文章编号:1000-2367(2016)05-0001-07 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2016.05.001

求解 $P_*(\kappa)$-水平线性互补问题的核函数内点算法

杨喜美[a]，张因奎[b]，裴永刚[a]

(河南师范大学 a.数学与信息科学学院;b.人事处，河南 新乡 453007)

摘　要:提出了一个新的核函数，使用该核函数设计了一个求解 $P_*(\kappa)$-水平线性互补问题($P_*(\kappa)$-HLCP)的多项式内点算法. 为了给出算法的复杂度，首先分析了该核函数的性质；最后，给出了大步更新算法和小步更新算法的迭代复杂度，这些复杂度与目前内点算法最好的复杂度一致.

关键词:核函数;$P_*(\kappa)$-水平线性互补问题;内点算法;多项式复杂度

中图分类号:O221.1 **文献标志码**:A

$P_*(\kappa)$-HLCP 是一类重要的数学规划问题. 它在经济均衡问题、非合作性决策问题、交通分流问题、最优化问题等方面有着广泛的应用. 其标准形式为：

$$Mx + Ns = q \Rightarrow (1 + 4\kappa)\sum_{i\in J_+} x_i s_i \geq -\sum_{i\in J_-} x_i s_i,\ \forall (x,s) \in R^{2n}, \tag{1}$$

其中 $\kappa \geq 0$ 是一个实数，$I = \{1,2,\cdots,n\}$,$J_+ = \{i \in I : x_i s_i \geq 0\}$,$J_- = \{i \in I : x_i s_i < 0\}$,表示指标集.求解 $P_*(\kappa)$-HLCP 有多种方法，其中最重要的一类是内点算法.

内点算法是 Karmarkar[1] 于 1984 年为求解线性规划问题而提出，它不但具有多项式复杂度,而且计算效果也十分显著. 原-对偶内点算法作为最有效的内点算法之一，一直备受关注[2]. 然而，这类算法在理论和实践之间存在着一个矛盾:有着较好计算效果的大步长算法在理论上却不能与计算效果较差的小步长算法相媲美[3]. 为解决这个问题，优化专家进行了各种研究，其中文献[4-5]通过自正则函数降低了大步长算法的理论复杂度，得到了目前大步长算法的最好复杂度. 受其思想启发，文献[6-10]提出了带有核函数的内点算法. 该算法的特点是用障碍函数的负梯度方向代替经典的 Newton 方向. 它使大步长算法的复杂度降低了一个因子 $\lg n$. 因此，本文提出一类新的核函数：

$$\psi(t) = m\frac{t^{p+1}-1}{p+1} + t^{-m} - 1, \tag{2}$$

其中 $p \in [0,1]$ 和 $m \geq 1$.

另外，给出一些符号说明. R^n，R^n_+，R^n_{++} 分别表示 n 维向量，非负向量和正向量组成的集合. $x_{\max}$ 和 $x_{\min}$ 表示向量 x 的最大和最小分量. 如果 $g(x) \geq 0$ 是以 R^n_+ 为自变量的函数，则 $g(x) = O(x)$ 表示 $g(x) \leq cx$，$g(x) = \Theta(x)$ 表示 $c_1 x \geq g(x) \geq c_2 x$，其中 c,c_1,c_2 表示常数.

1　预备知识及算法框架

内点算法的基本思想是将(1)式转化为下列方程：

$$Mx + Ns = q,\ xs = \mu e,\ (x,s) \geq 0, \tag{3}$$

其中 $\mu = \frac{x^{\mathrm{T}} s}{n} \geq 0$. 另外,需要假设 $P_*(\kappa)$-HLCP 满足内点条件，即:存在一个点对$(x_0,s_0) > 0$ 满足 $Mx_0 +$

收稿日期:2015-08-22;**修回日期**:2016-06-24.

基金项目:国家自然科学基金(61179040;11501180);河南师范大学博士启动基金(qd14150);河南师范大学青年基金(2014QK03);国家博士后基金(2016M590346).

第 1 作者简介(通信作者):杨喜美(1982-),女,河南周口人,河南师范大学讲师,博士,研究方向为最优化理论与算法,E-mail:yangximeiluoyang@126.com.

