第 45 卷 第 4 期 河南师范大学学报(自然科学版) Vol.45 No.4
2017 年 7 月 Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition) Jul. 2017

文章编号:1000-2367(2017)04-0015-14 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2017.04.003

周期 Ostrovsky 方程的 Gibbs 测度不变性和几乎整体适定性

闫威,王宗敏

(河南师范大学 数学与信息科学学院,河南 新乡 453007)

摘 要:考虑周期 Ostrovsky 方程的随机初值的柯西问题 $u_t-\beta\partial_x^3u-\gamma\partial_x^{-1}u+\frac{1}{2}\partial_x(u^2)=0$. 首先证明在 $H^s(T)$ 中当 $s\geq -\frac{1}{2}$ 的柯西问题是局部适定的和在 $\bigcap_{-\frac{1}{2}\leq s<\frac{1}{2}}H^s(T)$ 中随机初值的柯西问题是几乎整体适定的. 对于在 $\bigcap_{\frac{1}{6}<s<\frac{1}{2}}H^s(T)$ 中的随机初值的一大类集合,证明在流映射下 Gibbs 测度是不变的.

关键词:Ostrovsky 方程;几乎整体适定性;Gibbs 测度

中图分类号:O175.5 **文献标志码**:A

本文在低正则性空间中,考虑具有随机初值 ϕ 的周期 Ostrovsky 方程的柯西问题,

$$\partial_x(u_t-\beta\,\partial_x^3u+\frac{1}{2}\partial_x(u^2))-\gamma u=0,\quad x\in T=[0,2\pi),\tag{1}$$

$$u(x,0)=\phi.\tag{2}$$

其中正常数 γ 测量旋转效应的非零常数 β,反映介质的色散类型,见文献[1-3]. 它是由 Ostrovsky[4] 考虑 Coriolis 力,提出来的一个弱非线性长波模型.

当 $\gamma=0$,(1)式就变成了已经被广泛研究的 KdV 方程了,例如,参见文献[5-13]. 通过用方法 I,Colliander 等[10] 证明了在 $H^s(T),s\geq -\frac{1}{2}$,KdV 方程的柯西问题是整体适定的. Bourgain[7] 证明了 KdV 方程的柯西问题在解映射是 $\mathbf{C}^3$ 的意义下,在 $H^s(T),s\geq -\frac{1}{2}$ 中是不适定的. 最近,在 H^s 当 $s<-1$ 拓扑意义下,Molinet[14] 证明解映射是不连续的. 在非周期情形下,依据初值在 $H^s,s\geq -\frac{4}{5}$ 中的大小,Liu[15] 也证明了光滑解在 H^s 中具有一个局部先验界.

对(1)式的两边同时作用 ∂_x^{-1} ,上面的 Ostrovsky 方程就可以写成下面这种形式

$$u_t-\beta\partial_x^3u+\frac{1}{2}\partial_x(u^2)-\gamma\partial_x^{-1}u=0,\tag{3}$$

其中 ∂_x^{-1} 定义为:$\partial_x^{-1}f=\int_0^x f(y)\mathrm{d}y=\sum\limits_{k\in\dot{\mathbf{Z}}}\mathscr{F}_xf(k)\int_0^x \mathrm{e}^{ikx}\mathrm{d}x=\frac{1}{\mathrm{i}k}\sum\limits^{k\in\dot{\mathbf{Z}}}[\mathrm{e}^{ikx}-1]\mathscr{F}_xf(k)$. 方程(1)具有许多重要的性质,例如孤立波或孤子解,并且它与 KdV 方程有密切的关系(见文献[16-19]). 很多作者对(1)式考虑确定初值的柯西问题,例如,参见文献[20-32],特别是文献[33-34].

文献[35]研究非线性 Schrödinger 方程统计力学的工作吸引了许多人在偏微分方程的非线性流下构造不变测度,参见文献[36-60]. 通过使用 Strichartz 估计和 Bourgain 类型空间以及 Ornstein-Unlenbeck 半群的超收缩性,文献[36-40,61]研究了 Schrödinger 方程,KdV 方程和波动方程的不变测度. 在合适的随机化后,文献[42-43]研究了在超临界意义下波动方程的初值随机化问题. 当初始数据被随机化时,借助于非线

收稿日期:2017-03-18;**修回日期**:2017-04-29.

基金项目:国家自然科学基金(11401180)

作者简介(通信作者):闫威(1982-),男,河南周口人,河南师范大学副教授,主要从事偏微分方程与随机偏微分方程的研究,E-mail:yanwei19821115@sina.cn.

性光滑,文献[46]研究了三次非线性 Schrödinger 方程几乎适定性.在某种意义上,Gibbs 测度补偿了在低正则性下的守恒律的缺乏,例如,见文献[42-43,52,54,56,62-63]中的参考文献.

在本文中,通过使用随机初值化

$$u(x,0) \triangleq \phi(x) = \sum_{n\neq 0} \frac{f_n(\omega)\ \mathrm{e}^{inx}}{n}, \quad x \in T, \tag{4}$$

且 $\beta=1$,或

$$u(x,0) \triangleq \phi(x) = \sum_{n\neq 0,1} \frac{f_n(\omega)\ \mathrm{e}^{inx}}{n}, \quad x \in T, \tag{5}$$

且 $\beta=-1$,来研究周期 Ostrovsky 方程(1)的柯西问题几乎适定性和周期 Ostrovsky 方程不变测度,其中 $\{f_n(\omega)\}$ 是独立同分布的标准复高斯随机变量.通过建立一个关键的双线性估计和使用一个不动点定理的方法,证明在 $H^s(T), s\geq -\frac{1}{2}$ 中的柯西问题是局部适定的.结合大偏差估计和局部适定性结果以及截断的(3)的不变测度,在随机初值的一大类集合中,进一步证明了在 $\bigcap_{-\frac{1}{2}<s<\frac{1}{2}} H^s(T)$ 中柯西问题是几乎整体适定的.最后,结合(3)~(4)式或(3)~(5)式几乎整体适定性和逼近的方法,针对 $\bigcap_{\frac{1}{6}<s<\frac{1}{2}} H^s(T)$ 上的随机初值问题,证明了在由柯西问题产生的随机流下的 Gibbs 测度是不变的.

注意如果 $u(x,t)$ 是方程(3)的解,那么 $v(x,t)=\beta^{-1}u(x,-\beta^{-1}t)$ 就是如下方程的解 $v_t+v_{xxx}-\frac{1}{2}(v^2)_x+\gamma\beta^{-1}\partial_x^{-1}v=0$. 不失一般性,假设 $\beta=\pm 1$,和 $\gamma=1$.

本篇文章中主要的结果如下.

定理 1(整体适定性) 令 $-\frac{1}{2}\leq s<\frac{1}{2}$ 和 $\int_T u_0(x,\omega)\mathrm{d}x=0$. 那么问题(3)~(4)式或(3)~(5)式在 $H^s(T)$ 上的整体适定性,在统计总体上几乎处处成立.更确切地说,对于 $-\frac{1}{2}\leq s<\frac{1}{2}$ 和任意的 $\varepsilon>0$,都存在一个 Ω_ε 且 $\mu((\Omega_\varepsilon)^c)<\varepsilon$ 使得(3)~(4)式或(3)~(5)式是整体适定的.并且对所有时间 $t\in\mathbf{R}$ 和一个较大集合的随机初值和 $u_0\in\Omega_\varepsilon$ 来说,都有

$$\| u(\cdot,t,\omega)\|_{H^s} \leq C(\omega,s)\left(\mathrm{In}\frac{1+|t|}{\varepsilon}\right)^{1/2}. \tag{6}$$

定理 2(Gibbs 测度) 令 $\frac{1}{6}<s<\frac{1}{2}$ 和 $\int_T u_0(x,\omega)\mathrm{d}x=0$. 于是借助于一个 L^2 截断函数(限制在一个闭球上),在(3)~(4)式或(3)~(5)式的随机流下,Gibbs 测度 μ 是不变的.

1 符号与记法

在这部分中,回顾一些记法和定义.通篇文章,C 表示在不同的情况下都会变化的正常数.B 是一个正常数.假设 $\eta(t)$ 是支集在$[-1,2]$上且在$[0,1]$等于1的光滑函数.假设 $\Psi\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ 且 $\Psi\geq 0$,$\mathrm{supp}\Psi\subset[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]$,在区间$[-\frac{5}{4},\frac{5}{4}]$上 $\Psi=1$ 和 $v_k=\Phi(2^{-k}\xi)-\Phi(2^{-k+1}\xi)$. $\dot{\mathbf{Z}}:=\mathbf{Z}-\{0\}$. 定义 $\int a(k)\mathrm{d}k=\sum_{k\in\dot{\mathbf{Z}}}a(k)$. 定义 $\mathscr{F}_x f(k)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x$, $f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathscr{F}_x f(k)\mathrm{e}^{ixk}$.

如果 $\beta=1$,定义 $P_N\phi=\phi^N\triangleq\sum_{1<|n|<N}a_n\ \mathrm{e}^{inx}$ 如果 $\beta=-1$,定义 $P_N\phi=\phi^N\triangleq\sum_{2<|n|<N}a_n\ \mathrm{e}^{inx}$. 因此得 $\partial_x^{-1}f=\int_0^x f(y)\mathrm{d}y=\sum_{k\in\dot{\mathbf{Z}}}\mathscr{F}_x f(k)\int_0^x \mathrm{e}^{ikx}\mathrm{d}x=\frac{1}{ik}\sum_{k\in\dot{\mathbf{Z}}}[\mathrm{e}^{ikx}-1]\mathscr{F}_x f(k)$ 和 $S(t)\phi(x)=\int \mathrm{e}^{ikx}e^{-i(\beta k^3+\frac{1}{k})}\mathscr{F}_x\phi(k)\mathrm{d}k$.

对于 $k\in\dot{\mathbf{Z}}$ 和 $\tau\in\mathbf{R}$,定义 $\mathscr{F}f(k,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-ikx}\ \mathrm{e}^{-it\tau}f(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$ 和 $v(x,t)=\int\int \mathrm{e}^{ikx}\ \mathrm{e}^{it\tau}\mathscr{F}f(k,\tau)\mathrm{d}k\mathrm{d}\tau$.

因此,用上面的定义,得到 $\|f\|_{L^2(T)}=\|\mathscr{F}_x f\|_{L^2((\mathrm{d}k))}$, $\int_0^{2\pi}f(x)\ \overline{g(x)}\mathrm{d}x=\int\mathscr{F}_x f(k)\ \overline{\mathscr{F}_x f(k)}\mathrm{d}k$,

$\mathscr{F}_x(fg)=\mathscr{F}_xf*\mathscr{F}_xg=\int\mathscr{F}_xf(k-k_1)\mathscr{F}_xg(k_1)\mathrm{d}k_1$.

