文章编号:1000-2367(2016)03-0001-06　　DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2016.03.001

Hom-Hopf 元(映射)与 Hom-Hopf (Pentagon)方程的解

焦争鸣，黄功宇

(河南师范大学 数学与信息科学学院，河南 新乡 453007)

摘　要:引进了 Hom-Hopf(Pentagon)方程以及 Hom-Hopf 元(映射)等概念,讨论了这两类方程的等价性.进而证明:一个 Hom-双代数(H,α)的 Hom-Hopf 元(或 Hom-Hopf 映射),可以用来构造任意左 H-Hom-模(或右 H-Hom-余模)(M,α_M)上 Hom-Hopf 方程的解.

关键词:Hom-双代数;Hom-Hopf 方程;Hom-Pentagon 方程;Hom-Hopf 元;Hom-Hopf 映射

中图分类号:O153.3　　**文献标志码**:A

Hopf 方程 $R^{12}R^{23}=R^{23}R^{13}R^{12}$ 和 Pentagon 方程 $R^{23}R^{12}=R^{12}R^{13}R^{23}$ 均为重要的非线性代数方程[1]，与量子 Yang-Baxter 方程有着密切联系，并在 Von Neumann 代数理论等方面也有着广泛应用，它们的提出要早于量子 Yang-Baxter 方程[2]. 长期以来，人们对它们的解的构作和结构性质进行了大量研究，得到许多研究成果，相关内容可参见文献[1-5].

近年来，作为通常代数的一种推广形式，Hom-代数的概念由 Makhlouf 和 Silvestrov 在研究拟李代数时引入[6-7]. 其代数结合性由 Hom-结合性所代替，即：$\alpha(a)(bc)=(ab)\alpha(c)$，其中 $\alpha:A\to A$ 为一个线性映射. 对偶地文献[7-8]引入了 Hom-余代数概念. 随之，人们对 Hom-型代数结构进行深入研究，Hopf 代数理论中的许多概念、结论得以在 Hom-型代数结构理论中实现[10-15]. 特别地，Yau 在文献[11-14]中对 Hom-型的量子 Yang-Baxter 方程和相关 Hom-代数结构进行研究，利用 Hom-双代数上的拟三角和余拟三角结构得到了 Hom-量子 Yang-Baxter 方程的解.

本文将主要对 Hom-型 Hopf 方程和 Pentagon 方程进行研究，首先给出 Hom-Hopf 方程和 Hom-Pentagon 方程以及 Hom-Hopf 元和 Hom-Hopf 映射等概念. 在此基础上，讨论 Hom-Hopf 方程和 Hom-Pentagon 方程的等价关系. 进而给出利用 Hom-Hopf 元和 Hom-Hopf 映射构造 Hom-Hopf-方程和 Hom-Pentagon 方程的解的方法. 本文结构如下：第一节简要介绍文中涉及到的基本概念和一些预备知识，引入 Hom-Hopf 方程和 Hom-Pentagon 方程以及 Hom-Hopf 元和 Hom-Hopf 映射等定义；第二节主要讨论 Hom-Hopf 元和 Hom-Hopf-方程的关系. 第三节讨论 Hom-Hopf 映射和 Hom-Hopf-方程的关系.

本文的所有工作都在一个固定的域 k 上进行，张量积和线性映射均指域 k 上的. 文中将沿用文献[16]中关于余代数余乘法的记法，对于余代数 C 和任意 $c\in C$，记 $\Delta(c)=\sum c_1\otimes c_2$(为简便,文中省略符号“$\sum$”).

1　预备知识

本节先回顾 Hom-型代数结构的相关定义与结论,详见文献[6-8].

定义 1　一个 Hom-代数是一个四元组(A,m,μ,α)，其中 A 是一个 k-向量空间，$\alpha:A\to A$，$m:A\otimes A\to A$，$\mu:k\to A$ 为线性映射. 使对所有 $a,b,c\in A$，满足下列条件

$$\alpha(a)(bc)=(ab)\alpha(c), \tag{1}$$

$$a\,1_A=1_{A}a=\alpha(a),\text{其中 } 1_A=\mu(1_k), \tag{2}$$

收稿日期:2015-08-04;**修回日期**:2016-04-10.

基金项目:河南省基础与前沿技术研究计划(132300410052);河南省教育厅基础研究项目(2009A110009).