$Ns_0 = q$. 对方程(3) 应用 Newton 方法获得下列方程

$$Mx + Ns = 0, sx + xs = \mu e - xs. \tag{4}$$

如果定义向量 $\nu = \sqrt{\frac{xs}{\mu}}$，则可得尺度化迭代方向 d_x 和 d_s 为：

$$d_x = \frac{\nu\Delta x}{x},\ d_s = \frac{\nu\Delta s}{s}. \tag{5}$$

设$\overline{M} = MXV^{-1}$, $\overline{N} = NSV^{-1}$,其中 $V = \mathrm{diag}(\nu)$, $X = \mathrm{diag}(x)$, $S = \mathrm{diag}(s)$，则将(5) 式代入(4) 式可得：

$$\overline{M}d_x + \overline{N}d_s = 0, d_x + d_s = -\nabla\Psi_l(\nu), \tag{6}$$

其中 $\Psi_l(\nu) = \sum_{i=1}^{n}\psi_l(\nu_i)$ 及 $\psi_l(t) = \frac{(t^2-1)}{2} - \lg t$ 是对数障碍函数.

本文将用(2) 式代替 $\psi_l(t)$，并定义 $\Psi(\nu) = \sum_{i=1}^{n}\psi(\nu_i)$，可得：

$$\overline{M}d_x + \overline{N}d_s = 0, d_x + d_s = m(\nu^{-m-1} - \nu^p) = -\nabla\Psi(\nu). \tag{7}$$

为分析算法的复杂度,本文将使用下列模基本近似

$$\delta(\nu) = \frac{1}{2}\|\nabla\Psi(\nu)\|. \tag{8}$$

显然，$\Psi(\nu)$ 是严格凸的且在 $\nu = e$ 处取得唯一极小值 0，故有

$$\Psi(e) = 0 \Rightarrow \delta(\nu) = 0 \Rightarrow \nu = e.$$

基于上面的分析，下面给出算法的一般框架.

输入:阈值参数 $\tau > 1$，结束精度 $\grave{o} > 0$，固定的障碍更新参数 $0 < \theta < 1$，严格可行点(x_0, s_0) 以及 $\mu_0 = 1$ 满足:$\Psi(v_0) \leq \tau$;

开始:$x := x_0$; $s := s_0$; $\mu := \mu_0$; 如果 $\mu n \geq \grave{o}$，则执行

开始:$\mu := (1-\theta)\mu$; 如果 $\Psi(\nu) > \tau$，则执行

开始:求解方程组(7)，获得迭代方向 Δx 和 Δs;由下列式子决定步长的大小:

$x := x + \alpha\Delta x, s := s + \alpha\Delta s, \nu := \sqrt{xs/\mu}$;结束 结束 结束

2 新的核函数的性质

首先，给出 $\psi(t)$ 的一阶、二阶、三阶导数：

(i) $\psi'(t) = mt^p - mt^{-m-1}$; (9)

(ii) $\psi''(t) = mpt^{p-1} + m(m+1)t^{-m-2}$; (10)

(iii) $\psi'''(t) = mp(p-1)t^{p-2} - m(m+1)(m+2)t^{-m-3}$, (11)

使用(9)、(10) 式，易证明 $\psi(t)$ 满足一般核函数的定义，详见文献[8].

下面,给出新核函数 $\psi(t)$ 的一些重要性质.

引理 1 若 $t \geq 1$,则 $\psi(t)$ 具有下列性质：

(i) $\psi(\sqrt{t_1 t_2}) \leq \frac{1}{2}(\psi(t_1) + \psi(t_2))$;(ii) $t\psi''(t) - \psi'(t) > 0$.

证明 对于(i)，由文献[4] 中的引理 2.1.2 可知:如果对于任意 $t > 0$, $t\psi''(t) + \psi'(t) > 0$ 成立，则(i) 一定成立. 由(9) 和(10)，易得 $t\psi''(t) + \psi'(t) = m(p+1)t^p + m^2t^{-m-1} > 0, \forall t > 0$.

对于(ii)，使用(9) 和(10) 式，可得 $t\psi''(t) - \psi'(t) = m(m+2)t^{-m-1} > 0$.

引理 2 若 $t \geq 1$,则 $\psi(t)$ 具有性质：

(i) $\psi(t) \leq m\frac{t^{p+1}}{p+1}$; (ii) $\frac{mp}{2}(t-1)^2 \leq \psi(t) \leq \frac{m(p+m+1)}{2}(t-1)^2$.

