

# 平方图的 2-距离和可区别边染色

王芹<sup>1</sup>, 杨超<sup>1</sup>, 姚兵<sup>2</sup>

(1. 上海工程技术大学 数理与统计学院; 智能计算与应用统计研究中心, 上海 201620;

2. 西北师范大学 数学与统计学院, 兰州 730070)

**摘要:** 为了进一步研究图的 2-距离和可区别边染色的问题. 利用组合分析法、反证法以及分类讨论的思想, 得到了路、圈、 $C_n \wedge P_m$ 、 $C_m \wedge C_n$ 、 $C_n \wedge P_m \wedge C_k$  等 5 类平方图的 2-距离和可区别边色数, 结果表明这 5 类平方图的 2-距离和可区别边色数均不超过  $\Delta + 2$ .

**关键词:** 边染色; 2-距离和可区别边染色; 平方图

**中图分类号:** O157.5

**文献标志码:** A

## 1 预备知识

染色问题是图论中的经典问题之一, 具有较强的应用背景, 它解决了如存储问题、课程表问题、电路设计等众多实际问题<sup>[1]</sup>. 2002 年, ZHANG 等<sup>[1]</sup>首次提出了图的邻点可区别正常边染色, 即在正常边染色的基础上区分相邻点的色集合, 相关研究成果详见文献[2-8]. 对于两个不同的集合, 它们的元素之和可能会相同, 但若两个集合元素之和不同, 则这两个集合一定不同. 2013 年, FLANDRIN 等<sup>[9]</sup>提出了图的邻和可区别正常边染色, 需要考虑相邻顶点边色集合的元素之和, 即图  $G$  的一个正常边染色满足任意相邻两点的色集合的元素之和不同. 2021 年, 强会英等<sup>[10]</sup>在邻和可区别边染色的基础上考虑将相邻点扩展为距离不超过 2 的点, 提出了图的 2-距离和可区别边染色的概念, 并研究了无  $K_4$ -子式图的 2-距离和可区别边染色. 本文探讨 5 类平方图的 2-距离和可区别边色数问题.

**定义 1**<sup>[10]</sup> 设  $f: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  为图  $G$  的一个正常边染色, 若对任意的  $u, v \in V(G)$  且  $dist_G(u, v) \leq 2$ , 都有  $\sigma_G(u) \neq \sigma_G(v)$ , 其中  $dist_G(u, v)$  表示  $u, v$  两点间的最短距离,  $\sigma_G(u) = \sum_{w \in N(u)} f(uw)$ , 则称  $f$  为图  $G$  的 2-距离和可区别边染色. 将图  $G$  存在 2-距离和可区别  $k$ -边染色的最小值  $k$  称为图  $G$  的 2-距离和可区别边色数, 记为  $\chi'_{2-\Sigma}(G)$ .

**定义 2** 设  $u$  和  $v$  分别表示连通图  $G$  和  $H$  中的最小度点, 称图  $G \wedge H$  表示将  $G$  中的点  $u$  与  $H$  中的点  $v$  粘连一起后得到的图.

**定义 3**<sup>[11]</sup> 图  $G$  的平方图  $G^2$  是以  $V(G)$  作为它的点集, 任意两个点  $u, v$  在  $G^2$  中相邻当且仅当  $1 \leq dist_G(u, v) \leq 2$ .

**引理 1**<sup>[12]</sup> 若图  $G$  存在两个距离小于等于 2 的最大度点, 则  $\chi'_{2-\Sigma}(G) \geq \Delta(G) + 1$ .

本文论及的图均为有限、无向、连通的简单图. 设  $N(u)$  表示  $u$  的邻点集,  $\Delta(G)$  (或  $\Delta$ ) 表示图的最大度; 设  $u, v$  为图  $G$  中任意两点, 称满足  $D_G(u, v) \leq 2$  的点为 2-距离点. 文中未定义的术语和符号均采用于

收稿日期: 2022-04-06; 修回日期: 2022-04-21.

基金项目: 国家自然科学基金(61672001; 61662066; 62072296).

作者简介: 王芹(1997-), 女, 山东滨州人, 上海工程技术大学硕士研究生, 研究方向为图论及其应用, E-mail: w1913942134@163.com.

通信作者: 杨超(1988-), 男, 河南光山人, 上海工程技术大学讲师, 博士, 研究方向为图论及其应用、网路与系统安全. E-mail: yangchao@sues.edu.cn.

文献[13].

## 2 主要结论

**定理 1** 对  $n$  阶路平方图  $P_n^2 (n \geq 5)$ , 有  $\chi'_{2-\Sigma}(P_n^2) = 5$ .

**证明** 设路  $P_n = \nu_1 \nu_2 \cdots \nu_n$ , 则  $d_{P_n^2}(\nu_1) = d_{P_n^2}(\nu_n) = 2, d_{P_n^2}(\nu_2) = d_{P_n^2}(\nu_{n-1}) = 3, d_{P_n^2}(\nu) = 4, \nu \in V(P_n^2) - \{\nu_1, \nu_n, \nu_2, \nu_{n-1}\}$ . 由引理 1 知  $\chi'_{2-\Sigma}(P_n^2) \geq 5$ . 当  $n = 5$  时,  $P_5^2$  的边  $\nu_i \nu_{i+1}$  按照  $(3, 1, 2, 1)$  着色, 对边  $\nu_i \nu_{i+2}$  按照  $(4, 5, 3)$  着色, 则有  $\sigma_{P_n^2}(\nu_1) = 7, \sigma_{P_n^2}(\nu_2) = 9, \sigma_{P_n^2}(\nu_3) = 10, \sigma_{P_n^2}(\nu_4) = 8, \sigma_{P_n^2}(\nu_5) = 4$ . 下面定义  $P_n^2 (n \geq 6)$  的一个 5-边染色:  $P_n^2$  的边  $\nu_i \nu_{i+1}$  按照  $(3, 1, 2, 1, 2)$  循环着色, 对边  $\nu_i \nu_{i+2}$  按照  $(4, 4, 3, 5, 5)$  循环着色. 由上述

$$\text{染色可得 } \sigma_{P_n^2}(\nu_1) = 7, \sigma_{P_n^2}(\nu_2) = 8, \sigma_{P_n^2}(\nu_i) = \begin{cases} 10, i \equiv 3 \pmod{5} \\ 12, i \equiv 4 \pmod{5} \\ 11, i \equiv 0 \pmod{5}, i \in [3, n-2] \\ 14, i \equiv 1 \pmod{5} \\ 13, i \equiv 2 \pmod{5} \end{cases}$$