第 1 作者简介(通信作者):焦争鸣(1956-),男,河南安阳人,河南师范大学教授,主要从事 Hopf 代数研究,E-mail:zmjiao@htu.cn.

$$\alpha(ab)=\alpha(a)\alpha(b),\alpha(1_A)=1_A. \tag{3}$$

设$(A,\ m_A,\mu_A,\alpha_A)$，$(B,\ m_B,\mu_B,\alpha_B)$为两个 Hom- 代数，一个线性映射 $f:A\to B$ 称为一个 Hom- 代数映射，如果 f 满足下列条件

$$\alpha_B\circ f=f\circ\alpha_A, \tag{4}$$

$$f(1_A)=1_B,f\circ\mu_A=\mu_B\circ(f\otimes f). \tag{5}$$

定义 2 一个 Hom- 余代数是一个四元组$(C,\Delta,\varepsilon,\beta)$，其中 C 是一个 k- 向量空间，$\beta:C\to C,\Delta:C\to C\otimes C,\varepsilon:C\to k$，为线性映射. 使对所有 $c\in C$，满足下列条件

$$\beta(c_1)\otimes c_{21}\otimes c_{22}=c_{11}\otimes c_{12}\otimes\beta(c_2), \tag{6}$$

$$\varepsilon(c_1)\ c_2=c_1\varepsilon(c_2)=\beta(c), \tag{7}$$

$$\Delta\circ\beta=(\beta\otimes\beta)\circ\Delta,\varepsilon\circ\beta=\varepsilon. \tag{8}$$

设$(C,\Delta_C,\varepsilon_C,\beta_C)$，$(D,\Delta_D,\varepsilon_D,\beta_D)$为两个 Hom- 余代数，一个线性映射 $g:C\to D$ 称为 Hom- 余代数映射，如果 g 满足下列条件

$$\beta_D\circ g=g\circ\beta_C, \tag{9}$$

$$\varepsilon_D\circ g=\varepsilon_C,\Delta_D\circ g=(g\otimes g)\circ\Delta_C. \tag{10}$$

定义 3 一个 Hom- 双代数是一个六元组$(H,m_H,1_H,\Delta_H,\varepsilon_H,\alpha)$，其中$(H,m_H,1_H,\alpha)$是一个 Hom- 代数，$(H,\Delta_H,\varepsilon_H,\alpha)$是一个 Hom- 余代数且使得线性映射 Δ_H,ε_H 是 Hom- 代数映射，即对 $\forall h,g\in H$ 满足

$$\Delta(hh')=\Delta(h)\Delta(h'),\Delta a(1_H)=1_H\otimes 1_H \tag{11}$$

$$\varepsilon(hh')=\varepsilon(h)\varepsilon(h'),\varepsilon(1_H)=1_H. \tag{12}$$

定义 4 设(A,α_A)是一个 Hom- 代数，一个左 A-Hom- 模是一个三元组(M,ω,α_M)，其中 M 是一个 k- 向量空间，α_M: $M\to M$ 和 $\omega:A\otimes M\to M,\omega(\alpha\otimes m)=a\cdot m$ 为线性映射，使对任意 $a,b\in A,m\in M$，下列条件成立.

$$\alpha_M(a\cdot m)=\alpha(a)\cdot\alpha_M(m), \tag{13}$$

$$(ab)\cdot\alpha_M(m)=\alpha_A(a)\cdot(b\cdot m),\ 1_A\cdot m=\alpha_M(m). \tag{14}$$

定义 5 设(C,α_C)是一个 Hom- 余代数，一个右 C-Hom- 余模是一个三元组(M,ρ,α_M)，其中 M 是一个 k- 向量空间，α_M: $M\to M$ 和 $\rho:M\to M\otimes C,\rho(m)=m_{<0>}\otimes m_{<1>}$ 为线性映射，使对任意 $m\in M$，下列条件成立.

$$\alpha_M(m)_{<0>}\otimes\alpha_M(m)_{<1>}=\alpha_M(m_{<0>})\otimes\alpha_C(m_{<1>}), \tag{15}$$

$$\alpha_M(m_{<0>})\otimes m_{<1>1}\otimes m_{<1>2}=m_{<0><0>}\otimes m_{<0><1>}\otimes\alpha_C(m_{<1>}), \tag{16}$$

$$m_{<0>}\varepsilon(m_{<1>})=\alpha_M(m). \tag{17}$$

现在给出 Hom-Hopf 方程和 Hom-Pentagon 方程的定义.

