

## 专栏:耦合系统同步动力学

# 周期 1 与准周期访问映射下的层流混沌及其耦合同步

朱云,王旭林,邱国强

(江西理工大学 理学院,江西 赣州 341000)

**摘要:**使用周期 1 与准周期两种周期的访问映射,在一个新系统中观察层流混沌.对 2 种不同周期的访问映射产生的层流混沌系统,采用延迟调制进行耦合,观察它们的同步行为.发现周期 1 访问映射下,改变影响访问映射的参数,能观察到相应的广义超前预期同步,广义滞后同步和完全同步分别出现.而对于准周期访问映射,在某些时候,广义滞后同步和超前预期同步同时存在.

**关键词:**层流混沌;访问映射;广义超前预期同步;广义滞后同步;完全同步

**中图分类号:** O415

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1000-2367(2024)05-0051-08

混沌同步是一种特殊且有价值的非线性现象,如今已经成为跨学科研究课题,人们对其理论方面非常感兴趣,同时,它在图像处理、生物学、神经医学等各个学科都具有较高的潜在价值.在混沌方面如通过 Logistic 混沌映射改善蜻蜓算法的初始种群<sup>[1]</sup>;研究不同截止频率的低通滤波器对时延耦合周期和混沌振子的振幅死亡的影响等<sup>[2]</sup>;而在同步方面,如同步时间可调的分数阶混沌系统的图像加密和解密方法<sup>[3]</sup>,自感电流通过邻近磁通量引起的感应电流耦合的细胞同步<sup>[4]</sup>.时间延迟在控制系统<sup>[5]</sup>、神经网络<sup>[6]</sup>等方面很常见,具有时间延迟的系统,即时滞系统,拥有各种有趣的动力学行为.在混沌同步领域中,人们不仅对耦合混沌振子的动力学行为<sup>[7]</sup>进行了研究,也对时滞系统的混沌同步感兴趣,如 2 个耦合自持续混沌振子系统中的同步跃迁<sup>[8]</sup>;3 个双向耦合超混沌系统的同步问题<sup>[9]</sup>;具有 2 种不同时滞的单向耦合非线性时滞系统中的振荡同步<sup>[10]</sup>;逆预期混沌同步<sup>[11]</sup>等方面进行了详细的研究.

在时变时滞系统<sup>[12]</sup>中,MÜLLER 等<sup>[13]</sup>发现了一种新的混沌并将其命名为层流混沌,其表现出一种以层流相为特征的混沌行为,层流相被不规则的爆发,周期性地打断.HART 等研究具有时变延迟的光电反馈回路,首次对层流混沌进行了实验观察,证明了层流混沌是一种鲁棒现象<sup>[14]</sup>.文献<sup>[15]</sup>首次在由外部谐波信号调制延迟时间的无线电工程延迟反馈发生器中实验研究了层流混沌现象.至此,层流混沌在理论和实验方面都进行了初步的研究.MÜLLER 团队还进一步进行了相关的理论研究<sup>[16-19]</sup>.

于是层流混沌同步的研究便很有必要了,虽然已经有对层流混沌同步的研究<sup>[20]</sup>,但都是在访问映射周期为 1 的情况下,产生的层流混沌的同步.为此,本文研究合适的时变时滞系统,根据文献<sup>[17-19]</sup>找到产生层流混沌的合适参数,基于周期 1 访问映射、准周期访问映射 2 种访问映射进行了耦合.

**收稿日期:** 2024-01-09; **修回日期:** 2024-03-06.

**基金项目:** 国家自然科学基金(11405075).

**作者简介(通信作者):** 朱云(1984—),男,江西赣州人,江西理工大学副教授,博士,研究方向为非线性系统, E-mail: zhuyun\_84@126.com.

**引用本文:** 朱云,王旭林,邱国强.周期 1 与准周期访问映射下的层流混沌及其耦合同步[J].河南师范大学学报(自然科学版),2024,52(5):51-58.(Zhu Yun,Wang Xulin,Qiu Guoqiang.Coupled synchronization of laminar chaos under period 1 and quasi-periodic access map[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition),2024,52(5):51-58.DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2024.01.09.0001.)