令 $\langle\cdot\rangle=1+|\cdot|$，$P(k)=\beta k^3+\dfrac{1}{k}$，$P_l(k)=\beta k_l^3+\dfrac{1}{k_l}$，$\sigma=\tau+P(k)$，$\sigma_l=\tau_l+P(k_l)$，$l=1,2$.

用范数 $\|f\|_{H^s(T)}=\|\langle k\rangle^s\mathscr{F}_xf(k)\|_{L^2(k)}$ 来定义索布列夫空间 $H^s(T)$. 用范数来 $\|u\|_{X_{s,b}}(T\times\mathbf{R}=\|\langle k\rangle^s\langle\tau+P(k)\rangle^b\mathscr{F}_u(k,\tau)\|_{L^2_{k\tau}(\mathbf{Z}\times\mathbf{R})}$ 定义 Bourgain 空间 $X_{s,b}(T\times\mathbf{R})=\{u\in\phi'\mathbf{R}^2):\|u\|_{X_{s,b}}(T\times\mathbf{R})<\infty\}$. 空间 Y_s 和 Z_s 是由下面的范数定义的

$$\|u\|_{Y_s}=\|u\|_{X_{s,\frac{1}{2}}}+\|\langle k\rangle^s\mathscr{F}u(k,\tau)\|_{L^2_kL^1_\tau},$$

$$\|u\|_{\mathbf{Z}_s}=\|u\|_{X_{s,-\frac{1}{2}}}+\|\langle k\rangle^s\langle\tau+P(k)\rangle^{-1}\mathscr{F}u(k,\tau)\|_{L^2_kL^1_\tau}.$$

定义 $\|u\|_{X^\delta_{s,b}}=\inf\{\|v\|_{X_{s,b}}:v|_{[0,\delta]}=u\}$，$\|u\|_{Y^\delta_s}=\inf\{\|v\|_{Y_s}:v|_{[0,\delta]}=u\}$.

通过直接的计算，有 $\mathrm{E}\|u(\cdot,0,\omega)\|_{H^s}=\sum\limits_{k\neq0}|k|^{2s-2}<\infty$ 当且仅当 $s<\dfrac{1}{2}$. 因此，$\bigcap_{s<\frac{1}{2}}H^s$ 是一个候选空间. 用傅里叶系数 $a=(a_n)_{n\in\dot{\mathbf{Z}}}$ 确定 T 上实值函数 u_0，然后，用标准密度 $\mathrm{d}\rho_N=\prod\limits_{n-1}^{N}\left(\beta n^2+\dfrac{1}{n^2}\right)\exp\left\{-\pi\sum\limits_{n-1}^{N}\left(\beta n^2+\dfrac{1}{n^2}\right)|a_n|^2\right\}\chi_{\{\|P_N\phi\|_{L^2}<B\}}\prod\limits_{n-1}^{N}\mathrm{d}a_n$，若 $\beta=1$ 或者 $\mathrm{d}\rho_N=\prod\limits_{n-2}^{N}\left(\beta n^2+\dfrac{1}{n^2}\right)\exp\left\{-\pi\sum\limits_{n-2}^{N}\left(\beta n^2+\dfrac{1}{n^2}\right)|a_n|^2\right\}\chi_{\{\|P_N\phi\|_{L^2}<B\}}\prod\limits_{n-2}^{N}\mathrm{d}a_n$，若 $\beta=-1$ 来定义有限维高斯测度. 其中 ρ_N 是在映射 $\omega\to\{\dfrac{f_n(\omega)}{n},1\leq n\leq N\}$ 下 C^N 上的诱导概率测度，并且事实上 $\{f_n(\omega)\}$ 是独立同分布标准复高斯随机变量. 特别有，ρ_N 是 C^N 上的 Wiener 度量. 用标准密度

$$\mathrm{d}\mu_N=Z_N^{-1}\exp\{\frac{1}{6}\int(P_N\phi)^3\mathrm{d}x\}\chi_{\{\|P_N\phi\|_{L^2}<B\}}\mathrm{d}\rho_N,$$

定义在 $C^N=\{a_n,1\leq n\leq N\}$ 上带有权重的 Wiener 测度，其中 $Z_N=\int_{C^N}\exp\{\dfrac{1}{6}\int(P_N\phi)^3\mathrm{d}x\}\mathrm{d}\rho_N$.

在 $\beta=1$ 的情况下，定义 $\mathrm{d}\rho=\prod\limits_{n-1}^{\infty}\left(\beta n^2+\dfrac{1}{n^2}\right)\exp\{-\pi\sum\limits_{n-1}^{+\infty}\left(\beta n^2+\dfrac{1}{n^2}\right)|a_n|^2\}\chi_{\{\|\phi\|_{L^2}<B\}}\prod\limits_{n-1}^{\infty}\mathrm{d}a_n$.

在 $\beta=-1$ 的情况下，定义 $\mathrm{d}\rho=\prod\limits_{n-2}^{\infty}\left(\beta n^2+\dfrac{1}{n^2}\right)\exp\{-\pi\sum\limits_{n-2}^{+\infty}\left(\beta n^2+\dfrac{1}{n^2}\right)|a_n|^2\}\chi_{\{\|\phi\|_{L^2}<B\}}\prod\limits_{n-2}^{\infty}\mathrm{d}a_n$.

如果 $\beta=1$，定义

$$\Omega_N=\{a_k,1\leq k\leq N\},\Omega_B=\{a_n,n\geq1,\|a_n\|_{L^2}\leq B\},\Omega_{N,B}=\left\{(a_k)_{1<k<n},\left[\sum_{k-1}^{n}|a_k|^2\right]^{1/2}\leq B\right\},$$

$$\Omega_{N,B}(s,K)=\left\{(a_k)_{1<k<n}\in\Omega_{N,B},\left\|\sum_{1<k<n}a_k\mathrm{e}^{ikx}\right\|_{H^s}\leq K\right\},$$

$$\Omega_B(s,K)=\left\{(a_k)_{k>1}\in\Omega_B,\left\|\sum_{k>1}a_k\mathrm{e}^{ikx}\right\|_{H^s}\leq K\right\},E_N=\{\mathrm{e}^{inx},1\leq|n|\leq N\}.$$

如果 $\beta=-1$，定义

$$\Omega_N=\{a_n,2\leq n\leq N\},\Omega=\{a_n,n\geq2\},\Omega_B=\{a_n,n\geq2,\|a_n\|_{L^2}\leq B\},$$

$$\Omega_{N,B}=\left\{(a_k)_{2<k<n},\left[\sum_{k-2}^{n}|a_k|^2\right]^{1/2}\leq B\right\},\Omega_{N,B}(s,K)=\left\{(a_k)_{2<k<n}\in\Omega_{N,B},\left\|\sum_{2<k<n}a_k\mathrm{e}^{ikx}\right\|_{H^s}\leq K\right\},$$

$$\Omega_B(s,K)=\left\{(a_k)_{k>2}\in\Omega_B,\left\|\sum_{k>2}a_k\mathrm{e}^{ikx}\right\|_{H^s}\leq K\right\},E_N=\{\mathrm{e}^{inx},2\leq|n|\leq N\}.$$

对每一个 Borel 可测集 A，定义 $\mu(A)=\lim\limits_{N\to+\infty}\mu_N(A\cap E_N)$，$\rho(A)=\lim\limits_{N\to+\infty}\rho_N(A\cap E_N)$. 根据 μ,ρ 的定义，定义带有权重的 Wiener 测度 $\mathrm{d}\mu=Z^{-1}\exp\left(\dfrac{1}{6}\int\phi^3\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\rho$，其中 $Z=\int_{C^N}\exp\left\{\dfrac{1}{6}\int\phi^3\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}\rho$.

2　准备工作

本部分，为了证明双线性估计和定理 1 和定理 2，给出一些准备.

引理 1 对于任意的 $1\leq r<\infty$ 和 $B>0$，下面的结论成立：

$$\exp\Big(\frac{1}{3}\int(P_N\phi)^3\mathrm{d}x\Big)\chi_{\{\|P_N\phi\|_{L^2}<B\}}\in L^r(\mathrm{d}\rho_N),\tag{7}$$

$$\exp\Big(\frac{1}{3}\int\phi^3\mathrm{d}x\Big)\chi_{\{\|\phi\|_{L^2}<B\}}\in L^r(\mathrm{d}\rho).\tag{8}$$

对于引理 1 的证明，请读者参考文献[35－36].

引理 2 令 $s<\frac{1}{2}$，对于充分大的 $K>0$，存在 $C>0$ 且不依赖于 N，使得

$$\rho_N(w:\|S_N\phi\|_{H^s}>K)=\int_{\{\|P_N\phi\|_{H^s}>K\}}\mathrm{d}\rho_N\leq \mathrm{e}^{-CK^2},\tag{9}$$

$$\rho(w:\|\phi\|_{H^s}>K)=\int_{\{\|\phi\|_{H^s}>K\}}\mathrm{d}\rho\leq \mathrm{e}^{-CK^2}.\tag{10}$$

对于引理 2 的证明，请读者参考文献[35－36,41].

引理 3 令 $s<\frac{1}{2}$，对于充分大的 $K>0$，存在 $C>0$ 且不依赖于 N，使得

$$\mu_N(w:\|P_N\phi\|_{H^s}>K)=\int_{\{\|P_N\phi\|_{H^s}>K\}}\mathrm{d}\mu_N\leq \mathrm{e}^{-CK^2},\tag{11}$$

$$\mu(w:\|\phi\|_{H^s}>K)=\int_{\{\|\phi\|_{H^s}>K\}}\mathrm{d}\mu\leq \mathrm{e}^{-CK^2}.\tag{12}$$

证明 结合 μ_N,ρ_N 的定义和 Cauchy-Schwartz 不等式，可以得到

$$\mu_N(w:\|P_N\phi\|_{H^s}>K)=\int_{\{\|P_N\phi\|_{H^s}>K\}}\mathrm{d}\mu_N=\int_{\{\|P_N\phi\|_{H^s}>K\}}\exp\{\frac{1}{6}\int(P_N\phi)^3\mathrm{d}x\}\mathrm{d}\rho_N\leq$$

$$\Big(\int_{\{\|P_N\phi\|_{H^s}>K\}}\exp\Big\{\frac{1}{3}\int(P_N\phi)^3\mathrm{d}x\Big\}\mathrm{d}\rho_N\Big)^{1/2}\Big(\int_{\{\|P_N\phi\|_{H^s}>K\}}\mathrm{d}\rho_N\Big)^{1/2}.\tag{13}$$

结合(7)、(9)式，得到

$$\mu_N(w:\|P_N\phi\|_{H^s}>K)\leq C[\rho_N(w:\|P_N\phi\|_{H^s}>K)]^{1/2}\leq C\,\mathrm{e}^{-CK^2}\leq \mathrm{e}^{-CK^2}.\tag{14}$$

通过使用类似于(11)式的证明方法，得到(12)式. 这样就完成了引理 3 的证明.