定义 6 设 M 为一个 k- 向量空间，$\alpha_M:M\to M$ 一个线性映射，$R\in End(M\otimes M)$ 满足$(\alpha_M\otimes\alpha_M)\circ R=R\circ(\alpha_M\otimes\alpha_M)$.

(1) R 称为(M,α_M)上 Hom-Hopf 方程的一个解，如果在 $End(M\otimes M\otimes M)$ 中，映射 R 满足

$$R^{23}\circ R^{13}\circ R^{12}=R^{12}\circ R^{23}; \tag{18}$$

(2) R 称为(M,α_M)Hom-Pentagon 方程的一个解，如果在 $End(M\otimes M\otimes M)$ 中，映射 R 满足

$$R^{12}\circ R^{13}\circ R^{23}=R^{23}\circ R^{12}, \tag{19}$$

这里 $R^{12}=R\otimes\alpha_M$，$R^{23}=\alpha_M\otimes R,R^{13}=(id\otimes\tau)(R\otimes\alpha_M)(id\otimes\tau)\in End(M\otimes M\otimes M)$.

命题 1 设(A,α_A)是一个 Hom- 代数，若 $R=R^1\otimes R^2\in A\otimes A$ 满足$(\alpha_A\otimes\alpha_A)(R)=R$，则有

$$(R^{12}R^{13})R^{23}=R^{12}(R^{13}R^{23}),(R^{23}R^{13})R^{12}=R^{23}(R^{13}R^{12}),$$

其中 $R^{12}=R^1\otimes R^2\otimes 1_A$，$R^{13}=R^1\otimes 1_A\otimes R^2$，$R^{23}=1_A\otimes R^1\otimes R^2\in A\otimes A\otimes A$.

证明 记 $r=r^1\otimes r^2=R=\bar{R}^1\otimes\bar{R}^2=\bar{R}$，于是有

$$\begin{aligned}(R^{12}R^{13})R^{23}=[(R^1\otimes R^2\otimes 1)(r^1\otimes 1\otimes r^2)](1\otimes\bar{R}^1\otimes\bar{R}^2)=\\(R^1r^1\otimes\alpha(R^2)\otimes\alpha(r^2))(1\otimes\bar{R}^1\otimes\bar{R}^2)=\alpha(R^1r^1)\otimes\\\alpha(R^2)\bar{R}^1\otimes\alpha(r^2)\bar{R}^2=R^1r^1\otimes R^2\bar{R}^1\otimes r^2\bar{R}^2,\end{aligned}$$

和

$$R^{12}(R^{13}R^{23}) = (R^1 \otimes R^2 \otimes 1)[(r^1 \otimes 1 \otimes r^2)(1 \otimes \bar{R}^1 \otimes \bar{R}^2)] = (R^1 \otimes R^2 \otimes 1)(\alpha(r^1) \otimes \alpha(\bar{R}^1) \otimes r^2\bar{R}^2) = R^1\alpha(r^1) \otimes R^2\alpha(\bar{R}^1) \otimes \alpha(r^2\bar{R}^2) = R^1r^1 \otimes R^2\bar{R}^1 \otimes r^2\bar{R}^2.$$

从而得第 1 个等式成立，类似可证第 2 个等式成立.

有了上边命题，对一个 Hom- 代数(A,α_A)，可以给出 $A \otimes A$ 中 Hom-Hopf 方程和 Hom-Pentagon 方程的定义.

定义 7　设(A,α_A)是一个 Hom- 代数，$R = R^1 \otimes R^2 \in A \otimes A$ 满足$(\alpha_A \otimes \alpha_A)(R) = R$.

(1) R 称为 Hom- 代数(A,α_A)中 Hom-Hopf 方程的一个解，如果在 $A \otimes A \otimes A$ 中，元 R 满足

$$(R^{23}R^{13})R^{12} = R^{12}R^{23}; \tag{20}$$

(2) R 称为 Hom- 代数(A,α_A)中 Hom-Pentagon 方程的一个解，如果在 $A \otimes A \otimes A$ 中，元 R 满足

$$R^{12}(R^{13}R^{23}) = R^{23}R^{12}, \tag{21}$$

其中 $R^{12} = R^1 \otimes R^2 \otimes 1_A, R^{13} = R^1 \otimes 1_A \otimes R^2,\ R^{23} = 1_A \otimes R^1 \otimes R^2 \in A \otimes A \otimes A$.