当  $n \equiv 0 \pmod{5}$  时,  $\sigma_{P_n^2}(\nu_n) = 4, \sigma_{P_n^2}(\nu_{n-1}) = 7$ ; 当  $n \equiv 1 \pmod{5}$  时,  $\sigma_{P_n^2}(\nu_n) = 7, \sigma_{P_n^2}(\nu_{n-1}) = 6$ ; 当  $n \equiv 2 \pmod{5}$  时, 需要调整边  $\nu_n \nu_{n-1}$  的染色, 用 1 重新给边  $\nu_n \nu_{n-1}$  染色, 得  $\sigma_{P_n^2}(\nu_n) = 6, \sigma_{P_n^2}(\nu_{n-1}) = 8$ ; 当  $n \equiv 3 \pmod{5}$  时,  $\sigma_{P_n^2}(\nu_n) = 5, \sigma_{P_n^2}(\nu_{n-1}) = 9$ ; 当  $n \equiv 4 \pmod{5}$  时,  $\sigma_{P_n^2}(\nu_n) = 6, \sigma_{P_n^2}(\nu_{n-1}) = 7$ .

综上所述,  $\chi'_{2-\Sigma}(P_n^2) = 5$ .

**定理 2** 对  $n$  阶圈平方图  $C_n^2$ , 有  $\chi'_{2-\Sigma}(C_n^2) = \begin{cases} 5, n \equiv 0 \pmod{5} \\ 6, n \not\equiv 0 \pmod{5} \end{cases}$ .

**证明** 设  $C_n = \nu_1 \nu_2 \cdots \nu_n \nu_1$ , 则  $d_{C_n^2}(\nu) = 4$ . 由引理 1 知,  $\chi'_{2-\Sigma}(C_n^2) \geq 5$ . 对圈平方图  $C_n^2$  的边染色分如下情况进行讨论.

情形 1  $n \equiv 0 \pmod{5}$

下面给出  $C_n^2$  的一个 5-边染色: 边  $\nu_i \nu_{i+1}$  按照  $(1, 2, 1, 2, 3)$  依次循环染色, 边  $\nu_i \nu_{i+2}$  按照  $(4, 3, 5, 5, 4)$  依次循环染色. 此时权重  $\sigma_{C_n^2}(\nu_1), \sigma_{C_n^2}(\nu_2), \dots, \sigma_{C_n^2}(\nu_n)$  按照  $(12, 10, 12, 11, 14)$  依次循环, 结论成立.

情形 2  $n \not\equiv 0 \pmod{5}$

首先证明  $C_n^2$  中不存在 2-距离和可区别 5-边染色. 假设当  $n \not\equiv 0 \pmod{5}$  时  $C_n^2$  中存在一个 2-距离和可区别 5-边染色. 由于  $C_n^2$  中任意 5 个连续点距离均不超过 2, 不失一般性, 取  $C_n^2$  中的 6 个连续点  $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, \nu_6$ , 则一定有  $\sigma_{C_n^2}(\nu_1) = \sigma_{C_n^2}(\nu_6)$ . 当  $n \equiv 1 \pmod{5}$  时, 有  $\sigma_{C_n^2}(\nu_1) = \sigma_{C_n^2}(\nu_n)$ ; 当  $n \equiv 2 \pmod{5}$  时, 有  $\sigma_{C_n^2}(\nu_1) = \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-1})$ ; 当  $n \equiv 3 \pmod{5}$  时, 有  $\sigma_{C_n^2}(\nu_1) = \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-2})$ ; 当  $n \equiv 4 \pmod{5}$  时, 有  $\sigma_{C_n^2}(\nu_1) = \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-3})$ . 这与定义 1 矛盾, 因此  $\chi'_{2-\Sigma}(C_n^2) \geq 6$ .

情形 2.1 当  $n \equiv 1 \pmod{5}$  时, 对  $C_n^2$  的边  $\nu_i \nu_{i+1} (i \in [1, n-2])$  按照  $(1, 2, 3, 4, 5)$  循环染色, 边  $\nu_{n-1} \nu_n$  染 2, 边  $\nu_n \nu_1$  染 5, 边  $\nu_i \nu_{i+2} (i \in [1, n-2])$  按照  $(4, 5, 1, 6, 3)$  循环染色, 边  $\nu_{n-1} \nu_1$  染 6, 边  $\nu_n \nu_2$  染 4. 则权重  $\sigma_{C_n^2}(\nu_3), \sigma_{C_n^2}(\nu_4), \dots, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-1})$  按照  $(10, 18, 13, 16, 11)$  依次循环  $\sigma_{C_n^2}(\nu_n) = 17, \sigma_{C_n^2}(\nu_1) = 16, \sigma_{C_n^2}(\nu_2) = 12$ , 结论成立.