引理 4 令 u 和 v 是 $\mathbf{L}^2(\dot{\mathbf{Z}}\times\mathbf{R})$ 上的实值函数. 对$(l_1,l_2)\in N^2$，有

$$\|(\Psi_{l_1}u)*(\Psi_{l_2}v)\|_{L^2_{xt}}\leq C(2^{l_1}\wedge 2^{l_2})^{1/2}(2^{l_1}\vee 2^{l_2})^{1/6}\|\Psi_{l_1}u\|_{L^2}\|\Psi_{l_2}v\|_{L^2}.\tag{15}$$

证明 受文献[7,14,64]证明的启发，不失一般性，假设 $\mathrm{supp}u_j\subset\{(\tau,k)\in\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{Z}}^+\}$. 令 $\Lambda_1(\tau,k)=\{\tau_1,k_1)\in\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{Z}}^+/(k-k_1)\in\dot{\mathbf{Z}}^+,\langle\sigma_1\rangle\sim 2^{l_1},\langle\sigma_2\rangle\sim 2^{l_2}\}$，然后关于 τ_1,k_1 用 Cauchy-Schwarz 不等式，可以得到

$$\|(\Psi_{l_1}u_1)*(\Psi_{l_2}u_2)\|^2_{L^2}=\int_{\mathbf{R}_\tau}\sum_{k\in\dot{\mathbf{Z}}}|\int_{\mathbf{R}_{\tau_1}}\sum_{k_1\in\dot{\mathbf{Z}}}(\Psi_{l_1}u_1)(\tau_1,k_1)(\Psi_{l_2}u_2)(\tau-\tau_1,k-k_1)\mathrm{d}\tau_1|^2\mathrm{d}\tau\leq$$

$$C\int_\tau\sum_{k\in\dot{\mathbf{Z}}}\alpha(\tau,k)\int_{\mathbf{R}_{\tau_1}}\sum_{k_1\in\dot{\mathbf{Z}}}|(\Psi_{l_1}u_1)(\tau_1,k_1)(v_{l_2}u_2)(\tau-\tau_1,k-k_1)|^2\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau\leq$$

$$C\|\Psi_{l_1}u_1\|^2_{L^2}\|\Psi_{l_2}u_2\|^2_{L^2}\#\Lambda_1(\tau,k).\tag{16}$$

对固定的 $\tau,k\neq 0$，令 $G=\tau+\frac{\beta k^3}{4}+\frac{4}{k}$，并且令 F_1 和 F_2 是 Λ_1 分别在 k_1 轴和 τ_1 轴上的投影. 显然，

$$\tau+\frac{\beta k^3}{4}+\frac{4}{k}-\Big(\tau_1+\beta k_1^3+\frac{1}{k_1}\Big)-\Big(\tau_2+\beta k_2{}^3+\frac{1}{k_2}\Big)=-\frac{3\beta}{4}k(k_1-k_2)^2\Big[1+\frac{4}{3\beta k^2k_1k_2}\Big].\tag{17}$$

从(17)式中，可以得出存在 $C_j>0$，$j=1,2$ 使得

$$\frac{|C_1(2^{l_1}+2^{l_2})-G|}{|k|}\leq\frac{3}{4}(k_1-k_2)^2\,|1+\frac{4}{3\beta k^2k_1k_2}|\leq\frac{|C_2(2^{l_1}+2^{l_2})+G|}{|k|},\tag{18}$$

如果 $k^3>2^{l_1}\vee 2^{l_2}$，结合(18) 式和$\frac{1}{3}\leq|1+\frac{4}{3\beta k^2k_1k_2}|\leq 2$，得到

$$\#F_2\leq 2\Big[\frac{|C_1(2^{l_1}+2^{l_2})+G|}{|k|}-\frac{|C_2(2^{l_1}+2^{l_2})-G|}{|k|}\Big]^{1/2}+1\leq$$

$$C\Big(\frac{(2^{l_1}\vee 2^{l_2})}{|k|}\Big)^{1/2}+1\leq C(2^{l_1}\vee 2^{l_2})^{1/3}.$$

如果 $0 \le k^3 \le 2^{l_1} \vee 2^{l_2}$,因为 $|k_1| \le |k|$,得到

$$\# F_2 \le \#\{k_1, 0 \le k_1^3 \le 2^{l_1} \vee 2^{l_2}\} \le C(2^{l_1} \vee 2^{l_2})^{1/3}. \tag{19}$$

从(19)式可知

$$\# F_1 \le C(2^{l_1} \wedge 2^{l_2}). \tag{20}$$

结合(18)~(20)式,可以得到

$$\|(\Psi_{l_1} u_1) * (\Psi_{l_2} u_2)\|_{L^2} \le C(2^{l_1} \wedge 2^{l_2})^{1/2}(2^{l_1} \vee 2^{l_2})^{1/6} \|\Psi_{l_1} u_1\|_{L^2} \|\Psi_{l_2} u_2\|_{L^2}. \tag{21}$$

这样就完成了引理 4 的证明.

引理 5　令 $v(x,t)$ 是以 2π 为周期的函数,于是,可以得到

$$\|v\|_{L^4_{xt}} \le C\|v\|_{X_{0,\frac{1}{3}}}(T \times \mathbf{R}). \tag{22}$$

证明　令 $l_1 = l + l_2$ 其中 $l \in N$,结合三角不等式和(15)式,可以得到

$$\begin{aligned} \|v\|^2_{L^4_{xt}} = \|v^2\|_{L^2} = \|\mathscr{F}v * \mathscr{F}v\|_{L^2} \le \sum_{l_1>0}\sum_{l_2>0} \|\Psi_{l_1}|\mathscr{F}v| * \Psi_{l_2}|\mathscr{F}v|\|_{L^2} \le C\sum_{l_1>0}\sum^{l_2>0} \|\Psi_{l_1}|\mathscr{F}v| * \\ \Psi_{l_2}|\mathscr{F}v|\|_{L^2} \le C\sum_{l>0}\sum_{l_2>0} 2^{l_2/2}2^{(l_2+l)/6}\|\Psi_{l_2+l}\mathscr{F}v\|_{L^2}\|\Psi_{l_2}\mathscr{F}v\|_{L^2} \le \\ C\sum_{l>0}\sum_{l_2>0} 2^{l_2/3}\|\Psi_{l_2}\mathscr{F}v\|_{L^2} 2^{-l/6}2^{(l_2+l)/3}\|\Psi_{l_2+l}\mathscr{F}v\|_{L^2} \le \\ C\sum_{l>0} 2^{-l/6}\Big(\sum_{l_2} 2^{l_2/3}\|\Psi_{l_2}\mathscr{F}v\|^2_{L^2}\Big)^{1/2} \times \\ \Big(2^{(l_2+l)/3}\|\Psi_{l_2+l}\mathscr{F}v\|^2_{L^2}\Big)^{1/2} \le C\|v\|^2_{X_{0,1/3}(T\times\mathbf{R})}. \end{aligned} \tag{23}$$

由(23)式得出(25)式.这就完成了引理 5 的证明.

引理 6　让 $v(x,t)$ 是以 2π 为周期的函数,于是

$$\|v\|_{X_{0,-\frac{1}{3}}(T\times\mathbf{R})} \le C\|v\|_{L^{4/3}_{xt}} = \Big(\int_{\mathbf{R}}\int_0^{2\pi} v^{4/3}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)^{3/4}. \tag{24}$$

证明　这个引理是通过结合引理 5 和对偶性得到的.

引理 7　对 $k \in \dot{\mathbf{Z}}, k_j \in \dot{\mathbf{Z}}(j=1,2)$ 和二进制数 $M \ge 1, \varepsilon' < \dfrac{1}{300}$,其中 M_e 代表测度,有

$$M_e\left\{J \in \mathbf{R}: |J| \sim M, \mu = 3\beta kk_1k_2 + \frac{k^2 - k_1k_2}{kk_1k_2} + O(\langle kk_1k_2\rangle^{\varepsilon'})\right\} \le CM^{3/4}. \tag{25}$$

证明　观察到 k_1 和 k_2 间的对称性,假设 $|k_1| \ge |k_2|$.如果 $|k| \ge |k_1|$,由

$$J = \mu = 3\beta kk_1k_2 + \frac{k^2 - k_1k_2}{kk_1k_2} + O(\langle kk_1k_2\rangle^{\varepsilon'}), \tag{26}$$

有 $C_1|k|^2 \le |J| \le C_2|k|^3$,因为 $k_1, k_2 \in \dot{\mathbf{Z}}$.因此,当 $p \in [2,3]$ 时,$|J| \sim M \sim |k|^p$,于是有 $|k_1k_2| \sim M^{1-\frac{1}{p}}$,其中 $p \in [2,3]$.最终得到

$$M_e\{J \in \mathbf{R}: |J| \sim M, \mu = 3\beta kk_1k_2 + \frac{k^2 - k_1k_2}{kk_1k_2} + O(\langle kk_1k_2\rangle^{\varepsilon'})\} \le CM^{1-\frac{1}{p}}M^{\varepsilon'} \le CM^{\frac{3}{4}}.$$

$|k| \le |k_1|$ 的情形能够类似于 $|k_1| \le |k|$ 的证明.这样就证明了引理 7.

引理 8　令 $L(k) = \{J \in \mathbf{R}: |J| \sim M, J = 3\beta kk_1k_2 + \dfrac{k^2 - k_1k_2}{kk_1k_2} + O(\langle kk_1k_2\rangle^{\varepsilon'})\}$.于是,有

$$\int \langle J\rangle^{-1}\chi_{L(k)}(J)\mathrm{d}J \le C. \tag{27}$$

证明　通过结合引理 7 和文献[10]中第 737 页的内容加以证明.

引理 9　令 $k, k_1, k_2 \in \dot{\mathbf{Z}}$. $\sigma = \tau + \beta k^3 + \dfrac{1}{k}, \sigma_j = \beta k_j^3 + \dfrac{1}{k_j}, j = 1,2$.于是,有

$$3\max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\} \ge |\sigma - \sigma_1 - \sigma_2| = \Big|3\beta kk_1k_2 - \frac{k_1{}^2 - k_1k_2 + k_2{}^2}{kk_1k_2}\Big| \ge C|kk_1k_2|. \tag{28}$$

引理 9 的证明很显然,因此就省略了这个证明.从引理 9 中,总结出以下 3 种情况之一一定会满足:

$$\text{(a)}: |\sigma| = \max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\} \ge C|k_{\min}||k_{\max}|^2, \tag{29}$$

$$(b):|\sigma_1|=\max\{|\sigma|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}\geq C|k_{\min}||k_{\max}|^2, \tag{30}$$

$$(c):|\sigma_2|=\max\{|\sigma|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}\geq C|k_{\min}||k_{\max}|^2. \tag{31}$$

引理 10 令 ϕ 是一个以 2π 为周期的函数,有 $\|\eta(t)S(t)\phi\|_{Y_s^\delta}\leq C\|\phi\|_{H^s}$.