注记 1　(1) 如果 $\alpha_M^2 = \alpha_M$，则 $\alpha_M \otimes \alpha_M$ 是(M, α_M)上 Hom-Hopf 方程的一个解；

(2) 设 $f,g \in End(M)$ 满足 $f^2 = f, g^2 = g$ 和 $\alpha_M(fg) = gf$，则有 $R = f \otimes g$ 是(M,α_M)上 Hom-Hopf 方程的一个解.

下面命题将给出 Hom-Hopf 方程和 Hom-Pentagon 方程的关系.

命题 2　设 M 为一个 k- 向量空间，$\alpha_M \in End(M), R \in End(M \otimes M)$.

(1) R 是(M,α_M)上 Hom-Hopf 方程的一个解的充分必要条件是 $W = \tau R\tau$ 是(M, α_M)上 Hom-Pentagon 方程的一个解；

(2) 若线性映射 R 和 α_M 均为双射，则 R 是(M,α_M)上 Hom-Hopf 方程的一个解的充分必要条件是 R^{-1} 为(M, α_M)上 Hom-Pentagon 方程的一个解.

证明　(1) 对 $m,n \in M$，记 $R(m \otimes n) = m^R \otimes {}^R n$，则有 $W(m \otimes n) = \tau R\tau(m \otimes n) = {}^R m \otimes n^R$. 于是对任意 $m, n, l \in M$，有

$$W^{12}W^{13}W^{23}(m \otimes n \otimes l) = W^{12}W^{13}(\alpha_M(m) \otimes {}^R n \otimes l^R) = W^{12}({}^r(\alpha_M(m)) \otimes \alpha_M({}^R n) \otimes (l^R)^r) = {}^{\bar{R}}({}^r(\alpha_M(m))) \otimes (\alpha_M({}^R n))^{\bar{R}} \otimes \alpha_M((l^R)^r),$$

$$\tau^{13}R^{23}R^{13}R^{12}\tau^{13}(m \otimes n \otimes l) = \tau^{13}R^{23}R^{13}R^{12}(l \otimes n \otimes m) = \tau^{13}R^{23}R^{13}(l^R \otimes {}^R n \otimes \alpha_M(m)) = \tau^{13}R^{23}((l^R)^r \otimes \alpha_M({}^R n) \otimes {}^r(\alpha_M(m))) = \tau^{13}(\alpha_M((l^R)^r) \otimes (\alpha_M({}^R n))^{\bar{R}} \otimes {}^{\bar{R}}({}^r(\alpha_M(m)))) = {}^{\bar{R}}({}^r(\alpha_M(m))) \otimes (\alpha_M({}^R n))^{\bar{R}} \otimes \alpha_M((l^R)^r).$$

从而得

$$W^{12}W^{13}W^{23} = \tau^{13}R^{23}R^{13}R^{12}\tau^{13}.$$

类似可得

$$W^{23}W^{12} = \tau^{13}R^{12}R^{23}\tau^{13}.$$

由映射 τ 的可逆性，故得(1)成立.

(2) 直接验证可得.

此命题(1)说明，Hom-Hopf 方程和 Hom-Pentagon 方程是等价的. 从而，在讨论这两类方程解的问题时，只需研究 Hom-Hopf 方程即可.

2　Hom-Hopf 元与 Hom-Hopf 方程的解

本节将引入 Hom-Hopf 元的概念，然后讨论 Hom-Hopf 元与 Hom- 双代数的左 Hom- 模 (M, α_M) 上 Hom-Hopf 方程的解的关系.

定义 8　设(H,α)为 Hom- 双代数，A 为 H 的一个子 Hom- 代数. 如果中元 $R = R^1 \otimes R^2 \in A \otimes H$ 满足下面条件

$$\Delta(R^1) \otimes R^2 = R^{13}R^{23}, \tag{22}$$

$$\varepsilon(R^1)R^2 = 1_H, \tag{23}$$

$$\Delta^{cop}(a)R = R(1 \otimes a), \forall a \in A, \tag{24}$$

$$(\alpha \otimes \alpha)R = R, \tag{25}$$

则称 R 为一个 Hom-Hopf 元,也称(H, A,α,R) 是一个带有 Hom-Hopf 元的 Hom- 双代数.