情形 2.2 当  $n \equiv 2 \pmod{5}$  时, 对  $C_n^2$  的边  $\nu_i \nu_{i+1} (i \in [1, n-2])$  按照  $(1, 2, 3, 4, 5)$  循环染色, 边  $\nu_{n-1} \nu_n$  染 2, 边  $\nu_n \nu_1$  染 6, 边  $\nu_i \nu_{i+2} (i \in [1, n-2])$  按照  $(4, 5, 1, 6, 3)$  循环染色, 边  $\nu_{n-1} \nu_1$  染 3, 边  $\nu_n \nu_2$  染 4. 此时权重  $\sigma_{C_n^2}(\nu_3), \sigma_{C_n^2}(\nu_4), \dots, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-1})$  依次按照  $(10, 18, 13, 16, 11)$  顺序循环  $\sigma_{C_n^2}(\nu_1) = 14, \sigma_{C_n^2}(\nu_2) = 12, \sigma_{C_n^2}(\nu_n) = 15$ , 结论成立.

情形 2.3 当  $n \equiv 3 \pmod{5}$  时, 对  $C_n^2$  的边  $\nu_i \nu_{i+1} (i \in [1, n-3])$  按照  $(1, 2, 3, 4, 5)$  依次循环染色, 边  $\nu_{n-2} \nu_{n-1}$  染 4, 边  $\nu_{n-1} \nu_n$  染 6, 边  $\nu_n \nu_1$  染 5, 边  $\nu_i \nu_{i+2} (i \in [1, n-3])$  按照  $(4, 5, 1, 6, 3)$  循环染色, 边  $\nu_{n-2} \nu_n$  染 2, 边  $\nu_{n-1} \nu_1$  染 2, 边  $\nu_n \nu_2$  染 3. 此时权重  $\sigma_{C_n^2}(\nu_2), \sigma_{C_n^2}(\nu_3), \dots, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-3})$  依次按照  $(11, 10, 18, 13, 16)$  顺序循环,  $\sigma_{C_n^2}(\nu_1) = 12, \sigma_{C_n^2}(\nu_n) = 16, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-1}) = 15, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-2}) = 17$ , 结论成立.

情形 2.4 当  $n \equiv 4 \pmod{5}$  时,对  $C_n^2$  的边  $\nu_i\nu_{i+1} (i \in [1, n-4])$  按照  $(1, 2, 3, 4, 5)$  循环染色,边  $\nu_{n-3}\nu_{n-2}$  染 4,边  $\nu_{n-2}\nu_{n-1}$  染 6,边  $\nu_{n-1}\nu_n$  染 1,边  $\nu_n\nu_1$  染 6,边  $\nu_i\nu_{i+2} (i \in [1, n-4])$  按照  $(4, 5, 1, 6, 3)$  循环染色,边  $\nu_{n-3}\nu_{n-1}$  染 2,边  $\nu_{n-2}\nu_n$  染 2,边  $\nu_{n-1}\nu_1$  染 5,边  $\nu_n\nu_2$  染 3.此时权重  $\sigma_{C_n^2}(\nu_2), \sigma_{C_n^2}(\nu_3), \dots, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-4})$  依次按照  $(11, 10, 18, 13, 16)$  顺序循环,  $\sigma_{C_n^2}(\nu_1)=16, \sigma_{C_n^2}(\nu_n)=12, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-1})=14, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-2})=15, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-3})=17$ , 结论成立.

**定理 3**  $\chi'_{2-\Sigma}([C_n \wedge P_m]^2) = \Delta + 1$ .

**证明** 不妨记  $G_1 = [C_n \wedge P_m]^2$ , 其中  $C_n = \nu_1\nu_2 \cdots \nu_n\nu_1, P_m = u_1u_2 \cdots u_{m-1}u_m$ . 令  $u_1 = \nu_x, u_2 = u_y, u_3 = u_{y+1}, u_4 = u_{y+2}$ , 则  $G_1 = (C_n^2 \wedge P_m^2) \cup \{u_y\nu_{x-1}, u_y\nu_{x+1}\}$ , 其中  $\nu_x$  为  $C_n^2$  和  $P_m^2$  的黏接点.  $[C_6 \wedge P_7]^2$  如图 1 所示.

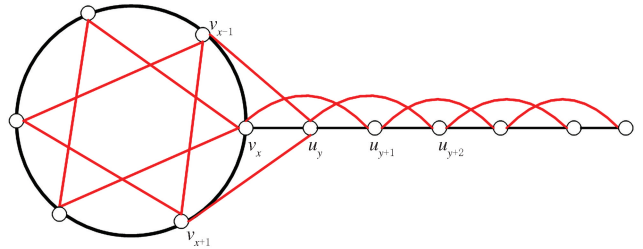


图1  $[C_6 \wedge P_7]^2$   
Fig. 1  $[C_6 \wedge P_7]^2$

图  $G_1$  中圈平方图  $C_n^2$  的边染色方式见定理 2 且使  $\sigma_{C_n^2}(\nu_x) = \max\{\sigma_{C_n^2}(\nu_i)\}$ , 其中  $\nu_i \in V(C_n^2)$ . 由引理 1 知  $\chi'_{2-\Sigma}([C_n \wedge P_m]^2) \geq \Delta + 1$ . 下面分 3 种情形对  $G_1$  进行边染色.

