有限元分析[J].应用数学,2012,25:341-349.
FAN M Z,ZHANG J J,SHI D Y,et al.Hermite-type Finite Element Analysis forNonlinear Dispersion-dissipative Wave Equations[J].Mathematica Applicata,2012,25:341-349.

[7] 王芬玲,石东洋.非线性色散耗散波动方程双线性元的高精度分析[J].数学物理学报,2014,34(A):1599-1610.
WANG F L,SHI D Y.High Accurary Analysis of the Bilinear Element for Nonlinear Dispersion-Dissipative Wave Equations[J].Mathematica Acta Sinica,2014,34(A):1599-1610.

[8] SHI D Y,WANG P L,ZHAO Y M.Super-convergence analysis of anisotropic linear triangular finite element for nonlinear Schrodinger equation[J].Applied Mathematics Letters,2014,38:129-134.

[9] 石东洋,王芬玲,赵艳敏,等.非线性 Sine-Gordon 方程的各向异性线性元高精度分析新模式[J].计算数学,2014,36(3):245-256.
SHI D Y,WANG F L,ZHAO Y M,et al.A New Pattern of High Accuracy Analysis of Anisotropic Linear Element for Nonlinear Sine-Gordon Equations[J].Mathematica Numerica Sinica,2014,36(3):245-256.

[10] 石东洋,王芬玲,樊明智,等.Sine-Gordon 方程的最低阶各向异性混合元高精度分析新途径[J].计算数学,2015,37(2):148-161.
SHI D Y,WANG F L,FAN M Z,et al.A New Approach of The Lowest Order Anisotropic Mixed Finite Element High Accuracy Analysis for Nonlinear Sine-Gordon Equations[J].Mathematica Numerica Sinica,2015,37(2):148-161.

[11] SHI D Y,MU P C,YANG H J.Superconvergence analysis of a two-grid method for semilinear parabolic equations[J].Applied Mathematics Letters,2018,84:34-41.

[12] 林群,严宁宁.高效有限元构造与分析[M].保定:河北大学出版社,1996:304.

[13] THOMEE V.Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems[M].Berlin:Springer,2006:186-187.

New high accurary estiments of bilinear element for nonlinear dispersion-disspative wave equations

Li Ling, Li Qiuhong, Lan Qixun

(School of Mathematics & Physics, Henan University of Urban Construction, Pingdingshan 467036, China)

Abstract: This paper mainly studies the new high-precision estimates of the bilinear element for the dispersion wave equations with local Lipschitz continuous nonlinear term. In the semi-discrete scheme, the idea of combining interpolation and projection is used to get the superclose property under weaker regular assumption of $u, u_t \in H^2(\Omega)$, but in the previous literature only optimal error estimate can be deduced. Further, based on interpolation post-processing techniques, the global superconvergence result is obtained when $u \in H^3(\Omega)$ instead of $u, u_t, u_{tt} \in H^3(\Omega)$. Finally, a fully discrete approximation scheme is established and a superclose estimate of its solution is investigated.

Keywords: nonlinear dispersion and dissipation wave equation; bilinear element; semi-discrete and fully discrete schemes; combination of interpolation and projection; superclose and superconvergent estimetes

[责任编校　陈留院　赵晓华]