# 1 层流混沌耦合系统的定义

考虑以下形式的标量时变时滞微分方程

$$\alpha \dot{x}(t) + x(t) = \mu f(x(R(t))),$$

其中  $\alpha = 1/T$ ,  $f$  是非线性函数,  $\mu$  是非线性函数的强度,  $R(t) = t - \tau(t)$  即访问映射,  $\tau(t)$  是与时间相关的延迟量. 使用一种从混沌神经元的研究中推导出的模型作为  $f$ , 其在遗传算法和模拟退火算法等<sup>[21-22]</sup> 方面中都有着重要的应用, 表达式为  $f(x) = \eta - 2 \tanh(\gamma) \exp(-3x^2)$ , 其中  $\eta$  表示衰减系数 ( $0 \leq \eta \leq 1$ ), 同时也是分岔参数,  $\gamma$  是比例因子, 本文中比例因子固定为 5. 使用不同周期的访问映射

$$\tau_p(t) = \tau_{p0} + \frac{1}{2\pi} A_p \sin(2\pi t)(1 - k_p \sin(2\pi t)), \tau_q(t) = \tau_{q0} + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} A_q \sin(2\sqrt{2}\pi t)(1 - k_q \sin(2\sqrt{3}\pi t)),$$

其表达式包含时变延迟. 为了区别这 2 种不同周期(周期 1, 准周期)的时变延迟, 用下标  $p$  表示周期 1, 下标  $q$  表示准周期, 如周期 1 的时变延迟  $\tau_p(t)$  与准周期的时变延迟  $\tau_q(t)$ . 延迟偏置  $\tau_0$  同理.

根据文献[18-19]提出的耗散延迟的概念对层流混沌进行表征, 当访问映射的时变延迟  $\tau(t)$  为耗散延迟时, 此时的系统, 在条件  $\lambda[F] + [R] < 0$  下(其中  $\lambda[F]$ ,  $\lambda[R]$  分别表示非线性函数和访问映射的李雅普诺夫指数) 出现层流混沌. 据此得到产生层流混沌相应的参数值, 即周期 1 访问映射下的相应参数  $\tau_{p0} = 1.65$ ,  $A_p = 0.8$ ,  $k_p = 1.8$ , 准周期访问映射下的相应参数  $\tau_{q0} = 1.4$ ,  $A_q = 0.8$ ,  $k_q = 1.8$ , 根据此参数得到图 1.

图 1 有明显的层流混沌特征, 即一个个相等的平台(层流相), 平台与平台之间, 是不规则的爆发. 图 1(a) 为周期 1 访问映射  $R_p(t)$

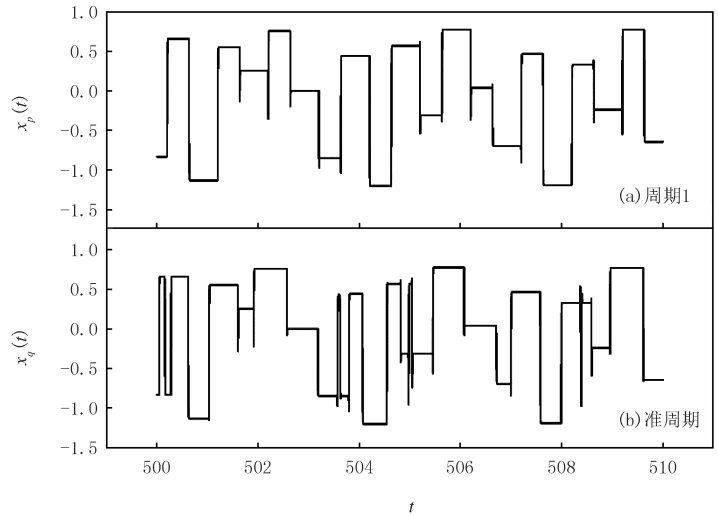


图1 不同周期访问映射下层流混沌轨迹图( $T=400$ )