情形 1  $n \equiv 0 \pmod{5}$

根据定理 2 可知  $\max\{\sigma_{C_n^2}(\nu_i)\} = 14$ , 在没有连接路平方图  $P_m^2$  时  $\sigma_{C_n^2}(\nu_x) = 14, \sigma_{C_n^2}(\nu_{x-1}) = 11, \sigma_{C_n^2}(\nu_{x+1}) = 13$ . 令边  $\nu_x u_y$  染 6, 边  $\nu_{x-1} u_y$  染 4, 边  $\nu_{x+1} u_y$  染 7, 边  $\nu_x u_{y+1}$  染 1, 边  $u_y u_{y+1}$  染 3, 然后对图  $G_1$  中路平方图  $P_m^2$  进行染色, 对于  $P_m^2, u_1 = \nu_x, u_2 = u_y$ , 对边  $u_i u_{i+1} (i \in [3, m-1])$  按照  $(2, 3, 1, 2, 1)$  依次循环染色, 对边  $u_i u_{i+2} (i \in [2, m-2])$  按照  $(5, 5, 4, 4, 3)$  依次循环染色. 由上述染色可得,  $\sigma_{G_1}(\nu_x) = 21, \sigma_{G_1}(\nu_{x-1}) = 15, \sigma_{G_1}(\nu_{x+1}) = 20, \sigma_{G_1}(u_y) = 25$ , 图  $G_1$  中路平方图  $P_m^2$  中的点  $\sigma_{G_1}(u_i) (i \in [3, m-2])$  按照  $(11, 14, 13, 10, 12)$  循环, 若  $\sigma_{G_1}(u_{m-1}) = \sigma_{G_1}(u_m)$ , 调色方式与定理 1 相同, 若  $\sigma_{G_1}(u_{m-1}) = \sigma_{G_1}(u_{m-4})$ , 将边  $u_{m-1}u_m$  重新染 1, 此时  $\sigma_{G_1}(u_m) = 6, \sigma_{G_1}(u_{m-1}) = 8, \sigma_{G_1}(u_{m-4}) = 10$ , 故对于图  $[C_n \wedge P_m]^2$  中路平方图  $P_m^2$  中的任意 2- 距离点都是可区分的. 容易验证,  $\nu_x, \nu_{x-1}, \nu_{x+1}, u_y$  的权重也是可区分的, 结论得证.

情形 2  $n \not\equiv 0 \pmod{5}$

由定理 2 可知  $\max\{\sigma_{C_n^2}(\nu_i)\} = 18$ , 在没有连接路平方图  $P_m^2$  时  $\sigma_{C_n^2}(\nu_x) = 18, \sigma_{C_n^2}(\nu_{x-1}) = 10, \sigma_{C_n^2}(\nu_{x+1}) = 13$ . 令边  $\nu_x u_y$  染 2, 边  $\nu_{x-1} u_y$  染 5, 边  $\nu_{x+1} u_y$  染 7, 边  $\nu_x u_{y+1}$  染 7, 边  $u_y u_{y+1}$  染 1, 边  $u_{y+1} u_{y+2}$  染 2, 边  $\nu_y u_{y+2}$  染 6, 接下来对图  $G_1$  中路平方图  $P_m^2$  进行染色, 对于  $P_m^2, u_1 = \nu_x, u_2 = u_y$ , 边  $u_i u_{i+1} (i \in [4, m-1])$  按照  $(1, 2, 1, 2, 3)$  循环染色, 边  $u_i u_{i+2} (i \in [3, m-2])$  按照  $(4, 4, 3, 5, 5)$  循环染色. 此时  $\sigma_{G_1}(\nu_x) = 27, \sigma_{G_1}(\nu_{x-1}) = 15, \sigma_{G_1}(\nu_{x+1}) = 20, \sigma_{G_1}(u_y) = 21, \sigma_{G_1}(u_{y+1}) = 14, \sigma_{G_1}(u_{y+2}) = 13$ . 图  $[C_n \wedge P_m]^2$  中路平方图  $P_m^2$  中的点  $\sigma_{G_1}(u_i) (i \in [5, m-2])$  按照  $(10, 12, 11, 14, 13)$  循环, 若  $\sigma_{G_1}(u_{n-1})$  和  $\sigma_{G_1}(u_n)$  冲突, 调色方式与定理 1 相同, 对于  $P_m^2$  中的任意 2- 距离点都是可区分的. 同时,  $\nu_x, \nu_{x-1}, \nu_{x+1}, u_y$  权重也是可区分的, 结论得证.

**定理 4**  $\chi'_{2-\Sigma}([C_m \wedge C_n]^2) = \Delta + 1$ .

**证明** 设  $G_2 = [C_m \wedge C_n]^2$ , 其中  $C_m = u_1u_2 \cdots u_mu_1, C_n = \nu_1\nu_2 \cdots \nu_n\nu_1$ . 则  $G_2 = (C_m^2 \wedge C_n^2) \cup \{u_{x-1}\nu_{x+1}, u_{x-1}\nu_{x-1}, u_{x+1}\nu_{x+1}, u_{x+1}\nu_{x-1}\}$ , 这里  $C_m^2$  与  $C_n^2$  黏接点为  $u_x$  (或  $\nu_x$ ),  $u_x \in V(C_m), \nu_x \in V(C_n)$ . 图  $[C_5 \wedge C_7]^2$  如图 2 所示.

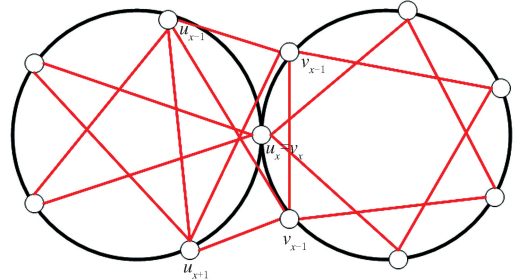


图2  $[C_5 \wedge C_7]^2$   
Fig. 2  $[C_5 \wedge C_7]^2$

在  $C_m^2$  未连接  $C_n^2$  时, 使  $\max\{\sigma_{C_m^2}(u_x)\} = 18, \sigma_{C_m^2}(u_{x-1}) = 10, \sigma_{C_m^2}(u_{x+1}) = 13$ .  $C_m^2$  在  $m \not\equiv 0 \pmod{5}$  时的边染色方式见定理 2, 当  $m \equiv 0 \pmod{5}$  时,  $C_m^2$  的边  $u_i u_{i+1} (i \in [1, n])$  按照  $(1,$

2,3,4,5) 循环染色,边  $u_i u_{i+1} (i \in [1, n])$  按照(4,5,1,6,3) 循环染色. 此时权重  $\sigma_{G_2}(u_1), \sigma_{G_2}(u_2), \dots, \sigma_{G_2}(u_n)$  依次按照(16,11,10,18,13) 顺序循环. $C_n^2$  的边染色方式分以下 5 种情况.