命题 3 设(H,A,R) 是一个带有 Hom-Hopf 元的 Hom- 双代数,则在 $A \otimes H \otimes H$ 中有

$$(R^{23}R^{13})R^{12} = R^{23}(R^{13}R^{12}) = R^{12}R^{23}. \tag{26}$$

特别地,若作为 Hom- 代数 $H = A$, 则 Hom-Hopf 元 R 即为 Hom- 代数(H,α_H) 中 Hom-Hopf 方程的一个解.

证明 类似命题 1 的证明,易证$(R^{23}R^{13})R^{12} = R^{23}(R^{13}R^{12})$. 下证等式(26) 的第 2 部分成立. 设 $R = R^1 \otimes R^2 \in A \otimes H$ 为一个 Hom-Hopf 元,由(22),有

$$\Delta^{cop}(R^1) \otimes R^2 = R^{23}R^{13}.$$

记 $r = r^1 \otimes r^2 = R^1 \otimes R^2 = R$,有

$$R^{12}R^{23} = (R^1 \otimes R^2 \otimes 1)(1 \otimes r^1 \otimes r^2) = R(1 \otimes r^1) \otimes \alpha(r^2) = \Delta^{cop}(r^1)R \otimes \alpha(r^2) = (\Delta^{cop}(r^1) \otimes r^2)(R \otimes 1) = (R^{23}R^{13})R^{12}.$$

综上可得该命题成立.

定理 2 (H,A,α_H,R) 是一个带 Hom-Hopf 元的 Hom- 双代数,(M,ω,α_M) 是左 H-Hom- 模且 α_M 幂等. 则映射

$$\mathcal{R}: M \otimes M \to M \otimes M, \mathcal{R}(m \otimes n) = R^1 \cdot m \otimes R^2 \cdot n$$

为(M,α_M) 上 Hom-Hopf 方程的一个解.

证明 由于$(\alpha_H \otimes \alpha_H)(R) = R$ 和 $\alpha_M(h \cdot m) = \alpha_H(h) \cdot \alpha_M(m)$, 易证$(\alpha_M \otimes \alpha_M) \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ (\alpha_M \otimes \alpha_M)$. 下面只需验证在 $End(M \otimes M \otimes M)$ 中, $\mathcal{R}$ 满足(18) 即可. 事实上,对任意 $m,n,l \in M$,有

$$\mathcal{R}^{23}\mathcal{R}^{13}\mathcal{R}^{12}(m \otimes n \otimes l) = \mathcal{R}^{23}\mathcal{R}^{13}(R^1 \cdot m \otimes R^2 \cdot n \otimes \alpha_M(l)) = \mathcal{R}^{23}(r^1 \cdot (R^1 \cdot m) \otimes \alpha_M(R^2 \cdot n) \otimes r^2 \cdot \alpha_M(l)) = \alpha_M(r^1 \cdot (R^1 \cdot m)) \otimes \tilde{R}^1 \cdot (\alpha_M(R^2 \cdot n)) \otimes \tilde{R}^2 \cdot (r^2 \cdot \alpha_M(l) = \alpha_H(r^1) \cdot (\alpha_H(R^1) \cdot \alpha_M(m)) \otimes \alpha_H(\tilde{R}^1) \cdot (\alpha_H(R^2) \cdot \alpha_M(n)) \otimes \alpha_H(\tilde{R}^2) \cdot (r^2 \cdot \alpha_M(l) = r^1R^1 \cdot \alpha_M^2(m)) \otimes \tilde{R}^1R^2 \cdot \alpha_M^2(n) \otimes \tilde{R}^2r^2 \cdot \alpha_M^2(l) = \alpha_H(r^1)R^1 \cdot {\alpha_M}^2(m) \otimes \alpha_H(\tilde{R}^1)R^2 \cdot \alpha_M^2(n) \otimes \alpha_M(\tilde{R}^2r^2) \cdot \alpha_M^2(l) = R^{23}R^{13}R^{12} \cdot (\alpha_M^2(m) \otimes \alpha_M^2(n) \otimes \alpha_M^2(l)).$$

类似的可以证明

$$\mathcal{R}^{12}\mathcal{R}^{23}(m \otimes n \otimes l) = R^{12}R^{23} \cdot (\alpha(m) \otimes \alpha(n) \otimes \alpha(l)).$$

由命题 3 中(26) 式和 α_M 的幂等性,可得 $\mathcal{R}^{23}\mathcal{R}^{13}\mathcal{R}^{12} = \mathcal{R}^{12}\mathcal{R}^{23}$. 从而定理得证.