能够类似于文献[34]中的引理 2.6 的证明,得到引理 10.

引理 11 令 F 是一个以 2π 为周期的函数,于是有 $\|\eta(t)\int_0^t S(t-\tau)F(\tau)\mathrm{d}\tau\|_{Y_s^\delta}\leq C\|\eta(\frac{t}{\delta})F\|_{Z_s}$.

类似于文献[34]中的引理 2.7 的证明,得到引理 11.

引理 12 令 $s\in\mathbf{R}$ 和 $\delta\in(0,1)$,于是对于 $-\frac{1}{2}<b<b'\leq 0$ 或 $0\leq b<b'<\frac{1}{2}$,有

$$\|\eta(\frac{t}{\delta})u\|_{X_{0,b}}\leq C\delta^{b-b'}\|u\|_{X_{0,b'}}. \tag{32}$$

引理 12 的证明,请读者参考文献[11]的引理 1.10.

引理 13 对 $u\in X_{\sigma,b}^\delta$,存在 $\tilde{u}$ 且 $u|_{[0,\delta]}=\tilde{u}$,使得当 $s\leq\sigma$,有 $\|u\|_{X_{s,b}^\delta}=\|\tilde{u}\|_{X_{s,b}}$.

引理 13 的证明,请读者参考文献[11]中的引理 1.6.

引理 14 令 $s\in\mathbf{R}$,$0<\varepsilon<\frac{1}{10\ 000}$ 和 $F(k,\tau)=\langle k\rangle^s\langle\sigma\rangle^{1/2}\mathscr{F}(\eta(\frac{t}{\delta})\tilde{u})(k,\tau)$,其中 $F\in L^2$. 于是有 $\left\|\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{F}{\langle\sigma\rangle^{1/2}}\right)\right\|_{L^4}\leq C\delta^{\frac{1}{6}-\varepsilon}\|F\|_{L^2}$.

类似于文献[34]中引理 2.11 的证明,得到引理 14.

引理 15 令 $\sigma=\tau+(-1)^jk^{2j+1}$,$\sigma_l=\tau_l+(-1)^jk_l^{2j+1}$,$l=1,2$. $s\in\mathbf{R}$,$0<\varepsilon<\frac{1}{10\ 000}$,$G_l(k_l,\tau_l)=\langle k_l\rangle^s\langle\sigma_l\rangle^{1/2}\mathscr{F}\left(\eta\left(\frac{t}{\delta}\right)\tilde{u}_l\right)(k_l,\tau_l)$,$l=1,2$,其中 $G_l\in L^2$,$l=1,2$. 于是有:

$$\left\|\langle\sigma\rangle^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\int_{\substack{k=k_1+k_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}}\frac{\prod_{l=1}^2 G_l(k_l,\tau_l)}{\langle\sigma_2\rangle^{1/2}}(\mathrm{d}k_1)_\lambda\mathrm{d}\tau_1\right\|_{L^2}\leq C\delta^{\frac{1}{3}-2\varepsilon}\prod_{l=1}^2\|G_l\|_{L^2}.$$

相似于文献[34]中引理 2.12 的证明,得到引理 15.

3 双线性估计

在这一节中,建立两个重要的双线性估计.

引理 16 对 $l=1,2$,令 $u_l(x,t)$ 以 2π 为周期的函数,且有 $\int_T u_l(x,t)\mathrm{d}x=0$ 和 $s\geq-\frac{1}{2}$ 于是,当 $0<\varepsilon<\frac{1}{30\ 000}$,有

$$\left\|\partial_x\prod_{j=1}^2(u_j)\right\|_{X_{s,-\frac{1}{2}}^\delta}\leq C\delta^{\frac{1}{3}-2\varepsilon}\prod_{j=1}^2\|u_j\|_{X_{s,\frac{1}{2}}^\delta}. \tag{33}$$

证明 从零平均条件中,可以假设 $k\neq0$,$k_l\neq0(l=1,2)$. 假设 $\tilde{u}$,$\tilde{u}_1$,$\tilde{u}_2$ 分别是 u,u_1,u_2 的延拓,从引理 15 可以得到 $\|u\|_{X_{s,\frac{1}{2}}^\delta}=\|\tilde{u}\|_{X_{s,\frac{1}{2}}}$,$\|u_l\|_{X_{s,\frac{1}{2}}^\delta}=\|\tilde{u}_l\|_{X_{s,\frac{1}{2}}}(l=1,2)$.

为了得到(33)式,对 $u\in X_{-s,\frac{1}{2}}^\delta$. 只需充分证明

$$\int_{\substack{k=k_1+k_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}}\left|k\mathscr{F}\left(\eta\left(\frac{t}{\delta}\right)\tilde{u}\right)(k,\tau)\prod_{l=1}^2\mathscr{F}\left(\eta\left(\frac{t}{\delta}\right)\tilde{u}_l\right)(k_l,\tau_l)\right|\mathrm{d}k_1\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}k\mathrm{d}\tau\leq$$

$$C\delta^{\frac{1}{3}-2\varepsilon}\|u\|_{X_{-s,\frac{1}{2}}^\delta}\prod_{l=1}^2\|u_l\|_{X_{s,\frac{1}{2}}^\delta}=C\delta^{\frac{1}{3}-2\varepsilon}\|\tilde{u}\|_{X_{-s,\frac{1}{2}}}\prod_{l=1}^2\|\tilde{u}_l\|_{X_{s,\frac{1}{2}}}. \tag{34}$$

令 $F(k,\tau)=\langle k\rangle^{-s}\langle\sigma\rangle^{1/2}\mathscr{F}\left(\eta\left(\frac{t}{\delta}\right)\tilde{u}\right)(k,\tau)$,$F_l(k_l,\tau_l)=\langle k_l\rangle^s\langle\sigma_l\rangle^{1/2}\mathscr{F}\left(\eta\left(\frac{t}{\delta}\right)\tilde{u}_l\right)(k_l,\tau_l)$,$l=1,2$,$K_1(k_1,$

$$\tau_1,k,\tau)=\frac{|k|\langle k\rangle^s}{\langle\sigma\rangle^{1/2}\prod_{l=1}^{2}\langle k_l\rangle^s\langle\sigma_l\rangle^{1/2}}.$$

为了得到(34)式,只需充分证明

$$\int_{\substack{k=k_1+k_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}}K_1(k_1,\tau_1,k,\tau)\left|F(k,\tau)\prod_{l=1}^{2}F_l(k_l,\tau_l)\right|\mathrm{d}k_1\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}k\mathrm{d}\tau\leq C\delta^{\frac{1}{3}-2\varepsilon}\|F\|_{L^2}\prod_{l=1}^{2}\|F_l\|_{L^2}. \tag{35}$$

当(29)式成立,由于 $s\geq-\frac{1}{2}$, 有

$$K_1(k_1,\tau_1,k,\tau)\leq C\frac{|k|^{s+\frac{1}{2}}\prod_{l=1}^{2}k_l^{-\frac{1}{2}-s}}{\prod_{l=1}^{2}\langle\sigma_l\rangle^{1/2}}\leq C\frac{[\min\{|k_l|,|k_2|\}]^{-\frac{1}{2}-s}}{\prod_{l=1}^{2}\langle\sigma_l\rangle^{1/2}}\leq\frac{C}{\prod_{l=1}^{2}\langle\sigma_l\rangle^{1/2}}. \tag{36}$$

结合 Plancherel 恒等式,Hölder 不等式,引理 15 和(36)式,有

$$\int_{\mathbf{R}^2_{\tau k}}\int_{\substack{k=k_1+k_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}}K_1(k_1,\tau_1,k,\tau)\left|F(k,\tau)\prod_{l=1}^{2}F_l(k_l,\tau_l)\right|\mathrm{d}k_1\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}k\mathrm{d}\tau\leq$$

$$C\int_{\substack{k=k_1+k_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}}\frac{|F(k,\tau)\prod_{l=1}^{2}F_l(k_l,\tau_l)|}{\prod_{l=1}^{2}\langle\sigma_l\rangle^{1/2}}\mathrm{d}k_1\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}k\mathrm{d}\tau\leq$$

$$C\|F\|_{L^2}\prod_{l=1}^{2}\|F_l\|_{L^2}\leq C\delta^{\frac{1}{3}-2\varepsilon}\|F\|_{L^2}\prod_{l=1}^{2}\|F_l\|_{L^2}.$$

当(30)式成立,用类似于(36)式的证明,得到

$$K_1(k_1,\tau_1,k,\tau)\leq\frac{C}{\langle\sigma\rangle^{1/2}\langle\sigma_2\rangle^{1/2}}. \tag{37}$$

结合柯西-施瓦茨不等式和(37)式,得到

$$\int_{\mathbf{R}^2_{\tau k}}|F(k,\tau)|\left(\langle\sigma\rangle^{-1/2}\int_{\substack{k=k_1+k_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}}\frac{|\prod_{l=1}^{2}F_l(k_l,\tau_l)|}{\langle\sigma_2\rangle^{1/2}}\mathrm{d}k_1\mathrm{d}\tau_1\right)\mathrm{d}k\mathrm{d}\tau\leq$$

$$\int_{\mathbf{R}^2_{\tau k}}|F(k,\tau)|\left(\langle\sigma\rangle^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\int_{\substack{k=k_1+k_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}}\frac{|\prod_{l=1}^{2}F_l(k_l,\tau_l)|}{\langle\sigma_2\rangle^{1/2}}\mathrm{d}k_1\mathrm{d}\tau_1\right)\mathrm{d}k\mathrm{d}\tau\leq$$

$$C\|F(k,\tau)\|_{L^2_{k\tau}}\left\|\langle\sigma\rangle^{-1/2+\varepsilon}\int_{\substack{k=k_1+k_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}}\frac{|\prod_{l=1}^{2}F_l(k_l,\tau_l)|}{\langle\sigma_2\rangle^{1/2}}\mathrm{d}k_1\mathrm{d}\tau_1\right\|_{L^2}\leq$$

$$C\delta^{\frac{1}{3}-2\varepsilon}\|F\|_{L^2}\prod_{l=1}^{2}\|F_l\|_{L^2}.$$

当(31)式成立,这种情况可以类似于情形(30)式加以证明.这样就完成了引理 16 的证明.