Fig.1 The trajectories of laminar chaos with different cycles of access map

下, 系统  $x_p(t)$  产生的层流混沌轨迹图, 参数  $\tau_{p0}$ ,  $A_p$ ,  $k_p$  分别为 1.65, 0.8, 1.8; 图 1(b) 则是在准周期访问映射  $R_q(t)$  下, 系统  $x_q(t)$  产生的层流混沌轨迹图, 参数  $\tau_{q0}$ ,  $A_q$ ,  $k_q$  分别为 1.4, 0.8, 1.8.

考虑通过非线性时变延迟耦合<sup>[20]</sup>. 在此基础上增加了耦合项  $\omega_r f(x_b(R_2(t)))$ , 得到  $\alpha \dot{x}_a(t) = -\beta x_a(t) + \mu_1 f(x_a(R_1(t))) + \omega_r f(x_b(R_2(t)))$ ,  $\alpha \dot{x}_b(t) = -\beta x_b(t) + \mu_2 f(x_b(R_1(t))) + \omega_s f(x_a(R_2(t)))$ . 其中,  $\alpha = 1/T$  是理想低通滤波系统  $\frac{1}{T} \dot{z}(t) = -z(t) + f(z(R(t)))$  的截止频率, 要产生层流混沌需要较大的  $T$ ,  $x_a(t)$

和  $x_b(t)$  是 2 个具有不同调制的双项耦合驱动和响应系统,  $\beta$ ,  $\mu_1$  和  $\mu_2$  为常系数且  $\beta$  大于 0,  $\omega_r$ ,  $\omega_s$  是耦合系数,  $R_1(t)$  为访问映射,  $R_2(t)$  为耦合时间调制. 对于公式(3) 所示的耦合系统, 在文献[20, 23] 中, 针对固定延迟和时变延迟, 在  $\omega_r = 0$  的情形都进行了详细的推导. 本文的 2 个耦合系数均不为 0, 分别采用周期 1 和准

周期的访问映射  $R_{p1}(t) = t - \tau_{p01} - \frac{1}{2\pi} A_{p1} \sin(2\pi t)(1 - k_{p1} \sin(2\pi t))$ ,  $R_{q1(t)} = t - \tau_{q01} - \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} A_{q1} \sin(2\sqrt{2}\pi t)(1 - k_{q1} \sin(2\sqrt{3}\pi t))$ , 以及相应的耦合时间调制  $R_{p2}(t) = t - \tau_{p02} - \frac{1}{2\pi} A_{p2} \sin(2\pi t)(1 - k_{p2} \sin(2\pi t))$ ,  $R_{q2(t)} = t - \tau_{q02} - \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} A_{q2} \sin(2\sqrt{2}\pi t)(1 - k_{q2} \sin(2\sqrt{3}\pi t))$ .

由于  $A_1, A_2, k_1, k_2$  同时控制时间调制  $\tau_1(t), \tau_2(t)$  的幅值, 因此只考虑  $\tau_0, A, k$  的不同, 不再考虑频率,

其余参数均保持相同.本文中当  $\omega_r$  不为 0 时,系统同步的一个前提条件为  $\mu_1 + \omega_r = \mu_2 + \omega_s$ , 渐近稳定的充分条件可遵循 Krasovskii-Lyapunov 泛函方法<sup>[24]</sup>得到.

## 2 同步的结果

系统同步的一个前提条件为  $\mu_1 + \omega_r = \mu_2 + \omega_s$ ,通过数值仿真,使用龙格库塔方法,步长设置为 0.001.当不满足系统同步前提条件时,观察到 2 系统轨迹图明显不同步(见图 2).