3 Hom-Hopf 映射与 Hom-Hopf 方程的解

本节将给出上节的对偶结果. 作为 Hom-Hopf 元的对偶,引入 Hom-Hopf 映射的概念,然后讨论 Hom-Hopf 映射和 Hom- 双代数的右余模(M, α_M) 上 Hom-Hopf 方程的解的关系.

定义 8 设(H,α) 为 Hom- 双代数,A 为 H 的一个子 Hom- 余代数. 如果线性映射 $\sigma: C \to H \to k$,对于任意 $c \in C,h,k \in H$ 满足下面条件

$$\sigma(c_1 \otimes h_1)h_2c_2 = \sigma(c_2 \otimes \alpha(h))c_1, \tag{27}$$

$$\sigma(c \otimes 1_H) = \varepsilon(c), \tag{28}$$

$$\sigma(c \otimes hk) = \sigma(c_1 \otimes \alpha(h))\sigma(c_2 \otimes \alpha(k)), \tag{29}$$

$$\sigma(\alpha \otimes \alpha) = \sigma. \tag{30}$$

则称线性映射 σ 为一个 Hom-Hopf 映射,也称(H,C,α,σ) 是一个带有 Hom-Hopf 映射的 Hom- 双代数.

设(H,α) 是一个 Hom- 余代数, C是H 的一个子 Hom- 余代数,$\sigma: C \otimes H \to k$ 为一个线性映射. 定义σ^{12}, σ^{13},σ^{23} 为

$\sigma^{12}(c\otimes d\otimes x)=\varepsilon(x)\sigma(c\otimes d)$，$\sigma^{13}(c\otimes d\otimes x)=\varepsilon(d)\sigma(c\otimes x)$，$\sigma^{13}(c\otimes d\otimes x)=\varepsilon(c)\delta(d\otimes x)$. 这里 $c,d\in C,x\in H$.

对偶于定理 1，有下面命题.

命题 4　设(H,C,α,σ)是带有 Hom-Hopf 映射 $\sigma:C\otimes H\to k$ 的 Hom- 双代数，则在 $\mathrm{Hom}(C\otimes C\otimes H,k)$ 中，有

$$(\sigma^{23}*\sigma^{13})*\sigma^{12}=\sigma^{23}*(\sigma^{13}*\sigma^{12})=\sigma^{12}*\sigma^{23}. \tag{31}$$

特别地，若作为 Hom- 余代数 $H=C$，则 Hom-Hopf 映射 σ 即为 Hom- 余代数(H,α_H)的卷积代数中 Hom-Hopf 方程的一个解.

证明　利用 H 的 Hom- 余结合性以及(30)，易证$(\sigma^{23}*\sigma^{13})*\sigma^{12}=\sigma^{23}*(\sigma^{13}*\sigma^{12})$. 下证等式(31)的第 2 部分成立. 对任意 $c,d\in C$ 和 $x\in H$，有

$$(\sigma^{12}*\sigma^{23})(c\otimes d\otimes x)=\varepsilon(x_1)\sigma(c_1\otimes d_1)\varepsilon(c_2)\sigma(d_2\otimes x_2)=\sigma(\alpha(c)\otimes d_1)\sigma(d_2\otimes\alpha(x)).$$

$$\begin{aligned}(\sigma^{23}*(\sigma^{13}*\sigma^{12}))(c\otimes d\otimes x)&=\varepsilon(c_1)\sigma(d_1\otimes x_1)\varepsilon(d_{21})\sigma(c_{21}\otimes x_{21})\varepsilon(x_{22})\sigma(c_{22}\otimes d_{22})=\\ \sigma(d_1\otimes x_1)\sigma(\alpha(c_1)\otimes\alpha(x_2))\sigma(\alpha(c_2)\otimes\alpha(d_2))&=\sigma(d_1\otimes x_1)\sigma(\alpha(c)\otimes x_2d_2)=\sigma(\alpha(c)\otimes\\ \sigma(d_1\otimes x_1)x_2d_2)&=\sigma(\alpha(c)\otimes\sigma(d_2\otimes\alpha(x))d_1)=\sigma(\alpha(c)\otimes d_1)\sigma(d_2\otimes\alpha(x)).\end{aligned}$$

从而命题得证.