引理 17　对于 $l=1,2$,令 $u_l(x,t)$ 是 2π 为周期的函数,且有 $\int_T u_l(x,t)\mathrm{d}x=0$ 和 $s\geq-\frac{1}{2}$. 于是,当 $0<\varepsilon<\frac{1}{30\ 000}$, 有

$$\left\|\int_{\substack{k=k_1+k_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}}\langle\sigma\rangle^{-1}|k|\langle k\rangle^s\prod_{j=1}^{2}\mathscr{F}\eta\left(\frac{t}{\delta}\right)u_j(\tau_j,k_j)\mathrm{d}k_1\mathrm{d}\tau_1\right\|_{L^2((\mathrm{d}k)L^1(\mathrm{d}\tau))}\leq C\delta^{\frac{1}{3}-3\varepsilon}\prod_{j=1}^{2}\|u_j\|_{X^{\delta}_{s,\frac{1}{2}}}. \tag{38}$$

证明　令 $\tilde{u}_1,\tilde{u}_2$ 分别是 u_1,u_2 的延拓,从引理 14 可以得到 $\|u_l\|_{X^{\delta}_{s,\frac{1}{2}}}=\|\tilde{u}_l\|_{X_{s,\frac{1}{2}}}$, $l=1,2$. 令 $G_l(k_l,\tau_l)=\langle k_l\rangle^s\langle\sigma_l\rangle^{1/2}\mathscr{F}\left(\eta\left(\frac{t}{\delta}\right)\tilde{u}_l\right)(k_l,\tau_l)$, $l=1,2$, $K_2(k_1,\tau_1,k,\tau)=\dfrac{|k|\langle k\rangle^s}{\langle\sigma\rangle^{1/2}\prod_{l=1}^{2}\langle k_l\rangle^s\langle\sigma_l\rangle^{1/2}}$.

为了得到(38)式,只需充分证明

$$\left\|\int_{\tau=\tau_1+\tau_2}^{k=k_1+k_2} K_2(k_1,\tau_1,k,\tau)\prod_{l=1}^{2} G_l(k_l,\tau_l)\mathrm{d}k_1\mathrm{d}\tau_1\right\|_{L^2(\mathrm{d}k)L^1(\mathrm{d}\tau)} \le C\delta^{\frac{1}{3}-3\varepsilon}\prod_{l=1}^{2}\|G_l\|_{L^2}. \tag{39}$$

当(29)式成立,如果 $\langle\sigma_1\rangle \ge C|k_{\min}|^{\varepsilon'}|k_{\max}|^{2\varepsilon'}$,因为 $\varepsilon' < \frac{1}{300}$,用类似于(36)式的证明方法,有

$$K_2(k_1,\tau_1,k,\tau) \le \frac{|k|^{s+\frac{1}{2}}\prod_{l=1}^{2}\langle k_l\rangle^{-\frac{1}{2}-s}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\langle\sigma_2\rangle^{\frac{1}{2}}} \le \frac{C}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\langle\sigma_2\rangle^{\frac{1}{2}}}. \tag{40}$$

利用(40)式,柯西-施瓦茨不等式,Plancherel 恒等式和引理 13,得到

$$\left\|\langle\sigma\rangle^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}\int_{\tau=\tau_1+\tau_2}^{k=k_1+k_2}\frac{\prod_{l=1}^{2}G_l(k_l,\tau_l)}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\langle\sigma_2\rangle^{1/2}}\mathrm{d}k_1\mathrm{d}\tau_1\right\|_{L^2(\mathrm{d}k)L^1(\mathrm{d}\tau)} \le C\left\|\int_{\tau=\tau_1+\tau_2}^{k=k_1+k_2}\frac{\prod_{l=1}^{2}G_l(k_l,\tau_l)}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\langle\sigma_2\rangle^{1/2}}\mathrm{d}k_1\mathrm{d}\tau_1\right\|_{L_k^2L_\tau^2} \le$$

$$C\delta^{\frac{1}{3}-3\varepsilon}\prod_{l=1}^{2}\|\tilde{u}_l\|_{X_{s,\frac{1}{2}-\varepsilon}} \le C\delta^{\frac{1}{3}-3\varepsilon}\prod_{l=1}^{2}\|\tilde{u}_l\|_{X_{s,\frac{1}{2}}} \le C\delta^{\frac{1}{3}-3\varepsilon}\prod_{l=1}^{2}\|G_l\|_{L^2}.$$

如果 $\langle\sigma_2\rangle \ge C|k_{\min}|^{\varepsilon'}|k_{\max}|^{2\varepsilon'}$,这种情形能够类似于情形 $\langle\sigma_1\rangle \ge C|k_{\min}|^{\varepsilon'}|k_{\max}|^{2\varepsilon'}$. 加以证明.

如果 $\langle\sigma_l\rangle \le C|k_{\min}|^{\varepsilon'}|k_{\max}|^{2\varepsilon'}, l=1,2$, 有

$$J = 3\beta kk_1k_2 + \frac{k^2-k_1k_2}{kk_1k_2} + O(\langle kk_1k_2\rangle^{\varepsilon'}) \tag{41}$$

和 $K_2(k_1,\tau_1,k,\tau) \le C\frac{|k|^{s+\frac{1}{2}}\prod_{l=1}^{2}|k_l|^{-\frac{1}{2}-s}}{\langle\sigma\rangle^{1/2}\prod_{l=1}^{2}\langle\sigma_l\rangle^{1/2}}$. 用类似于(36)式的证明,有

$$K_2(k_1,\tau_1,k,\tau) \le \frac{C}{\langle\sigma\rangle^{1/2}\prod_{l=1}^{2}\langle\sigma_l\rangle^{1/2}}. \tag{42}$$

最后,用(42)式、求关于 τ 的柯西-施瓦茨不等式以及引理 13,有

$$\left\|\langle\sigma\rangle^{-\frac{1}{2}}\chi_{\Omega(k)}\int_{\tau=\tau_1+\tau_2}^{k=k_1+k_2}\frac{\prod_{l=1}^{2}G_l(k_l,\tau_l)}{\prod_{l=1}^{2}\langle\sigma_l\rangle^{1/2}}\mathrm{d}k_1\mathrm{d}\tau_1\right\|_{L^2(\mathrm{d}k)L^1(\mathrm{d}\tau)} \le$$

$$C\left\|\left(\int\langle\sigma\rangle^{-1}\chi_{\Omega(k)}(\mu)\mathrm{d}\tau\right)^{1/2}\int_{\tau=\tau_1+\tau_2}^{k=k_1+k_2}\frac{\prod_{l=1}^{2}G_l(k_l,\tau_l)}{\prod_{l=1}^{2}\langle\sigma_l\rangle^{1/2}}\mathrm{d}k_1\mathrm{d}\tau_1\right\|_{L^2_{k\tau}} \le$$

$$C\left(\int\langle\sigma\rangle^{-1}\chi_{\Omega(k)}(\mu)\mathrm{d}\tau\right)^{1/2}\left\|\int_{\tau=\tau_1+\tau_2}^{k=k_1+k_2}\frac{\prod_{l=1}^{2}G_l(k_l,\tau_l)}{\prod_{l=1}^{2}\langle\sigma_l\rangle^{1/2}}\mathrm{d}k_1\mathrm{d}\tau_1\right\|_{L^2_{k\tau}} \le$$

$$C\delta^{\frac{1}{3}-2\varepsilon}\prod_{l=1}^{2}\|G_l\|_{L^2}, \tag{43}$$

其中,$L(k) = \{J\in\mathbf{R}: |J|\sim M, J = 3\beta kk_1k_2 + \frac{k^2-k_1k_2}{kk_1k_2} + O(\langle kk_1k_2\rangle^{\varepsilon'})\}$.

当(30)式成立,用类似于(36)式的证明,得到

$$K_2(k_1,\tau_1,k,\tau) \le C\frac{|k|^{s+\frac{1}{2}}\prod_{l=1}^{2}\langle k_l\rangle^{-\frac{1}{2}-s}}{\langle\sigma\rangle\langle\sigma_2\rangle^{\frac{1}{2}}} \le \frac{C}{\langle\sigma\rangle\langle\sigma_2\rangle^{\frac{1}{2}}}. \tag{44}$$

结合 τ 的柯西-施瓦茨不等式，引理 17 和(44)式，有

$$\left\| \int_{\substack{k=k_1+k_2 \\ \tau=\tau_1+\tau_2}} \frac{\prod_{l=1}^{2} G_l(k_l,\tau_l)}{\langle\sigma\rangle\langle\sigma_2\rangle^{1/2}} \mathrm{d}k_1\mathrm{d}\tau_1 \right\|_{L^2(\mathrm{d}k)L^1(\mathrm{d}\tau)} \leq C\left\| \langle\sigma\rangle^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \int_{\substack{k=k_1+k_2 \\ \tau=\tau_1+\tau_2}} \frac{\prod_{l=1}^{2} G_l(k_l,\tau_l)}{\langle\sigma_2\rangle^{1/2}} \mathrm{d}k_1\mathrm{d}\tau_1 \right\|_{L^2_{k\tau}} \leq C\delta^{\frac{1}{3}-2\varepsilon} \prod_{l=1}^{2} \| G_l \|_{L^2}.$$

情形(31)式可以类似于(30)式加以证明. 这样就完成了引理 17 的证明.

引理 18　对于 $l=1,2$，令 $u_l(x,t)$ 是自变量 x 以 2π 为周期的函数，且有 $\int_T u_l(x,t)\mathrm{d}x=0$ 和 $s\geq-\frac{1}{2}$. 于是，当 $0<\varepsilon<\frac{1}{30\ 000}$，有

$$\left\| \partial_x \prod_{j=1}^{2} \left(\eta\left(\frac{t}{\delta}\right)u_j\right) \right\|_{\mathbf{Z}_s} \leq C\delta^{\frac{1}{3}-3\varepsilon} \prod_{j=1}^{2} \| u_j \|_{Y_s}. \tag{45}$$

结合引理 16 和引理 17，得到引理 18.

4　局部适定性：确定性的情形

在这一部分，周期确定的 Ostrovsky 方程的柯西问题在 $H^s(T)$ 中且 $s\geq-\frac{1}{2}$ 是局部适定的.

引理 19　令 $s\geq-\frac{1}{2}$ 和 $\int_T u_0(x)\mathrm{d}x=0$. 于是有(3)式柯西问题在 $H^s(T)$ 上是局部适定性的.

证明　(3)式柯西问题的解和下面积分方程的解是相同的：

$$\Phi(u)=\eta(t)S(t)u(x,0)+\frac{1}{2}\int_0^t S(t-\tau)\partial_x\left(\eta\left(\frac{t}{\delta}\right)u\right)^2\mathrm{d}\tau. \tag{46}$$

其中 $t\in[0,\delta]$. 定义一个闭球 $B=\{u\in Y_s^\delta:\ \|u\|_{Y_s^\delta}\leq 2C\|u(x,0)\|_{H^s}\}$.