情形 1 当  $n \equiv 0 \pmod{5}$  时,对圈平方图  $C_n^2$  的边  $\nu_i \nu_{i+1}$  按照(9,8,7,4,3) 循环染色,边  $\nu_i \nu_{i+2}$  按照(2,6,9,8,7) 循环染色.此时权重  $\sigma_{C_n^2}(\nu_1), \sigma_{C_n^2}(\nu_2), \dots, \sigma_{C_n^2}(\nu_n)$  依次按照(22,30,26,25,23) 顺序循环,在该情形下 2-距离点的权重各不相同.

情形 2 当  $n \equiv 1 \pmod{5}$  时,对圈平方图  $C_n^2$  的边  $\nu_i \nu_{i+1} (i \in [1, n-1])$  按照(9,8,7,4,3) 循环染色,边  $\nu_n \nu_1$  染 1,边  $\nu_i \nu_{i+2} (i \in [1, n-1])$  按照(2,6,9,8,7) 循环染色,边  $\nu_n \nu_2$  染 5.此时权重  $\sigma_{C_n^2}(\nu_3), \sigma_{C_n^2}(\nu_4), \dots, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-1})$  依次按照(26,25,23,22,30) 顺序循环, $\sigma_{C_n^2}(\nu_1) = 19, \sigma_{C_n^2}(\nu_2) = 28, \sigma_{C_n^2}(\nu_n) = 17$ ,在该情形下 2-距离点的权重可区别.

情形 3 当  $n \equiv 2 \pmod{5}$  时,对圈平方图  $C_n^2$  的边  $\nu_i \nu_{i+1} (i \in [1, n-2])$  按照(9,8,7,4,3) 循环染色,边  $\nu_{n-1} \nu_n$  染 9,边  $\nu_n \nu_1$  染 3,边  $\nu_i \nu_{i+2} (i \in [1, n-2])$  按照(2,6,9,8,7) 循环染色,边  $\nu_{n-1} \nu_1$  染 5,边  $\nu_n \nu_2$  染 5.此时权重  $\sigma_{C_n^2}(\nu_3), \sigma_{C_n^2}(\nu_4), \dots, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-1})$  依次按照(26,25,23,22,30) 顺序循环, $\sigma_{C_n^2}(\nu_1) = 19, \sigma_{C_n^2}(\nu_2) = 28, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-1}) = 25, \sigma_{C_n^2}(\nu_n) = 24$ ,在该情形下除了  $\nu_{n-1}$  与 2-距离点有冲突其他点均无冲突,连接  $C_m^2$  后,与  $\nu_{n-1}$  权重相同的 2-距离点的权重也会对应增加,因此不会影响其他已区分权重的点.

情形 4 当  $n \equiv 3 \pmod{5}$  时,对圈平方图  $C_n^2$  的边  $\nu_i \nu_{i+1} (i \in [1, n-3])$  按照(9,8,7,4,3) 循环染色,边  $\nu_{n-2} \nu_{n-1}$  染 9,边  $\nu_{n-1} \nu_n$  染 1,边  $\nu_n \nu_1$  染 8,边  $\nu_i \nu_{i+2} (i \in [1, n-3])$  按照(2,6,9,8,7) 循环染色,边  $\nu_{n-2} \nu_n$  染 4,边  $\nu_{n-1} \nu_1$  染 3,边  $\nu_n \nu_2$  染 5.此时权重  $\sigma_{C_n^2}(\nu_3), \sigma_{C_n^2}(\nu_4), \dots, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-2})$  依次按照(26,25,23,22,30) 顺序循环, $\sigma_{C_n^2}(\nu_1) = 22, \sigma_{C_n^2}(\nu_2) = 28, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-2}) = 24, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-1}) = 20, \sigma_{C_n^2}(\nu_n) = 18$ ,在该情形下 2-距离点的权重各不相同.

情形 5 当  $n \equiv 4 \pmod{5}$  时,对圈平方图  $C_n^2$  的边  $\nu_i \nu_{i+1} (i \in [1, n-4])$  按照(9,8,7,4,3) 循环染色,边  $\nu_{n-3} \nu_{n-2}$  染 1,边  $\nu_{n-2} \nu_{n-1}$  染 2,边  $\nu_{n-1} \nu_n$  染 1,边  $\nu_n \nu_1$  染 8,边  $\nu_i \nu_{i+2} (i \in [1, n-4])$  按照(2,6,9,8,7) 循环染色,边  $\nu_{n-3} \nu_{n-1}$  染 9,边  $\nu_{n-2} \nu_n$  染 4,边  $\nu_{n-1} \nu_1$  染 3,边  $\nu_n \nu_2$  染 5.此时权重  $\sigma_{C_n^2}(\nu_3), \sigma_{C_n^2}(\nu_4), \dots, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-4})$  依次按照(26,25,23,22,30) 顺序循环, $\sigma_{C_n^2}(\nu_1) = 22, \sigma_{C_n^2}(\nu_2) = 28, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-3}) = 21, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-2}) = 14, \sigma_{C_n^2}(\nu_{n-1}) = 15, \sigma_{C_n^2}(\nu_n) = 18$ ,在该情形下 2-距离点的权重各不相同.