定理 3　设(H,C,α_H,σ)是带有 Hom-Hopf 映射的 Hom- 双代数，(M,ρ,α_M)为右 H-Hom- 余模且 α_M 幂等. 则线性映射

$R:M\otimes M\to M\otimes M,R(m\otimes n)=\sigma(m_{<1>}\otimes n_{<1>})(m_{<0>}\otimes n_{<0>})$，$m,n\in M$ 为(M,α_M)上 Hom-Hopf 方程的一个解.

证明　设 $\sigma:C\otimes H\to k$ 为一个 Hopf- 映射. 由于 $\sigma\circ(\alpha_M\otimes\alpha_M)=\sigma$ 和 $\alpha_M(m)_{<0>}\otimes\alpha_M(m)_{<1>}=\alpha_M(m_{<0>})\otimes\alpha_H(m_{<1>})$，易证$(\alpha_M\otimes\alpha_M)\circ R=R\circ(\alpha_M\otimes\alpha_M)$. 下面只需验证在 $End(M\otimes M\otimes M)$ 中，R 满足(18)即可. 对所有 $m,n,\in M$，计算如下.

$$\begin{aligned}R^{12}R^{23}(m\otimes n\otimes l)&=R^{12}(\sigma(n_{<1>}\otimes l_{<1>})(\alpha_M(m)\otimes n_{<0>}\otimes l_{<0>})=\sigma(\alpha_H(m_{<1>})\otimes\\ &n_{<0><1>})\sigma(n_{<1>}\otimes l_{<1>})(\alpha_M(m_{<0>})\otimes n_{<0><0>}\otimes\alpha\alpha_M(l_{<0>}))=\sigma(\alpha_H(m_{<1>})\otimes\\ &n_{<0><1>})\sigma(\alpha_H(n_{<1>})\otimes\alpha_H(l_{<1>}))(\alpha_M(m_{<0>})\otimes n_{<0><0>}\otimes\alpha_M(l_{<0>})=\\ &\sigma(\alpha_H(m_{<1>})\otimes n_{<1>1})\sigma(n_{<1>2}\otimes\alpha_H(l_{<1>}))(\alpha_M(m_{<0>})\otimes\alpha_M(n_{<0>})\otimes\\ &\alpha_M(l_{<0>}))=(\sigma^{12}*\sigma^{23})(m_{<1>}\otimes n_{<1>}\otimes l_{<1>})(\alpha_M(m_{<0>})\otimes\\ &\alpha_M(n_{<0>})\otimes\alpha_M(l_{<0>})),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R^{23}R^{13}R^{12}(m\otimes n\otimes l)&=R^{23}R^{13}(\sigma(m_{<1>}\otimes n_{<1>})m_{<0>}\otimes n_{<0>}\otimes\alpha_M(l))=\\ &R^{23}(\sigma(m_{<0><1>}\otimes\alpha_H(l_{<1>}))\sigma(m_{<1>}\otimes n_{<1>})(m_{<0><0>}\otimes\alpha_M(n_{<0>})\otimes\\ &\alpha_M(l_{<0>})))=\sigma(\alpha_H(n_{<0><1>})\otimes\alpha_H(l_{<0><1>}))\sigma(m_{<0><1>}\otimes\alpha_H(l_{<1>}))\cdot\\ &\sigma(m_{<1>}\otimes n_{<1>})\alpha_M(m_{<0><0>})\otimes\alpha_M(n_{<0><0>})\otimes\alpha_M(l_{<0>})))=\\ &\sigma(\alpha_H(n_{<0><1>})\otimes\alpha_H(l_{<0><1>}))\sigma(m_{<0><1>}\otimes\alpha_H(l_{<1>}))\sigma(\alpha_H(m_{<1>})\otimes\\ &\alpha_H(n_{<1>}))(\alpha_M(m_{<0><0>})\otimes\alpha_M(n_{<0><0>})\otimes\alpha_M(l_{<0>})))=\sigma(\alpha_H(n_{<1>1})\otimes\\ &\alpha_H(l_{<1>1}))\sigma(m_{<1>1}\otimes l_{<1>2})\sigma(m_{<1>2}\otimes n_{<1>2})(\otimes_M^2(m_{<0><0>})\otimes\\ &\alpha_M^2(n_{<0><0>})\otimes\alpha_M^2(l_{<0>})))=\sigma(n_{<1>1}\otimes l_{<1>1})\sigma(\alpha_H(m_{<1>1})\otimes\\ &\alpha_H(l_{<1>2}))\sigma(\alpha_H(m_{<1>2})\otimes\alpha_H(n_{<1>2}))(\alpha_M^2(m_{<0><0>})\otimes\\ &\alpha_M^2(n_{<0><0>})\otimes\alpha_M^2(l_{<0>})))=(\sigma^{23}*(\sigma^{13}*\sigma^{12}))(m_{<1>}\otimes\\ &n_{<1>}\otimes l_{<1>})(\alpha_M^2(m_{<0><0>})\otimes\alpha_M^2(n_{<0><0>})\otimes\alpha_M^2(l_{<0>}))).\end{aligned}$$