证明 由 $\psi(t)$ 在(2) 式中的定义可直接知(i) 成立. 下面，仅重点证明(ii) 成立. 若定义 $f(t) = \psi(t) - \frac{mp}{2}(t-1)^2$，则有

$$f'(t)=\psi'(t)-mp(t-1),\ f''(t)=\psi''(t)-mp=mp(t^{p-1}-1)+m(m+1)t^{-m-2},$$

并且也有 $f(1)=0$ 和 $f'(1)=0$. 因为 $\psi'''(t)<0$，故可知若 $t\geq 1$，$f'(t)\geq 0$，$f(t)\geq 0$ 则 $f''(t)>0$，这蕴含着(ii) 的第一个不等式成立. 由 Taylor 定理，可得：

$$\psi(t)=\psi(1)+\psi'(1)(t-1)+\frac{1}{2!}\psi''(1)(t-1)^2+\frac{1}{3!}\psi'''(1)(t-1)^3+O(t^3).$$

使用 $\psi(1)=\psi''(1)=0,\psi''(t)<0$,可得 $\psi(t)\leq\frac{1}{2}\psi''(1)(t-1)^2=\frac{m(p+m+1)}{2}(t-1)^2$,这表明(ii)的第二个不等式成立.

由参考文献[8] 中的引理 2.2,可得下列引理.

引理 3　若 $\psi(t)$ 满足引理 1 的(ii) 并且 $\psi''(t)$ 是单调递增的,则 $\psi(t)$ 满足

$$\psi''(t)\psi'(\beta t)-\beta\psi'(t)\psi''(\beta t)>0.$$

定理 1　若 $\tilde{n}:[0,\infty]\to[1,\infty)$ 是核函数 $\psi(t)$ 在 $t\in[1,\infty)$ 上的逆函数，则

$$\left(\frac{p+1}{m}y+1\right)^{1/(p+1)}\leq\tilde{n}(y)\leq 1+\sqrt{\frac{2}{mp}y}. \tag{12}$$

证明　对于 $m>0$，$t\geq 1$，可得

$$y=\psi(t)=m\frac{t^{p+1}-1}{p+1}+t^{-m}-1\leq m\frac{t^{p+1}-1}{p+1}, \tag{13}$$

所以，直接解(13) 式可得(12) 式的第一个不等式.

由引理 2 的(ii)，可得 $y:=\psi(t)\geq\frac{1}{2}mp(t-1)^2$，这等价于 $t^2-2t+1-2y/(mp)\leq 0$，解上述不等式可得:$t=\tilde{n}(y)\leq 1+\sqrt{\frac{2y}{(mp)}}$.

使用引理 3 及文献[8] 的证明技巧，有下列引理.

引理 4　若 $\nu\in R_{++}^n$，$\beta\geq 1$，则 $\Psi(\beta\nu)\leq n\psi\left(\beta\tilde{n}\left(\frac{\Psi(\nu)}{n}\right)\right)$.

定理 2　设 $0<\theta<1$ 和 $\nu_+=\nu/\sqrt{1-\theta}$. 若 $\Psi(\nu)<\tau$，$p\in[0,1]$，$m\geq 1$，则

$$\Psi(\nu_+)\leq\frac{m(p+m+1)}{2(1-\theta)}\left(\theta\sqrt{n}+\sqrt{\frac{2\tau}{mp}}\right)^2:=\Psi_0. \tag{14}$$

证明　由引理 4 及 $1/\sqrt{1-\theta}\geq 1$，可得

$$\Psi(\nu_+)\leq n\psi\left(\frac{1}{\sqrt{1-\theta}}\left(\frac{\Psi(\nu)}{n}\right)\right)\leq\frac{mn(p+m+1)}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\theta}}\left(\frac{\Psi(\nu)}{n}\right)-1\right)^2\leq$$

$$\frac{mn(p+m+1)}{2}\left[\frac{1+\sqrt{\frac{2\tau}{mnp}}-\sqrt{1-\theta}}{\sqrt{1-\theta}}\right]^2\leq\frac{m(p+m+1)}{2(1-\theta)}\left(\theta\sqrt{n}+\sqrt{\frac{2\tau}{mp}}\right)^2,$$

其中第 2 个不等式使用了引理 2 的(ii),第 3 个不等式使用了定理 1 及 $\Psi(\nu)<\tau$,最后一个不等式使用了 $1-\sqrt{1-\theta}\leq\theta$.