选择  $C_n^2$  中  $\sigma_{C_n^2}(\nu_i) = 26$  的点为黏接点,该点记为  $\nu_x$ .在未连接  $C_m^2$  时, $\sigma_{C_n^2}(\nu_{x+1}) = 25, \sigma_{C_n^2}(\nu_{x-1}) = 30$ .将  $C_n^2$  与  $C_m^2$  用点  $\nu_x (=u_x)$  黏接,令边  $u_{x-1} \nu_{x+1}$  染 9,边  $u_{x+1} \nu_{x-1}$  染 9,当  $n \equiv 0 \pmod{5}$  时,边  $u_{x-1} \nu_{x-1}$  染 6,边  $u_{x+1} \nu_{x+1}$  染 2,出现边  $u_{x+1} \nu_{x-1}$  与边  $\nu_{x-1} \nu_{x-3}$  的颜色相同,此时边  $\nu_{x-1} \nu_{x-3}$  调色为 5,于是有  $\sigma_{G_2}(u_x) = 44, \sigma_{G_2}(u_{x-1}) = 26, \sigma_{G_2}(u_{x+1}) = 24, \sigma_{G_2}(\nu_{x+1}) = 33, \sigma_{G_2}(\nu_{x-1}) = 36, \sigma_{G_2}(\nu_{x-3}) = 17$ ;当  $n \equiv 1 \pmod{5}$  时,边  $u_{x-1} \nu_{x-1}$  染 4,边  $u_{x+1} \nu_{x+1}$  染 6,此时  $\sigma_{G_2}(u_x) = 44, \sigma_{G_2}(u_{x-1}) = 24, \sigma_{G_2}(u_{x+1}) = 29, \sigma_{G_2}(u_{x+1}) = 35, \sigma_{G_2}(\nu_{x-1}) = 39$ ;当  $n \equiv 2, 3, 4 \pmod{5}$  时,边  $u_{x-1} \nu_{x-1}$  染 7,边  $u_{x+1} \nu_{x+1}$  染 2,出现边  $u_{x+1} \nu_{x-1}$  与边  $\nu_{x-1} \nu_{x-2}$  的颜色相同,将边  $\nu_{x-1} \nu_{x-3}$  调色为 5,边  $\nu_{x-1} \nu_{x-2}$  调色为 4,可得  $\sigma_{G_2}(u_x) = 44, \sigma_{G_2}(u_{x-1}) = 26, \sigma_{G_2}(u_{x+1}) = 24, \sigma_{G_2}(\nu_{x+1}) = 36, \sigma_{G_2}(\nu_{x-1}) = 39, \sigma_{G_2}(\nu_{x-2}) = 17, \sigma_{G_2}(\nu_{x-3}) = 21$ ;其中  $\sigma_{G_2}(u_{x-1}), \sigma_{G_2}(u_{x+1})$  与  $C_n^2$  中权重相同点的距离大于 2,且  $\min\{\sigma_{G_2}(\nu_{x+1}), \sigma_{G_2}(\nu_{x-1}), \sigma_{G_2}(u_x)\} > \max\{\sigma_{G_2}(u_i), \sigma_{G_2}(\nu_i)\}$ , 结论得证.

**定理 5**  $\chi'_{2-\Sigma}([C_n \wedge P_m \wedge C_k]^2) = \Delta + 1$ .

**证明** 令  $G_3 = [C_n \wedge P_m \wedge C_k]^2$ ,且设  $C_n = \nu_1 \nu_2 \dots \nu_n \nu_1, P_m = u_1 u_2 \dots u_{m-1} u_m, C_k = w_1 w_2 \dots w_k w_1$ .不妨设  $C_n \wedge P_m$  与定理 3 定义相同, $C_n \wedge P_m$  与  $C_k$  黏接点记为  $w_x, w_x$  在  $P_n$  中相邻点为  $w_q$ .令  $w_q = u_{m-1}, w_x = u_m$ ,则  $G_3 = G_2 \cup C_k^2 \cup \{w_q w_{x-1}, w_q w_{x+1}\}$ ,这里图  $G_2$  同定理 3.图  $[C_6 \wedge P_7 \wedge C_7]^2$  如图 3 所示.

图  $G_3$  中子图  $G_2$  的边染色见定理 3. $C_k^2 (k \neq 0 \pmod{5})$  的边染色方式以及各点的权重见定理 2, $C_k^2 (k \equiv 0 \pmod{5})$  的边染色方式如下: $w_i w_{i+1}$  按照(1,2,3,4,5) 循环染色, $w_i w_{i+2}$  按照(4,5,1,6,3) 循环染色,权重  $\sigma_{C_k^2}(w_i)$  按照(16,11,10,18,13) 循环.选择  $C_k^2$  中, $\sigma_{C_k^2}(w_i) = 18, \sigma_{C_k^2}(w_{i-1}) = 10, \sigma_{C_k^2}(w_{i+1}) = 13$  的点  $w_i$  为黏接点记为  $w_x$ ,与  $w_i$  相邻的点  $w_{i-1}, w_{i+1}$  分别记为  $w_{x-1}, w_{x+1}$ .下面对  $\sigma_{P_m^2}(u_m)$  和  $\sigma_{P_m^2}(u_{m-1})$  进行分类讨论.

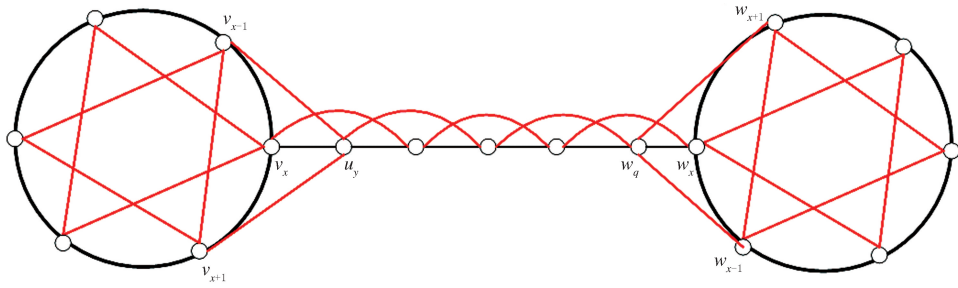


图3  $[C_6 \wedge P_7 \wedge C_7]^2$

Fig. 3  $[C_6 \wedge P_7 \wedge C_7]^2$

情形 1 当  $\sigma_{P_m^2}(u_m) = 6, \sigma_{P_m^2}(u_{m-1}) = 8$  时,边  $w_q w_{x+1}$  染 6,边  $w_q w_{x-1}$  染 7,调色使边  $w_x w_{q-1}$  染 7,边  $w_q w_{q-1}$  染 4,此时  $\sigma_{G_3}(w_x) = 26, \sigma_{G_3}(w_q) = 23, \sigma_{G_3}(w_{q-1}) = 15, \sigma_{G_3}(w_{x+1}) = 19, \sigma_{G_3}(w_{x-1}) = 17$ , 且有