图 2(a)为周期 1 访问映射,耦合层流混沌系统的轨迹图;图 2(b)则是准周期访问映射,耦合层流混沌的轨迹图.在图 2(a-b)中,横坐标时间  $t$  的范围是相同的,均在 800~810 的区间.在同步前提条件不同的时候(满足不同步前提条件,所使用的参数如下: $\mu_{p1} = \mu_{q1} = 0.8, \omega_{pr} = \omega_{qr} = 0.2, \mu_{p2} = \mu_{q2} = 0.6, \omega_{ps} = \omega_{qs} = 0.2$ ),其余的参数在 2 个系统中均保持一致,即  $\eta = 0.8, \tau_{p01} = \tau_{p02} = 1.65, \tau_{q01} = \tau_{q02} = 1.4, A_1 = A_2 = 0.8, k_1 = k_2 = 1.8$ .

对于周期 1 访问映射,参数  $\mu_{p1} = 0.8, \omega_{pr} = 0.2, \mu_{p2} = 0.6, \omega_{ps} = 0.2$  满足不同步前提条件,此时耦合系统的轨迹图如图 2(a), 2 个系统的轨迹(黑色实线和红色虚线),其层流相具有很大的差异.在其他参数保持相同的情况下,当不满足系统前提条件时,系统依旧不同步.对于准周期访问映射,参数  $\mu_{q1} = 0.8, \omega_{qr} = 0.2, \mu_{q2} = 0.6, \omega_{qs} = 0.2$ ,此时耦合系统的轨迹图如图 2(b) 所示,与周期 1 访问映射的结果一致,即使在其他参数保持相同的情况下,系统依旧不同步.

相反的,在 2 种周期的访问映射下,满足同步条件如参数  $\mu_{p1} = \mu_{q1} = 0.7, \omega_{pr} = \omega_{qr} = 0.2, \mu_{p2} = \mu_{q2} = 0.5, \omega_{ps} = \omega_{qs} = 0.4$  的时候,耦合系统才会发生同步现象(见图 3).

对于周期 1 访问映射下的层流混沌耦合系统,当 3 个参数保持一致时(参数具体值详见附录表 S1),此时如图 3(a)所示,耦合系统的轨迹重合;对轨迹进行局部放大(图 3(b)),轨迹仍然重合,相图(图 3(b))为直线.2 个系统在此时的轨迹差,经过一段时间后,趋于零,此时系统发生完全同步现象(complete synchronization, CS).在得到完全同步的现象之后,改变  $A_{p2}$ ,使得  $A_{p2} < A_{p1}$ .通过局部放大图(图 3(f))发现,系统  $x_{pb}(t)$  的轨迹,在层流相的时候,与  $x_{pa}(t)$  完全相等.在层流相与层流相变换之间,  $x_{pb}(t)$  的轨迹滞后于  $x_{pa}(t)$ ,此时的相图(图 3(g))与完全同步时候的相图有较大差别,相图不再是直线.对于耦合系统轨迹差随时间的变化,呈现出在零附近不断震荡的现象.在图 3(e-h),系统发生广义滞后同步(generalized lag synchronization, GLS),从轨迹差(图 3(h))能表明这是一种震荡同步.相应的,改变  $A_{p2}$ ,使得  $A_{p2} > A_{p1}$ ,系统  $x_{pb}(t)$  的轨迹同样在层流相切换之时,超前于  $x_{pa}(t)$  的轨迹(见图 3(j)).相图(图 3(k))类似于发生 GLS 时的相图.同样的,耦合系统轨迹差随时间的变化,也在零附近不断震荡.此时,系统发生超前预期同步(generalized anticipatory synchronization, GAS),GAS 同样是一种震荡同步(见图 3(l)).

在周期 1 的访问映射情况下,通过改变  $\tau_{p02}, A_{p02}, k_{p02}$  之一,使得  $\tau_{p02}, A_{p02}, k_{p02}$  大于或者小于完全同步时候的  $\tau_{p01}, A_{p01}, k_{p01}$ ,能观察到相应的 GLS, GAS 和 CS 同步,可以明显通过轨迹的局部放大图区分这 3 种同步,局部放大图显示在图 3(b), (f), (j).达到 CS(完全同步)的参数称为同步值.此时的轨迹为完全同步轨迹.完全同步的时候,轨迹图(图 3(a-b))是完全重合的,相图为直线,系统轨迹的差值随时间流逝(迭代次数增加)而趋于零.特别的,发生 GLS(图 3(e-h))和 GAS(图 3(i-l))现象相应的参数,分别为附录表 S1 第 4 行和第 5 行各类参数值.