注 1　若 Ψ_0 表示 $\Psi(\nu)$ 在迭代过程中的上界，则大步算法时 $\theta=\Theta(1)$ 和 $\tau=O(n)$,故有 $\Psi_0=O(n)$. 小步算法时 $\theta=\Theta\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$和 $\tau=O(1)$，故有 $\Psi_0=O(1)$.

下面给出 $\delta(\nu)$ 关于 $\Psi(\nu)$ 的一个上界.

引理 5　使用 $\delta(\nu)$ 和 $\Psi(\nu)$ 的定义,有:$\delta(\nu)\geq\frac{1}{2}\psi'(\tilde{n}(\Psi(\nu)))$.

定理 3　若 $\delta(\nu)$ 定义为(8) 式，$\Psi(\nu)\geq\tau\geq 1$，则对于 $p\in[0,1]$ 及 $m\geq 1$，可得：

$$\delta\geq\frac{1}{6}(\Psi(\nu))^{\frac{p}{p+1}}.$$

证明　使用文献[8] 中的定理 4.1,定理 1 以及 $\Psi(\nu)\geq\tau\geq 1$，可得：

$$\delta(\nu) \geq \frac{1}{2}\psi'((\Psi(\nu))) = \frac{1}{2}m((\Psi(\nu))^{p} - (\Psi(\nu))^{-m-1}) \geq \frac{1}{2}m((\Psi(\nu))^{p} - (\Psi(\nu))^{-1}) \geq$$

$$\frac{1}{2}m\frac{\left(1+\frac{p+1}{m}\Psi(\nu)\right)^{\frac{p+1}{p+1}}-1}{\left(1+\frac{p+1}{m}\Psi(\nu)\right)^{\frac{1}{p+1}}} \geq \frac{1}{2}\frac{\Psi(\nu)}{(3\Psi(\nu))^{\frac{1}{p+1}}} \geq \frac{1}{6}(\Psi(\nu))^{\frac{p}{p+1}}.$$

证毕.

3 算法复杂度分析

为获得算法复杂度,需考虑两个方面:(i) 使近似函数下降的步长;(ii) 近似函数每一步的下降量. 经过一个障碍步以后,可得 $x_+ = x + \alpha\Delta x = \frac{x}{\nu}(\nu + \alpha d_x)$,$s_+ = s + \alpha\Delta s = \frac{s}{\nu}(\nu + \alpha d_s)$.

进一步可得:$\nu_+ = x_+ s_+ /\mu = (\nu + \alpha d_x)(\nu + \alpha d_s)$. 定义 $f(\alpha) := \Psi(\nu_+) - \Psi(\nu)$,可得:

$$f(\alpha) \leq f_1(\alpha) = \frac{1}{2}(\Psi(\nu + \alpha d_x) + \Psi(\nu + \alpha d_s)) - \Psi(\nu).$$

这蕴含着 $f_1(\alpha)$ 给出了单调递增函数 $\Psi(\nu)$ 的一个上界. 显然,$f(0) = f_1(0) = 0$. 对 $f_1(\alpha)$ 两边关于 α 求导数,可得

$$f_1'(\alpha) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\psi'(\nu_i + \alpha[d_x]_i)[d_x]_i + \psi'(\nu_i + \alpha[d_s]_i)[d_s]_i),$$

其中$[d_x]_i$,$[d_s]_i$ 分别表示向量 d_x,d_s 的第 i 个分量. 使用(7)、(8) 式可得:

$$f_1'(0) = \frac{1}{2}\nabla\Psi(\nu)^{\mathrm{T}}(d_x + d_s) = -\frac{1}{2}\nabla\Psi(\nu)^{\mathrm{T}}\nabla\Psi(\nu) = -2\delta^2(\nu). \tag{15}$$

对 $f_1'(\alpha)$ 两边关于 α 求微分,可得

$$f_1''(\alpha) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\psi''(\nu_i + \alpha[d_x]_i)[d_x]_i^2 + \psi''(\nu_i + \alpha[d_s]_i)[d_s]_i^2). \tag{16}$$