$$\min\{\sigma_{G_3}(w_x), \sigma_{G_3}(w_q), \sigma_{G_3}(w_{x+1})\} > \sigma_{G_3}(w_i) (w_i \in V(C_k^2) \setminus \{w_x, w_{x+1}\}),$$

$$\sigma_{G_3}(w_{q-1}) \neq \sigma_{G_3}(w_i) (w_i \in V(C_k^2) \setminus \{w_{q-1}, w_{x-1}\}), \sigma_{G_3}(w_{x-1}) \neq \sigma_{G_3}(w_i) (w_i \in V(C_k^2) \setminus \{w_{q-1}, w_{x-1}\}),$$

$$\min\{\sigma_{G_3}(w_x), \sigma_{G_3}(w_q), \sigma_{G_3}(w_{q-1}), \sigma_{G_3}(w_{x+1}), \sigma_{G_3}(w_{x-1})\} > \sigma_{G_3}(u_i) (u_i \in V(P_m^2) \setminus \{w_q, w_{q-1}\}).$$

情形 2 当  $\sigma_{P_m^2}(u_m) = 7, \sigma_{P_m^2}(u_{m-1}) = 6$  时,边  $w_q w_{x+1}$  染 6,边  $w_q w_{x-1}$  染 7,调色使边  $w_x w_{q-1}$  染 7,边  $w_q w_{q-1}$  染 5,此时  $\sigma_{G_3}(w_x) = 27, \sigma_{G_3}(w_q) = 23, \sigma_{G_3}(w_{q-1}) = 18, \sigma_{G_3}(w_{x+1}) = 19, \sigma_{G_3}(w_{x-1}) = 17$ , 且有

$$\sigma_{C_k^2}(w_i) = 18 (w_i \in V(C_k^2) \setminus \{w_{q-1}\}),$$

$$\min\{\sigma_{G_3}(w_x), \sigma_{G_3}(w_q), \sigma_{G_3}(w_{q-1}), \sigma_{G_3}(w_{x+1})\} > \sigma_{G_3}(w_i) (w_i \in V(C_k^2) \setminus \{w_x, w_{x+1}\}),$$

$$\sigma_{G_3}(w_{x-1}) \neq \sigma_{G_3}(w_i) (w_i \in V(C_k^2) \setminus \{w_{x-1}\}),$$

$$\min\{\sigma_{G_3}(w_x), \sigma_{G_3}(w_q), \sigma_{G_3}(w_{q-1}), \sigma_{G_3}(w_{x+1}), \sigma_{G_3}(w_{x-1})\} > \sigma_{G_3}(u_i) (u_i \in V(P_m^2) \setminus \{w_q, w_{q-1}\}).$$

情形 3 当  $\sigma_{P_m^2}(u_m) = 4, \sigma_{P_m^2}(u_{m-1}) = 7$  时,边  $w_q w_{x+1}$  染 6,边  $w_q w_{x-1}$  染 7,调色使边  $w_x w_{q-1}$  染 7,边  $w_x w_{q-1}$  染 3,此时  $\sigma_{G_3}(w_x) = 26, \sigma_{G_3}(w_q) = 21, \sigma_{G_3}(w_{q-1}) = 15, \sigma_{G_3}(w_{x+1}) = 19, \sigma_{G_3}(w_{x-1}) = 17$ , 且有

$$\min\{\sigma_{G_3}(w_x), \sigma_{G_3}(w_q), \sigma_{G_3}(w_{x+1})\} > \sigma_{G_3}(w_i) (w_i \in V(C_k^2) \setminus \{w_x, w_{x+1}\}),$$

$$\sigma_{G_3}(w_{q-1}) \neq \sigma_{G_3}(w_i) (w_i \in V(C_k^2) \setminus \{w_{x-1}\}), \sigma_{G_3}(w_{x-1}) \neq \sigma_{G_3}(w_i) (w_i \in V(C_k^2) \setminus \{w_{x-1}\}),$$

$$\min\{\sigma_{G_3}(w_x), \sigma_{G_3}(w_q), \sigma_{G_3}(w_{q-1}), \sigma_{G_3}(w_{x+1}), \sigma_{G_3}(w_{x-1})\} > \sigma_{G_3}(u_i) (u_i \in V(P_m^2) \setminus \{w_q, w_{q-1}\}).$$

情形 4 当  $\sigma_{P_m^2}(u_m) = 6, \sigma_{P_m^2}(u_{m-1}) = 7$  时,边  $w_q w_{x+1}$  染 6,边  $w_q w_{x-1}$  染 7,调色使边  $w_x w_{x+1}$  染 7,此时  $\sigma_{G_3}(w_x) = 27, \sigma_{G_3}(w_q) = 20, \sigma_{G_3}(w_{x+1}) = 22, \sigma_{G_3}(w_{x-1}) = 17$ , 且有,

$$\min\{\sigma_{G_3}(w_x), \sigma_{G_3}(w_q), \sigma_{G_3}(w_{x+1})\} > \sigma_{G_3}(w_i) (w_i \in V(C_k^2) \setminus \{w_x, w_{x+1}\}),$$

$$\sigma_{G_3}(w_{x-1}) \neq \sigma_{G_3}(w_i) (w_i \in V(C_k^2) \setminus \{w_{x-1}\}),$$

$$\min\{\sigma_{G_3}(w_x), \sigma_{G_3}(w_q), \sigma_{G_3}(w_{x+1}), \sigma_{G_3}(w_{x-1})\} > \sigma_{G_3}(u_i) (u_i \in V(P_m^2) \setminus \{w_q, w_{q-1}\}).$$