再由命题 4 中(31)式和 α_M 的幂等性，便有 $R^{23}R^{13}R^{12}=R^{12}R^{23}$. 从而定理得证.

参 考 文 献

[1]　Caenepeel S, Militaru G, Zhu S. Frobenius and Separable Functors for Generalized Module Categories and Nonlinear Equations[M]. Brelin: Springer Verlag, 2002.

[2] Mac Lane S. Natural associativity and commutativity[J]. Rice Univ Studies,1963,49:4-28.

[3] Takesaki M. Duality and von Neumann algebra[M]. Berlin:Springer Verlag,1972.

[4] van Daele A, van Keer S. The Yang-Baxter and pentagon equation[J]. Compositio Math,1994,91:201-221.

[5] Davydov A. Pentagon equation and matrix bialgebras[J]. Comm Algebra,2001,29:2627-2650.

[6] Makhlouf A, Silvestrov S. Hom-algebras structures[J]. J Gen Lie Theory Appl,2008,2:51-64.

[7] Makhlouf A, Silvestrov S. Hom-algebras and Hom-coalgebras[J]. J Algebra Appl,2010,9(04):553-589.

[8] Makhlouf A, Silvestrov S. Hom-Lie admissible Hom-coalgebras and Hom-Hopf algebras[M]. Berlin:Springer Verlag, 2009.

[9] Makhlouf A, Panaite F. Yetter-Drinfeld modules for Hom-bialgebras[J]. J Math Phys,2014,55:013501.

[10] Yau D. Hom-bialgebras and comodule Hom-algebras[J]. Int Electron J Algebra,2010,8:45-64.

[11] Yau D. Hom-Yang-Baxter equation, Hom-Lie algebras and quasitriangular bialgebras[J]. J Phys A: Math Theor,2009,42:165202.

[12] Yau D. The Hom-Yang-Baxter equation and Hom-Lie algebras[J]. J Math Phys,2011,52:053502.

[13] Yau D. Hom-quantum groups I: Quasi-triangular Hom-bialgebras[J]. J Phys A: Math Theor,2012,45(6):065203.

[14] Yau D. Hom-quantum groups II: Cobraided Hom-bialgebras and Hom-quantum geometry[J]. preprint,2009,907:1890.

[15] 焦争鸣,郭 敏,夏正亮. Hom-T-smash 积 Hom-Hopf 代数上的拟三角结构[J]. 河南师范大学学报(自然科学版),2015,43(1):1-7.

[16] Sweedler M E. Hopf Algebras[M]. New York: Benjamin,1969.

Hom-Hopf Elements (Maps) and the Solutions of Hom-Hopf (Pentagon) Equations

JIAO Zhengming, HUANG Gongyu

(College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

Abstract: In this paper, the definitions of Hom-Hopf equation, Hom-Pentagon equation, Hom-Hopf element and Hom-Hopf map are introduced. The equivalence of Hom-Hopf equation and Hom Pentagon equation is discussed. Further, it is shown that the Hom-Hopf elements (Hom-Hopf maps) of a Hom-bialgebra (H,α) can be used to construct the solutions of Hom-Hopf equation over (M,α_M) which is left H-Hom module (right H-Hom-comodule).

Keywords: Hom-bialgebra; Hom-Hopf equation; Hom-Pentagon equation; Hom-Hopf element; Hom-Hopf map