因此，用引理 11、引理 12 和引理 18，对充分小的 $\delta>0$，有

$$\begin{aligned}\|\Phi(u)\|_{Y_s^\delta} &\leq \|\eta(t)S(t)u_0\|_{Y_s^\delta}+\frac{1}{2}\left\|\int_0^t S(t-\tau)\partial_x\left(\eta\left(\frac{\tau}{\delta}\right)u\right)^2\mathrm{d}\tau\right\|_{Y_s^\delta} \leq C\|u(x,0)\|_{H^s}+ \\ &C\left\|\partial_x\left(\eta\left(\frac{t}{\delta}\right)u\right)^2\right\|_{\mathbf{Z}_s} \leq C\|u(x,0)\|_{H^s}+C\delta^{\frac{1}{3}-3\varepsilon}\|u\|_{Y_s^\delta}^2 \leq C\|u(x,0)\|_{H^s}+ \\ &C\delta^{\frac{1}{3}-3\varepsilon}\|u(x,0)\|_{H^s}^2 \leq 2C\|u(x,0)\|_{H^s}.\end{aligned} \tag{47}$$

用引理 11、引理 12 和引理 18，有

$$\begin{aligned}\|\Phi(u)-\Phi(v)\|_{Y_s^\delta} &\leq C\left\|\partial_x\left[\left(\eta\left(\frac{t}{\delta}\right)u\right)^2-\left(\eta\left(\frac{t}{\delta}\right)v\right)^2\right]\right\|_{\mathbf{Z}_s} \leq C\delta^{\frac{1}{3}-3\varepsilon}\|u-v\|_{Y_s^\delta}\|u+v\|_{Y_s^\delta} \leq \\ &C\delta^{\frac{1}{3}-3\varepsilon}\|u(x,0)\|_{H^s}\|u-v\|_{Y_s^\delta} \leq \frac{1}{2}\|u-v\|_{Y_s^\delta}.\end{aligned}$$

利用不动点定理，总结出 $\Phi(u)=u$. 引理 19 剩下的部分显然可以得出. 这样引理 19 得证.

5　证明定理 1

在这一部分，证明定理 1.

在证明定理 1 之前，考虑对(3)式进行有限维的逼近

$$u_t^N-\beta u_{xxx}^N-\partial_x^{-1}u^N+\frac{1}{2}\partial_x P_N((u^N)^2)=0. \tag{48}$$

其中 $u^N(x,t)=P_N u(x,t)$ 和 $u^N(x,0)=P_N u_0(x)$. 显然，具有下面的 3 个守恒律：

$$I_1(u^N)=\int_T u^N\mathrm{d}x,\ I_2(u^N)=\frac{1}{2}\int_T(u^N)^2\mathrm{d}x,\ I_3(u^N)=\frac{\beta}{2}\int_T(u_x{}^N)^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_T(\partial_x^{-1}u^N)^2\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int_T(u^N)^3.$$

所以，有 $u_t^N=\partial_x\frac{\delta I_2(u^N)}{\delta u^N}$. 最后，得出(48)式具有 Hamiltonian 结构.

引理 20　令 $s\geq-\frac{1}{2}$ 和 $\int_T u_0(x,\omega)\mathrm{d}x=0$. 当 $N\in N^+$，$P_N\phi\in H^s(T)$ 和 $\|P_N\phi\|_{H^s}\leq CK$ 时，对(48)

式柯西问题存在局部适定的唯一解,并且有 $\| u^N \|_{Y_s^\delta} \leq CK$.

用类似于引理 19 的证明方法,得到引理 20.

引理 21 令 $-\frac{1}{2} \leq s < \frac{1}{2}, \int_T u_0(x,\omega)\mathrm{d}x = 0$ 和 $\zeta > 0$. 于是存在一个集合 $\Omega_{N,\zeta} \subset \{u_0^N(x,\omega) \mid u_0^N(\cdot,\omega) \in H^s(T), \forall \omega \in \Omega\}$,使得 $\mu_N(\Omega_{N,\zeta}^c) < \zeta$ 和 $u_0^N \in \Omega_{N,\zeta}$,对每一个 $|t| \leq T$,(48)式柯西问题的解都满足 $\| u^N(\cdot, t,\omega) \|_{H^s} \leq C\left(\mathrm{In}\frac{T}{\zeta}\right)^{1/2}$.

证明 令 $S_N(t)$ 是(48)式的流映射. 利用 Liouville 定理,因为(48)式具有 Hamiltonian 结构,我们知道在 $S_N(t)$ 下对所有的 t 来说,μ_N 都是不变的. 通过用类似于引理 19 的证明和引理 20 的结果,有 $\| u^N(\cdot,t,\omega) \|_{H^s} \leq 2K$. 如果对于 $|t| \leq \delta \sim K^{-\frac{3}{1-3\epsilon}}$,有 $\| u_0^N(\cdot,\omega) \|_{H^s} \leq K$ 那么令 $\Omega_{N,\zeta} = \bigcap_{j=-\left[\frac{t}{\delta}\right]}^{j=\left[\frac{t}{\delta}\right]} S_N^j(\delta)\Omega_{N,B}(s,K)$,通过用 μ_N 的不变性,当 $K \sim \left(\mathrm{In}\frac{T}{\zeta}\right)^{1/2}$. 有

$$\mu_N(\Omega_{N,\zeta}^c) \leq \frac{T}{\delta}\mu_N((\Omega_{N,B}(s,K))^c) \sim TK^{\frac{3}{1-3\epsilon}}\,\mathrm{e}^{-cK^2} \leq T\,\mathrm{e}^{-\frac{C}{2}K^2} \leq \zeta. \tag{49}$$

如果 $u_0^N \in \Omega_{N,\zeta}$,有 $\| u^N(\cdot,j\delta,\omega) \|_{H^s} \leq K$.

对于 $j = 0,1,\cdots,\left[\frac{T}{\delta}\right]$. 最后,得到在$[0,T]$ 每一个区间$[j\delta,(j+1)\delta]$ 上,其中 $j = 0,1,\cdots,\left[\frac{T}{\delta}\right]-1$ 都是局部适定的和 $\| u^N(\cdot,t,\omega) \|_{H^s} \leq 2K \sim \left[\mathrm{In}\frac{T}{\zeta}\right]^{1/2}$,对 $|t| \leq T$. 都成立. 利用流映射是时间可逆的事实,得到当 $|t| \leq T$ 有 $\| u^N(\cdot,t,\omega) \|_{H^s} \leq C[\mathrm{In}(\frac{T}{\zeta})]^{1/2}$. 完成了引理 21 的证明.

引理 22 令 $-\frac{1}{2} \leq s < \frac{1}{2}, \int_T u_0(x,t,\omega)\mathrm{d}x = 0$ 和 $\varepsilon > 0$. 于是存在一个集合 $\Omega'_{N,\varepsilon} \subset \{u_0^N(x,\omega) \mid u_0^N(\cdot,\omega) \in H^s(T), \forall \omega \in \Omega\}$ 使得有 $\mu_N((\Omega'_{N,\varepsilon})^c) < \varepsilon$ 和 $u_0^N \in \Omega'_{N,\varepsilon}$,成立,且对于任意的 $t \in \mathbf{R}$,(48)式柯西问题的解都满足 $\| u^N(\cdot,t,\omega) \|_{H^s} \leq C\left[\mathrm{In}\frac{1+|t|}{\varepsilon}\right]^{1/2}$.

证明 对任意的 $t \in \mathbf{R}$. 选择 j 使得 $2^{j-1} < 1+|t| \leq 2^j$. 在引理 21 中,当 $T \triangleq T_j = 2^j$ 和 $\zeta \triangleq \varepsilon_j = \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$,$\Omega_{N,\zeta} = \Omega_{N,\varepsilon_j}^{(j)}$,时,令 $\Omega'_{N,\zeta} = \bigcap_{j-1}^{\infty}\Omega_{N,\varepsilon_j}^{(j)}$,因为 $u_0^N \in \Omega'_{N,\zeta}$,于是有 $\mu((\Omega'_{N,\zeta})^c) \leq \sum_{j-1}^{\infty}\mu_N((\Omega_{N,\varepsilon_j}^{(j)})^c) \leq \sum_{j-1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{j+1}} \leq \varepsilon$. 可以得到 $\| u^N(\cdot,\omega,t) \|_{H^s} \leq 2K \sim \left(\mathrm{In}\frac{2^{2j+1}}{\varepsilon}\right)^{1/2} = ((2j+1)\mathrm{In}2 - \mathrm{In}\varepsilon)^{1/2} \leq 4((j-1)\mathrm{In}2 - \mathrm{In}\varepsilon)^{1/2} = (\mathrm{In}\frac{2^{j-1}}{\varepsilon})^{1/2} \leq C\left[\mathrm{In}\frac{1+|t|}{\varepsilon}\right]^{1/2}$.

完成了引理 22 的证明. 为了得到定理 1,需要充分证明下面的引理.

引理 23 令 $-\frac{1}{2} \leq s < \frac{1}{2}, \int_T u_0(x,t,\omega)\mathrm{d}x = 0$ 和 $\varepsilon > 0$. 那么存在集合 $\Omega_\varepsilon \subset \{u_0(x,\omega) \mid u_0(\cdot,\omega) \in H^s(T), \forall \omega \in \Omega\}$ 使得 $\mu(\Omega_\varepsilon^c) < \varepsilon$ 和 $u_0 \in \Omega_\varepsilon$,成立对每一个 $t \in \mathbf{R}$,(1) ~ (4) 式或(1) ~ (5) 式柯西问题的解都满足 $\| u(\cdot,t,\omega) \|_{H^s} \leq C\left[\mathrm{In}\frac{1+|t|}{\varepsilon}\right]^{1/2}$

证明 固定 $\sigma > s, 0 < T < \infty, \varepsilon > 0$,大 $N = N(T,\varepsilon)$,其中 $N = N(T,\varepsilon)$ 是之后被确定的. 用一个直接计算,得到

$$\| u_0 - u_0^N \|_{H^s} \leq CN^{s-\sigma} \| u_0 \|_{H^\sigma}. \tag{50}$$

利用类似于引理 21 的证明方法,构造集合 $\Omega_{N,\varepsilon}$ 其中 $K \sim (\mathrm{In}\frac{T}{\varepsilon^2})^{1/2}$ 使得 $\rho_N(\Omega_{N,\varepsilon}^c) < Z^{-1/2}\varepsilon^2$. 现在令 $\widetilde{\Omega}_\varepsilon = \{a_n, a_n \in \Omega_B(\sigma,K), a_n \in \Omega_{N,\varepsilon}\}$. 定义 $\widetilde{\Omega}_\varepsilon^c = \{a_n \in \Omega_B, a_n \notin \widetilde{\Omega}_\varepsilon\}$. 然后就有 $\rho(\widetilde{\Omega}_\varepsilon^c) \leq Z^{-1/2}\varepsilon^2$. 因此,通过运用引理 1 和柯西 - 施瓦茨不等式,有 $\mu(\widetilde{\Omega}_\varepsilon^c) < \varepsilon$. 令 $u_0 \in \widetilde{\Omega}_\varepsilon^c$. 于是就有 $u_0^N \in \Omega_{N,\varepsilon}$. 利用类似于引理 20 的证明,有

$\| u(\cdot,j\delta,\omega)\|_{H^s}\le K$ 对于 $j=0,1,2\cdots,[\frac{T}{\delta}]$. 还可以得到 $\| u(\cdot,t,\omega)\|_{H^s}\le 2K$, $\| u^N(\cdot,t,\omega)\|_{H^s}\le 2K$ 对于 $|t|\le\delta$. 结合(2)式和(48)式,得出

$$u-u^N=S(t)(u_0-u_0^N)-\int_0^t S(t-\tau)F(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{51}$$