情形 5 当  $\sigma_{P_m^2}(u_m) = 5, \sigma_{P_m^2}(u_{m-1}) = 9$  时,边  $w_q w_{x+1}$  染 6,边  $w_q w_{x-1}$  染 7,调色使边  $w_x w_{q-1}$  染 7,边  $w_q w_{q-1}$  染 4,此时  $\sigma_{G_3}(w_x) = 26, \sigma_{G_3}(w_q) = 23, \sigma_{G_3}(w_{q-1}) = 18, \sigma_{G_3}(w_{x+1}) = 19, \sigma_{G_3}(w_{x-1}) = 17$ , 且有

$$\sigma_{C_k^2}(w_i) = 18 (w_i \in V(C_k^2) \setminus \{w_{q-1}\}),$$

$$\min\{\sigma_{G_3}(w_x), \sigma_{G_3}(w_q), \sigma_{G_3}(w_{x+1})\} > \sigma_{G_3}(w_i) (w_i \in V(C_k^2) \setminus \{w_x, w_{x+1}\}),$$

$$\sigma_{G_3}(w_{x-1}) \neq \sigma_{G_3}(w_i) (w_i \in V(C_k^2) \setminus \{w_{x-1}\}),$$

$$\min\{\sigma_{G_3}(w_x), \sigma_{G_3}(w_q), \sigma_{G_3}(w_{q-1}), \sigma_{G_3}(w_{x+1}), \sigma_{G_3}(w_{x-1})\} > \sigma_{G_3}(u_i) (u_i \in V(P_m^2) \setminus \{w_q, w_{q-1}\}).$$

综上所述,结论成立.

### 参 考 文 献

[1] ZHANG Z F, LIU L Z, WANG J F. Adjacent strong edge coloring of graphs[J]. Applied Mathematics Letters, 2002, 15(5): 623-626.  
 [2] 安 卓 莫, 田 双 亮, 蔡 瑾. 路 的 强 积 的 邻 点 可 区 别 边 染 色 [J]. 西 北 民 族 大 学 学 报 (自 然 科 学 版), 2020, 41(4): 7-10.  
 AN Z M, TIAN S L, CAI J. Adjacent vertex distinguishing edge coloring of strong product of paths[J]. Journal of Northwest Minzu Uni-

- versity(Natural Science),2020,41(4):7-10.
- [3] BURRIS A C,SCHHELP R H.Vertex-distinguishing proper edge-colorings[J].Journal of Graph Theory,1997,26(2):73-82.
- [4] 张小秀.平面图邻点可区别边染色[D].金华:浙江师范大学,2020.  
ZHANG X X.Adjacent vertex distinguishing edge coloring of planar graphs[D].Jinhua:Zhejiang Normal University,2020.
- [5] 张小秀,黄丹君.围长至少为5的平面图的邻点可区别边染色[J].数学学报(中文版),2022,65(2):325-334.  
ZHANG X X,HUANG D J.Adjacent vertex distinguishing edge coloring of planar graphs with girth at least 5[J].Acta Mathematica Sinica(Chinese Series),2022,65(2):325-334.
- [6] WANG W F,WANG Y Q.Adjacent vertex-distinguishing edge colorings of  $K_4$ -minor free graphs[J].Applied Mathematics Letters,2011,24(12):2034-2037.
- [7] 严谦泰,张忠辅.一类正则二部图的邻强边染色[J].河南师范大学学报(自然科学版),2006,34(3):12-13.  
YAN Q T,ZHANG Z F.On the adjacent strong edge coloring of  $r$ -regular partite graph[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition),2006,34(3):12-13.
- [8] 王治文,文飞,杨随义,等.图  $K_{2n} | E(F_5)(n \geq 13)$  的点可区别边染色[J].河南师范大学学报(自然科学版),2010,38(6):1-3.  
WANG Z W,WEN F,YANG S Y,et al.Vertex-distinguishing edge coloring of  $K_{2n} | E(F_5)(n \geq 13)$ [J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition),2010,38(6):1-3.
- [9] FLANDRIN E,MARCZYK A,PRZYBYLO J,et al.Neighbor sum distinguishing index[J].Graphs and Combinatorics,2013,29(5):1329-1336.
- [10] 强会英,姚丽.无  $K_4$ -子式图的2-距离和可区别边染色[J].山东大学学报(理学版),2021,56(11):83-86.  
QIANG H Y,YAO L.2-distance sum distinguishing edge coloring of  $K_4$ -minor-free graphs[J].Journal of Shandong University(Natural Science),2021,56(11):83-86.
- [11] WEGNER G.Graphs with given diameter and coloring problem[R].Dortmund:University of Dortmund,1977.
- [12] 姚丽.几类图的2-距离和可区别边染色[D].兰州:兰州交通大学,2021.  
YAO L.2-distance sum distinguishing coloring of several kinds of graphs[D].Lanzhou:Lanzhou Jiaotong University,2021.
- [13] BONDY J A,MURTY U S R.Graph theory with applications[M].London:The Macmillan Press,1976.

## 2-Distance sum distinguishing edge colorings of square graphs

Wang Qin<sup>1</sup>, Yang Chao<sup>1</sup>, Yao Bing<sup>2</sup>

(1. School of Mathematics, Physics and Statistics, Center of Intelligent Computing and Applied Statistics, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201620, China; 2. College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

**Abstract:** This paper is to further study the problem of the 2-distance sum distinguishing edge coloring of graphs. By using the methods of combinatorial analysis, reduction to absurdity and categorical discussion, the 2-distance sum distinguishing edge chromatic numbers of five types of square graphs including paths, cycles,  $C_n \wedge P_m$ ,  $C_m \wedge C_n$  and  $C_n \wedge P_m \wedge C_k$  are determined, respectively. The above results implies that the 2-distance sum distinguishing edge chromatic numbers are no more than  $\Delta + 2$ .

**Keywords:** edge coloring; 2-distance sum distinguishing edge coloring; square graphs

[责任编辑 陈留院 赵晓华]