由(1)、(4) 式的第一个方程,可得:

$$(1+4\kappa)\sum_{i\in J_+}\Delta x_i\Delta s_i \geq -\sum_{i\in J_-}\Delta x_i\Delta s_i. \tag{17}$$

使用(5) 式,可得 $d_x d_s = \frac{\nu^2\Delta x\Delta s}{xs} = \frac{\Delta x\Delta s}{\mu}$. 因此,能够将(17) 式改写为:

$$(1+4\kappa)\sum_{i\in J_+}[d_x]_i[d_s]_i \geq -\sum_{i\in J_-}[d_x]_i[d_s]_i.$$

为了便于表述,定义:$\delta = \delta(\nu)$,$\delta_+ = \sum_{i\in J_+}[d_x]_i[d_s]_i$,$\delta_- = -\sum_{i\in J_-}[d_x]_i[d_s]_i$,则由文献[11] 式的引理 4. 1,引理 4. 2 可得:

$$\delta_+ \leq \delta^2, \delta_- \leq (1+4\kappa)\delta^2, \tag{18}$$

$$\| d_x \| \leq 2\sqrt{1+2\kappa}\,\delta, \quad \| d_s \| \leq 2\sqrt{1+2\kappa}\,\delta. \tag{19}$$

为了给出步长 α 及 $f(\alpha)$ 的上界,首先需要给出下列引理.

引理 6 若 $f''_1(\alpha)$ 定义为(16) 式,则 $f''_1(\alpha) \leq 2(1+2\kappa)\delta^2\psi''(\nu_{\min} - 2\alpha\sqrt{1+2\kappa}\,\delta)$.

证明 由(19) 式,可得:$\nu_i + \alpha[d_x]_i \geq \nu_{\min} - 2\sqrt{1+2\kappa}\,\delta\alpha$,$\nu_i + \alpha[d_s]_i \geq \nu_{\min} - 2\sqrt{1+2\kappa}\,\delta\alpha$.
由于 $\psi''(t)$ 在区间 $t \in (0, +\infty)$ 上是单调递减的,可得:

$$f''_1(\alpha) \leq \frac{1}{2}\psi''(\nu_{\min} - 2\sqrt{1+2\kappa}\,\delta\alpha)\sum_{i=1}^{n}([d_x]_i^2 + [d_s]_i^2) \leq 2(1+2\kappa)\delta^2\psi''(\nu_{\min} - 2\sqrt{1+2\kappa}\,\delta\alpha).$$

证毕.

引理 7 如果 α 满足不等式 $-\psi'(\nu_{\min} - 2\sqrt{1+2\kappa}\,\delta\alpha) + \psi'(\nu_{\min}) \leq \frac{2\delta}{\sqrt{1+2\kappa}}$,则 $f_1(\alpha) \leq 0$.

证明　利用(15)式和引理 6，可得

$$f'_1(\alpha)=f'_1(0)+\int_0^\alpha f''_1(\xi)\mathrm{d}\xi\leq-2\delta^2+2(1+2\kappa)\delta^2\int_0^\alpha\psi''(\nu_{\min}-2\sqrt{1+2\kappa}\,\delta\xi)\mathrm{d}\xi=$$
$$-2\delta^2-\sqrt{1+2\kappa}\,\delta(\psi'(\nu_{\min}-2\sqrt{1+2\kappa}\,\alpha\delta)-\psi'(\nu_{\min}))\leq$$
$$-2\delta^2+\sqrt{1+2\kappa}\,\delta\frac{2\delta}{\sqrt{1+2\kappa}}=0,$$

其中最后一个不等式使用了已知条件.

引理 8[11]　若 $\rho:[0,+\infty)\to(0,1]$ 表示 $-\frac{1}{2}\psi'(t)$ 在区间$(0,1]$上的逆函数，则满足引理 7 的最大步长 α 是 $\hat{\alpha}:=\frac{(\rho(\delta)-\rho(L\delta))}{(2\sqrt{1+2\kappa}\,\delta)}$，其中 $L=1+1/\sqrt{1+2\kappa}$.

引理 9　若 ρ 的定义见引理 8，则 $\rho(y)\geq\left(1+\frac{2y}{m}\right)^{\frac{-1}{m+1}}$.

证明　使用(9)式及 $t\in\left(0,1\right]$，$p\in[0,1]$，可得 $\frac{1}{2}\psi'(t)\leq\frac{m}{2}(1-t^{-(m+1)})$，使用$\rho$在引理 8 中的定义，反解，即可得需要的结论.