其中 $F=\frac{1}{2}\partial_x[u^2-P_N((u^N)^2)]$. 显然,$P_N((P_{N/2}u)^2)=(P_{N/2}u)^2$, 然后得到

$$F=\frac{1}{2}\partial_x(u^2-(P_{N/2}u)^2)+\frac{1}{2}P_N\partial_x((P_{N/2}u)^2-u^2)+\frac{1}{2}P_N\partial_x(u^2-(u^N)^2). \tag{52}$$

结合引理 18 和 $\| u-P_{N/2}u\|_{Y_s^\delta}\le CN^{s-\sigma}K$, $\| P_{N/2}u\|_{Y_s^\delta}\le K$, $\| u\|_{Y_s^\delta}\le K$, 得出了

$$\begin{aligned}\| u-u^N\|_{Y_s^\delta}&\le \| S(t)(u_0-u_0{}^N)\|_{Y_s^\delta}+\left\| \int_0^t S(t-\tau)F(\tau)\mathrm{d}\tau\right\|_{Y_s^\delta}\le C\| u_0-u_0{}^N\|_{H^s}+\\ &C\left\|\eta\left(\frac{t}{\delta}\right)F(\tau)\right\|_{\mathbf{Z}_s}\le CN^{s-\sigma}K+C\delta^{\frac{1}{3}-3\varepsilon}\| u-P_{N/2}u\|_{Y_s^\delta}[\| u\|_{Y_s^\delta}+\| P_{N/2}u\|_{Y_s^\delta}]+\\ &\delta^{\frac{1}{3}-3\varepsilon}\| u-u^N\|_{Y_s^\delta}[\| u\|_{Y_s^\delta}+\| u^N\|_{Y_s^\delta}]\le CN^{s-\sigma}K+\frac{1}{2}\| u-u^N\|_{Y_s^\delta},\end{aligned} \tag{53}$$

这样就得出了

$$\| (u-u^N)(\cdot,t)\|_{H^s}\le \| (u-u^N)(\cdot,t)\|_{Y_s^\delta}\le CN^{s-\sigma}. \tag{54}$$

当 N 足够大时,有$[\frac{T}{\delta}]KN^{s-\sigma}\ll 1$. 在区间$[j\delta,(j+1)\delta]$上重复$[\frac{T}{\delta}]$次,其中 $j=0,1,\cdots,[\frac{T}{\delta}]-1$,这样就产生了 $\| u(\cdot,j\delta)\|_{H^s}\le K+1$ 且 $j=0,1,\cdots,[\frac{T}{\delta}]$. 因此,从局部适定性理论和方程的时间可逆性中,总结出当 u 和 $u_0\in\tilde{\Omega}_\varepsilon$ 时,对所有的 $|t|\le T$,都存在在区间$[-T,T]$且式子 $\| u(\cdot,t)\|_{H^s}\le 2(K+1)\sim(\mathrm{In}\frac{T}{\varepsilon})^{1/2}$ 成立. 对每一个 $\varepsilon>0$,令 $\tilde{\Omega}_\varepsilon\triangleq\tilde{\Omega}(T,\varepsilon)$, $N=N(T,\varepsilon)$, $T_j=2^j$, $\varepsilon_j=\frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$ 对于 $j\in N$. 现在构造 $\tilde{\Omega}_\varepsilon^{(j)}=\tilde{\Omega}(T_j,\varepsilon_j)$ 和 $N_j=N(T_j,\varepsilon_j)$. 于是就得到了 $\mu((\tilde{\Omega}_\varepsilon^{(j)})^c)<\varepsilon_j$. 由于 $K_j\sim\left(\mathrm{In}\frac{T_j}{\varepsilon_j^2}\right)^{1/2}=\left(\mathrm{In}\frac{2^{3j+2}}{\varepsilon^2}\right)^{1/2}\sim\left(\mathrm{In}\frac{T_j}{\varepsilon}\right)$. 最后,选择充分大的 N_j 使得$[\frac{T}{\delta}]K_jN_j^{s-\sigma}\ll 1$. 最终,对于 $u_0\in\tilde{\Omega}_\varepsilon^{(j)}$, 就得到了

$$\| u(\cdot,\omega,t)\|_{H^s}\le C\left(\mathrm{In}\frac{T_j2^{j+1}}{\varepsilon}\right)^{1/2}=\left(\mathrm{In}\frac{2^{2j+1}}{\varepsilon}\right)^{1/2}\sim\left(\mathrm{In}\frac{2^j}{\varepsilon}\right)^{1/2}=\left(\mathrm{In}\frac{T_j}{\varepsilon}\right)^{1/2}.$$

且 $|t|\le T_j$. 令 $\Omega_\varepsilon=\bigcap_{j=1}^\infty\tilde{\Omega}_\varepsilon^{(j)}$. 然后就有 $\mu((\Omega_\varepsilon)^c)\le\sum_{j=1}^\infty\frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\le\varepsilon$. 这样就完成了引理 23 的证明.

6　证明定理 2

现在证明定理 2. 在证明定理 2 之前先给出引理 24.

引理 24　令 $-\frac{1}{2}\le s<\frac{1}{2}$, $\int_T u_0(x,\omega)\mathrm{d}x=0$,于是有当 N 一致趋于无穷时,对于 $u_0\in\Omega_\varepsilon$ 和 $T<\infty$ 就有 $\| (u-u^N)(\cdot,t,\omega)\|_{C([-T,T];H^s)}\to 0$

证明　引理 24 可以从(54)式得到. 因此,受文献[44,56]的启发,只需证明以下引理.

引理 25　令 $\frac{1}{6}<s<\frac{1}{2}$ 和 $\int_T u_0(x,\omega)\mathrm{d}x=0$. Gibbs 测度 μ 在(1)～(4)或(1)～(5)流映射下是不变的,在一定意义下是指对每一个连续有界函数 f 都有 $\int f(S(t)\phi)\mathrm{d}\mu=\int f(\phi)\mathrm{d}\mu$ 成立.

证明　令 $S(t)$ 和 $S_N(t)$ 分别是(1)和(48)式的流映射. 定义

$$\int f(S(t)\phi)\mathrm{d}\mu=\lim_{N\to\infty}\int f(S_N(t)P_N\phi)\mathrm{d}\mu_N, \tag{55}$$

$$H_N \triangleq \int f(S_N(t)P_N\phi)(\mathrm{d}\mu - \mathrm{d}\mu_N) = \int \{Z^{-1}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int(\phi)^3}\chi_{\Omega_B} - Z_N^{-1}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int(P_N\phi)^3}\chi_{\Omega_{N,B}}\}\mathrm{d}\rho \tag{56}$$

和

$$\widetilde{H}_N(A) \triangleq \int_A [f(S(t)\phi) - f(S_N(t)P_N\phi)]\mathrm{d}\mu. \tag{57}$$

当 $s > \frac{1}{6}$ 时,可知当 N 趋于无穷时,有

$$\| P_N\phi - \phi \|_{L^3} \leq C \| P_N\phi - \phi \|_{H^{1/6}} \leq CN^{s-\frac{1}{6}} \| \phi \|_{H^s} \to 0. \tag{58}$$

运用 $H^{1/6} \circlearrowleft L^3$ 上的索伯列夫嵌入不等式以及(58)式,因为 $s > \frac{1}{6}$,当 N 趋于无穷时,有

$$\begin{aligned}|\int[(P_N\phi)^3 - \phi^3]\mathrm{d}x| &\leq C[\| P_N\phi \|_{L^3} + \| \phi \|_{L^3}]^2 \| P_N\phi - \phi \|_{L^3} \leq \\ &CN^{s-\frac{1}{6}}[\| P_N\phi \|_{H^{1/6}} + \| \phi \|_{H^{1/6}}]^2 \| P_N\phi - \phi \|_{H^s} \to 0.\end{aligned} \tag{59}$$

而且,从引理 1 中,得出对于任意的 N 都有

$$\exp\{\frac{1}{2}\int(P_N\phi)^3\mathrm{d}x\}\chi_{\Omega_{N,B}} \leq \exp\{C\int \| \phi \|^3_{H^{1/6}}\mathrm{d}x\}\chi_{\Omega_B} \in L^1(\mathrm{d}\rho) \tag{60}$$

成立.

通过用控制收敛定理,得到 $\lim\limits_{N\to\infty} Z_N = Z$. 因为 f 是有界的,利用控制收敛定理,得出当 N 趋于无穷时,

$$H_N \to 0. \tag{61}$$

于是得出当 N 趋于无穷时,有

$$\| S(t)\phi - S_N(t)P_N\phi \|_{H^s} \to 0. \tag{62}$$

依据(62)式和 f 是连续的事实,知道对于任意的 $N \geq N_1$,存在 N_1 ,使得

$$\widetilde{H}_N(\Omega_\varepsilon) \leq \sup_{\phi\in\Omega_\varepsilon} | f(S(t)\phi) - f(S_N(t)P_N\phi) | < \varepsilon. \tag{63}$$

显然,$\widetilde{H}_N(\Omega_\varepsilon^c) \leq 2 \| f \|_{L^\infty}\mu(\Omega_\varepsilon^c) < C\varepsilon$.

从(61)式中,对于任意的 $N \geq N_2$,有 $| H_N | < \varepsilon$. 当 $N > \max\{N_1, N_2\}$ 时,可得

$$|\int f(S(t)\phi)\mathrm{d}\mu - \int f(S_N(t)P_N\phi)\mathrm{d}\mu_N | \leq \widetilde{H}_N(\Omega_\varepsilon) + \widetilde{H}_N(\Omega_\varepsilon^c) + | H_N | \leq C\varepsilon.$$

因此,(55)式的定义是正确的. 结合(55)式和 μ_N 的不变性,有

$$\int f(S(t)\phi)\mathrm{d}\mu = \lim_{N\to\infty}\int f(S_N(t)P_N\phi)\mathrm{d}\mu_N = \lim_{N\to\infty}\int f(P_N\phi)\mathrm{d}\mu_N = \int f(\phi)\mathrm{d}\mu.$$

完成了定理 2 的证明.

参 考 文 献

[1] Benilov E S. On the surface waves in a shallow channel with an uneven bottom[J]. Stud Appl Math, 1992, 87:1-14.

[2] Galkin V N, Stepanyants Y A. On the existence of stationary solitary waves in a rotating fluid[J]. J Appl Math Mech, 1991, 55:939-943.

[3] Gilman O A, Grimshaw R, Stepanyants Y A. Approximate and numerical solutions of the stationary Ostrovsky equation[J]. Stud Appl Math, 1995, 95:115-126.

[4] Ostrovskii L A. Nonlinear internal waves in a rotating ocean[J]. Okeanologiya, 1978, 18:181-191.