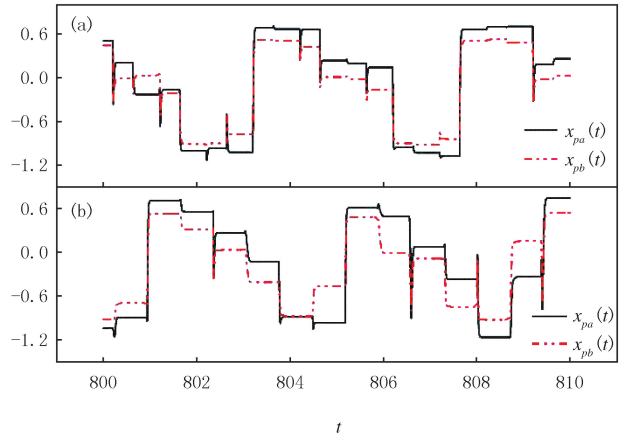


图2 满足不同步条件  $\mu_1 + \omega_r \neq \mu_2 + \omega_s$  的双系统函数轨迹图  
Fig.2 Trajectories of functions of the dual system satisfying the desynchronization condition  $\mu_1 + \omega_r \neq \mu_2 + \omega_s$

在满足同步前提条件下,对于周期 1 访问映射,  $\tau_0, k, A$  的改变,会使系统在 CS, GLS, GAS 切换.对于准周期访问映射,同样将相关的参数按照附录表 S1 的形式,记录在附录表 S2 中.每次单独改变的参数加粗表示,将观察得到的同步结果记录其中.当访问映射的周期为准周期时,  $\tau_{q02} > \tau_{q01}$ , 发生 GLS, 反之,则发生 GAS; 而对于参数  $k$  (或者  $A$ ), 无论是  $k_{q2} > k_{q1} (A_{q2} > A_{q1})$  还是  $k_{q2} < k_{q1} (A_{q2} < A_{q1})$ , GAS 和 GLS 同步都会同时出现(见图 4).这与周期 1 访问映射下层流混沌同步现象有区别,周期 1 访问映射情况下,对于  $k, A$  的改变, GLS, GAS 同步都不会同时出现.