引理 10[8]　若 ρ 和 $\hat{\alpha}$ 的定义见引理 8，则 $\hat{\alpha}\geq\frac{1}{[\sqrt{1+2\kappa}\,\psi''(\rho(L\delta))]}$.

引理 11　如果 $\Psi(\nu)\geq\tau\geq1$，则 $\hat{\alpha}\geq\frac{1}{[4(1+2\kappa)m(m+2)(1+2\delta)^{\frac{(m+2)}{(m+1)}}]}$.

证明　利用引理 9 以及 $\psi''(t)$ 在区间 $t\in(0,+\infty)$ 上的单调递增性，可得

$$\hat{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{1+2\kappa}\,m[p\rho^{p-1}(L\delta)+(m+1)\rho^{-m-2}(L\delta)]}\geq$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+2\kappa}\,m\left[p\left(1+\frac{2L\delta}{m}\right)^{\frac{1-p}{m+1}}+(m+1)\left(1+\frac{2L\delta}{m}\right)^{\frac{m+2}{m+1}}\right]}\geq$$
$$\frac{1}{4(1+2\kappa)m(m+2)(1+2\delta)^{\frac{m+2}{m+1}}}.$$

证毕.

为了表示的方便，给出下列记号：

$$\tilde{\alpha}=\frac{1}{[4(1+2\kappa)m(m+2)(1+2\delta)^{\frac{(m+2)}{(m+1)}}]}.\tag{20}$$

在本文中，$\tilde{\alpha}$ 将作为默认步长.

引理 12[11]　假设 $h(t)$ 是一个二次可微的凸函数并满足 $h(0)=0,h'(0)<0$，则 $h(t)$ 有唯一的极小值点 t^* 并且 $h''(t)$ 关于 t 是单调递增的. 另外，对于 $t\in[0,t^*]$，都有 $h(t)\leq\frac{1}{2}th'(0)$.

引理 13[8]　如果步长 α 满足 $\alpha\leq\tilde{\alpha}$，则 $f(\alpha)\leq-\alpha\delta^2$.

定理 4　若 $\tilde{\alpha}$ 的定义为(20)式且 $\Psi(\nu)\geq\tau$，则 $f(\tilde{\alpha})\leq-\frac{(\Psi(\nu))^{\frac{mp}{(p+1)(m+1)}}}{192(1+2\kappa)m(m+2)}$.

证明　使用引理 13 可得：

$$f(\tilde{\alpha})\leq-\tilde{\alpha}\delta^2\leq-\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^2\Psi(\nu)^{\frac{2p}{p+1}}}{4(1+2\kappa)m(m+2)\left(1+\frac{2}{6}\Psi(\nu)^{\frac{p}{p+1}}\right)^{\frac{m+2}{m+1}}}\leq$$
$$-\frac{\Psi(\nu)^{\frac{2p}{p+1}}}{144(1+2\kappa)m(m+2)\left(1+\frac{1}{3}\right)\Psi(\nu)^{\frac{p(m+2)}{(p+1)(m+1)}}}\leq$$

$$-\frac{1}{192(1+2\kappa)m(m+2)}(\Psi(\nu))^{\frac{mp}{(p+1)(m+1)}},$$

其中第 2 个不等式使用了定理 3 及(20) 式.

下面给出算法的多项式复杂度. 用 Ψ_0 表示进行一次 μ 更新后 $\Psi(\nu)$ 的值.

引理 14 若 K 表示在一次外迭代中需要的内迭代总数，则 $K \leq \lceil (\Psi_0)^\gamma / 2\beta \rceil$,其中 $\beta = 1/[192(1+2\kappa)m(m+2)]$，$\gamma = (p+m+1)/[(p+1)(m+1)]$.

证明 Ψ_k 表示在同一个外迭代下 $\Psi(\nu)$ 的值. 由定理 4，可得:$\Psi_{k+1} \leq \Psi_k - \beta(\Psi_k)^{1-\gamma}$.