[5] Bourgain J. Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations, part I: Schrödinger equations[J]. Geom Funct Anal, 1993, 3 :107-156.

[6] Bourgain J. Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations[J]. Geom Funct Anal, 1993, 3:209-262.

[7] Bourgain J. Periodic Korteweg de Vries equation with measures as initial data[J]. Sel Math, 1997, 3:115-159.

[8] Kenig C E, Ponce G, Vega L. A bilinear estimate with applications to the KdV equation[J]. J Amer Math Soc, 1996, 9:573-603.

[9] Kenig C E, Ponce G, Vega L. On the ill-posedness of some canonical dispersive equations[J]. Duke Math J, 2001, 106:617-633.

[10] Colliander J, Keel M, Staffilani G, et al. Sharp global well-posedness for KdV and modified KdV on $\mathscr{R}$ and T[J]. J Amer Math Soc, 2003, 16:705-749.

[11] Guo Z H. Global well-posedness of the Korteweg-de Vries equation in $H^{-3/4}$[J]. J Math Pures Appl, 2009, 91:583-597.

[12] Kishimoto N. Well-posedness of the Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation at the critical regularity[J]. Diff Int Eqns, 2009,22:447-464.

[13] Tao T. Multilinear weighted convolution of L^2 functions and applications to non-linear dispersive equations[J]. Amer J Math,2001,123:839-908.

[14] Molinet L. Sharp ill-posedness results for the KdV and mKdV equations on the torus[J]. Adv Math, 2012,230:1895-1930.

[15] Liu B P. A priori bounds for KdV equation below $H^{-3/4}$ [J]. J Funct Anal,2015,268:501-554.

[16] Levandosky S,Liu Y. Stability and weak rotation limit of solitary waves of the Ostrovsky equation[J]. Discrete Contin Dynam Systems-Seris B,2007,7:793-806.

[17] Liu Y,Varlamov V. Stability of solitary waves and weak rotation limit for the Ostrovsky equation[J]. J Diff Eqns,2004,203:159-183.

[18] Zhang P Z,Liu Y. Symmetry and uniqueness of the solitary-wave solution for the Ostrovsky equation[J]. Arch Ration Mech Anal,2010,196:811-837.

[19] Tsugawa K. Well-posedness and weak rotation limit for the Ostrovsky equation[J]. J Diff Eqns,2009,247:3163-3180.

[20] Gui G L,Liu Y. On the Cauchy problem for the Ostrovsky equation with positive dispersion[J]. Comm Partial Diff Eqns,2007,32:1895-1916.

[21] Guo B L,Huo Z H. The global attractor of the damped forced Ostrovsky equation[J]. J Math Anal Appl,2007,329:392-407.

[22] Huo Z H,Jia Y L. Low regularity solution for a nonlocal perturbation of KdV equation[J]. Zeitschrift *fü* rangewandte Mathematik und Physik,2008,59:634-646.

[23] Huo Z H,Jia Y L. Low-regularity solutions for the Ostrovsky equation[J]. Proc Edinb Math Soc,2006,49:87-100.

[24] Isaza P. Unique continuation principle for the Ostrovsky equation with negative dispersion[J]. J Dif Eqns,2013,225:796-811.

[25] Isaza P,Mejía J. Cauchy problem for the Ostrovsky equation in spaces of low regularity[J]. J Diff Eqns,2006,230:661-681.

[26] Isaza P,Mejía J. Global Cauchy problem for the Ostrovsky equation[J]. Nonlinear Anal TMA,2007,67:1482-1503.

[27] Isaza P,Mejía J. Local well-posedness and quantitative ill-posedness for the Ostrovsky equation[J]. Nonlinear Anal TMA,2009,70:2306-2316.

[28] Isaza P,Mejía J. On the support of solutions to the Ostrovsky equation with negative dispersion[J]. J Diff Eqns,2009,247:1851-1865.

[29] Isaza P,Mejía J. On the support of solutions to the Ostrovsky equation with positive dispersion[J]. Nonlinear Anal TMA,2010,72:4016-4029.

[30] Linares F,Milanés A. Local and global well-posedness for the Ostrovsky equation[J]. J Diff Eqns,2006,222:325-340.

[31] Varlamov V,Liu Y. Cauchy problem for the Ostrovsky equation[J]. Discrete Cont Dyn Sys A,2004,10:731-753.

[32] Zaiter I. Remarks on the Ostrovsky equation[J]. Diff Int Eqns,2007,20:815-840.

[33] Li Y S,Huang J H,Yan W. The Cauchy problem for the Ostrovsky equation with negative dispersion at the critical regularity[J]. J Diff Eqns,2015,259 :1379-1408.

[34] Yan W,Li Y S,Huang J H. The Cauchy problem for the Ostrovsky equation with positive dispersion in $H^{-3/4}(\mathbf{R})$ [J]. Math,2015,259(4):1379-1408.

[35] Lebowitz J,Rose H,Speer E. Statistical mechanics of the nonlinear Schrödinger equation[J]. J Stat Phys,1988,50:657-687.

[36] Bourgain J. Periodic Schrödinger equation and invariant measures[J]. Comm Math Phys,1994,166:1-26.

[37] Bourgain J. On the Cauchy and invariant measure problem for the periodic Zakharov system[J]. Duke Math J,1994,76:175-202.

[38] Bourgain J. Invariant measures for the 2 D-defocusing nonlinear Schrödinger equation[J]. Comm Math Phys,1996,176:421-445.

[39] Bourgain J,Bulut A. Almost sure global well-posedness for the radial nonlinear Schrödinger equation on the unit ball II:the 3d case[J]. J Eur Math Soc,2014,16:1289-1325.

[40] Bourgain J,Bulut A. Invariant Gibbs measure evolution for the radial nonlinear wave equation on the 3d ball[J]. J Funct Anal, 2014,266:2319-2340.

[41] Burq N,Tzvetkov N. Invariant measure for a three dimensional nonlinear wave equation[J]. Int Math Res Not, 2007,5(1):227-239.

[42] Burq N,Tzvetkov N. Random data Cauchy theory for supercritical wave equations,I. Local theory[J] . Invent Math, 2008,173:449-475.

[43] Burq N,Tzvetkov N. Random data Cauchy theory for supercritical wave equations II. A global existence result[J]. Invent Math,2008,173:477-496.

[44] Belleta L R,Thomasb L E. Low regularity solutions to a gently stochastic nonlinear wave equation in nonequilibrium statistical mechanics[J]. Stoc Proc Appl,2005,115:1041-1059.

[45] Burq N,Tzvetkov N. Probabilistic well-posedness for the cubic wave equation[J]. J Eur Math Soc,2014,16:1-30.

[46] Colliander J,Oh T. Almost sure well-posedness of the cubic nonlinear Schrödinger equation below $L^2(T)$ [J]. Duke Math J,2012,16:367-414.

[47] Deng Y. Invariance of the Gibbs measure for the Benjamin-Ono equation[J]. J Eur Math Soc,2015,17:1107-1198.

[48] Federico C, de Suzzoni A S. Invariant measure for the Schrödinger equation on the real line[J]. J Funct Anal, 2015, 269: 271-324.

[49] Suzzoni A S, Tzvetkov N. On the propagation of weakly nonlinear random dispersive waves[J]. Arch Ration Mech Anal, 2014, 212: 849-874.

[50] Oh T. Invariance of the white noise for KdV[J]. Comm Math Phys, 2009, 292: 217-236.

[51] Nahmod A, Oh T, Rey-Bellet L, et al. Invariant weighted Wiener measures and almost sure global well-posedness for the periodic derivative NLS[J]. J Eur Math Soc, 2012, 12: 1275-1330.

[52] Oh T. Invariance of the Gibbs measure for the Schrödinger-Benjamin-Ono system[J]. SIAM J Math Anal, 2009, 41: 2207-2225.

[53] Deng C, Cui S B. Random-data Cauchy problem for the Navier-Stokes equations on T^3 [J]. J Diff Eqns, 2011, 251: 902-917.

[54] Zhang T, Fang D Y. Random data Cauchy theory for the generalized incompressible Navier-Stokes equations[J]. J Math Fluid Mech, 2012, 14: 311-324.

[55] Oh T, Quastel J. On invariant Gibbs measures conditioned on mass and momentum[J]. J Math Soc Japan, 2013, 65: 13-35.

[56] Oh T. Invariant Gibbs measures and a. s. global well posedness for coupled KdV systems[J]. Diff Int Eqns, 2009, 22: 637-668.

[57] Thomann L, Tzvetkov N. Gibbs measure for the periodic derivative nonlinear Schrödinger equation[J]. Nonlinearity, 2010, 23: 2771-2791.

[58] Tzvetkov N. Invariant measures for the nonlinear Schrödinger equation on the disc[J]. Dyn Partial Differ Equ, 2006, 3: 111-160.

[59] Tzvetkov N, Visciglia N. Invariant measures and long-time behavior for the Benjamin-Ono equation[J]. Int Math Res Not, 2014, 17: 4679-4714.

[60] Tzvetkov N, Visciglia N. Gaussian measures associated to the higher order conservation laws of the Benjamin-Ono equation[J]. Ann Sci Éc Norm Supér, 2013, 46: 249-299.

[61] Tzvetkov N, Burq N, Thomann L, et al. Remarks on the Gibbs measures for nonlinear dispersive equations[EB/OL]. [2017-03-10]. http://arxiv. org/abs/II12. 7499v/.

[62] Chen Y, Gao H J. The Cauchy problem for the Hartree equations under random influences[J]. J Diff Eqns, 2015, 259: 5192-5219.

[63] Thomann L. Random data Cauchy problem for supercritical Schrödinger equations[J]. Ann Inst H Poincaré Anal Nonliné aire, 2009, 26: 2385-2402.

[64] Saut J C, Tzvetov N. On the periodic KP-I type equations[J]. Comm Math Phys, 2001, 221: 451-476.

Invariant Gibbs Measures and Almost Surely Global well-posedness for the Periodic Ostrovsky Equation

Yan Wei, Wang Zongmin

(College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

Abstract: We consider the Cauchy problem of the Ostrovsky model for nonlinear waves $u_t-\beta\partial_x^3 u-\gamma\partial_x^{-1}u+\frac{1}{2}\partial_x(u^2)=0$ with periodic boundary condition, and random initial data of low regularity. We first prove that this Cauchy problem is locally well-posed in $H^s(T)$ with $s\geq-\frac{1}{2}$, and globally well-posed almost surely with a large set of random data in $\bigcap_{-\frac{1}{2}\leq s<\frac{1}{2}}H^s(T)$. Then, we show that the Gibbs measure is invariant under the flow, for random data in $\bigcap_{\frac{1}{6}<s<\frac{1}{2}}H^s(T)$. The key ingredients are a Strichartz type estimate established in this paper and certain large deviation estimates.

Keywords: Ostrovsky equation for nonlinear waves; almost surely global well-posedness; Gibbs measures

[责任编辑 陈留院]