使用文献[4] 的引理 14，可得

$$K \leq \left\lceil \frac{(\Psi_0)^\gamma}{\beta\gamma} \right\rceil \leq \left\lceil 192(1+2\kappa)\frac{m(m+1)(m+2)(p+1)}{p+m+1}(\Psi_0)^\gamma \right\rceil \leq$$

$$\lceil 384(1+2\kappa)m(m+2)(\Psi_0)^\gamma \rceil = \left\lceil \frac{1}{2\beta}(\Psi_0)^\gamma \right\rceil,$$

其中最后一个不等式使用了 $\frac{(m+1)(p+1)}{(p+m+1)} \leq 2$.

使用引理 14,可得总的迭代次数的上界是 $\frac{K}{\theta}\lg\frac{n}{\epsilon}$,故使用注 1 有定理 5.

定理 5 使用大步更新和小步更新策略，即 $\Psi_0 = O(n)$ 和 $\Psi_0 = O(1)$，则算法复杂度分别为:

$$O\left((1+2\kappa)n^{\frac{p+m+1}{(1+p)(m+1)}}\lg\frac{n}{\epsilon}\right) \text{和} O\left((1+2\kappa)\sqrt{n}\lg\frac{n}{\epsilon}\right).$$

4 结 论

本文给出了一类包含更广泛的核函数,并以此为基础设计了一个内点算法. 经分析知该算法具有较好的迭代复杂度. 另外,在以后的研究中,将进一步寻找性质更好的核函数并尝试用其他的优化方法[12-13]来求解该类问题.

参 考 文 献

[1] Karmarkar N. A new polynomial-time algorithm for linear programming[J]. Combinatorica,1984,4(4):373-393.

[2] Andersen C E D, Gondzio J, Xu X. Implementation of interior-point methods for large scale linear programs[M]. The Netherlands:Kluwer Academic Publishers,1996.

[3] Renegar J. A mathematical view of interior-point methods in convex optimization[M]. New York:Siam Press,2001.

[4] Peng J, Roos C, Terlaky T. Self-regularity:a new paradigm for primal-dual interior-point algorithms[M]. Princeton:Princeton University Press,2002.

[5] Peng J, Roos C, Terlaky T. Self-regularity functions and new search directions for linear and semi-definite optimization[J]. Math Program,2002,93(1):129-171.

[6] Bai Y, Roos C. A primal-dual interior-point method based on a new kernel function with linear growth rate[C]. Australia:Perth Press,2002.

[7] Bai Y, Roos C. A polynomial-time algorithm for linear optimization based on a new simple kernel function[J]. Optim Methods Softw,2003,18(6):631-646.

[8] Bai Y, Ghami M, Roos C. A comparative study of kernel functions for primal-dualinterior-point algorithms in linear optimization[J]. SIAM J Optim,2004,15(1):101-128.

[9] Bai Y, Lesaja G, Roos C, et al. A class of large-update and small-update primal-dual interior-point algorithms for linear optimization[J]. J Optim Theory Appl,2008,138(3):341-359.

[10] Bai Y, Guo J, Roos C. A new kernel function yielding the best iteriation bounds for primal-dual interior-point algorithms[J]. Acta Math Sin (Engl Ser),2009,25(12):2169-2178.

[11] Choa G M, Kim M K, Lee Y H. Complexity of large-update interior point algorithm for linear complementarity problems[J]. Comput Math Appl,2007,53(6):948-960.

[12] 张永红,陈永强,毋晓迪. 一类多乘积优化问题求解的新方法[J]. 河南师范大学学报(自然科学版),2015,43(4):1-6.

[13] 董晓亮,杨喜美,黄元元. 一类 Armijo 搜索下新的共轭梯度法及其全局收敛性[J]. 河南师范大学学报(自然科学版),2015,43(6):25-29.

Based on a Class of Kernel Functions Interior-Point Algorithms for $P_*(\kappa)$-Horizontal Linear Complementarity Problems

YANG Ximei[a], ZHANG Yinkui[b], PEI Yonggang[a]

(a. College of Mathematics and Information Science; b. Personnel division, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

Abstract: Based on the kernel function for $P_*(\kappa)$- horizontal linear complementarity problem, we present a new class of kernel functions and give an inter-point algorithm In order to obtain the complexity of algorithm, we first analysis the new class of kernel functions of properties. Then, we show the iteration bounds that match currently best known iteration bounds of large-update and small-update interior-point algorithm.

Keywords: kernel function; $P_*(\kappa)$-horizontal linear complementarity problems; interior-point method; polynomial complexity