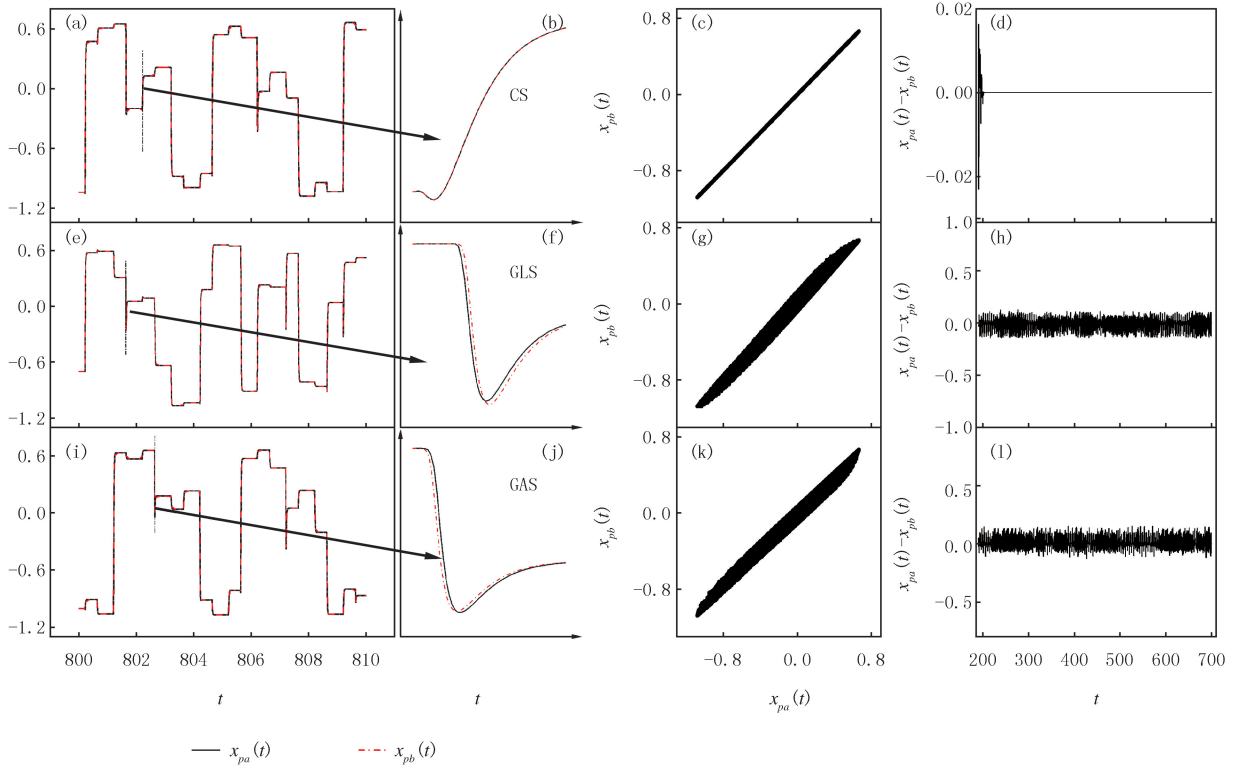


图3 访问映射 $R_p(t)$ 情况下,耦合系统产生的层流混沌的轨迹图、相图、差值图

Fig.3 The trajectory maps, phase diagrams, and the difference between two trajectories for the laminar chaos coupled dual system in the case where the access map is  $R_p(t)$

对于准周期访问映射下,使用附录表 S2 中第 5 行所示的参数,耦合层流混沌系统特殊同步情况,显示在图 4(a-d)中.通过轨迹图和部分放大图(图 4(a-b)),在  $A_{q2} > A_{q1}$  的时候,  $x_{qb}(t)$  的轨迹在层流相跳变期间,一会儿滞后于  $x_{qa}(t)$ ,一会儿又超前于  $x_{qa}(t)$ ,此时 GAS 和 GLS 同步同时出现.此时的相图(图 4(d)),分布在斜率为 1 的直线附近,轨迹差图(图 4(c))呈现出震荡的形态,这是因为耦合系统的 2 个轨迹,在层流相的时候,是完全相等的,在层流相变换之间,出现超前滞后 2 种情况.

除此之外还将不同周期访问映射,在  $A, k, \tau_0$  参数下的双轨迹时间差图,绘制在图 5 中(2 轨迹之间的时间差用  $\tau_d$  表示).在图 5(a)中,周期 1 访问映射(三角形标注的线),以及准周期访问映射(圆形标注的线)2 种情况.在周期 1 情况下,其原点用黑色点划线标出,而准周期则是对应红色点划线标出.在  $\tau_{p02}$  从 1.64 变化至 1.66 的过程中,  $x_{pa}(t)$  与  $x_{pb}(t)$  的时间差由正变化向负( $\tau_d$  从 0.006 附近向 -0.006 附近变化),由于  $\tau_d$  是通过  $x_a(t)$  与  $x_b(t)$  协方差函数来计算,因此当  $\tau_d$  为正的时候,表示  $x_a(t)$  滞后  $x_b(t)$  ( $x_b(t)$  超前  $x_a(t)$ , 即发生 GAS).此时同步类型从 GAS 变化到 CS 再变化至 GLS; 而准周期访问映射(圆形标注的线),在  $\tau_{q02}$  从 1.30 变化至 1.50 过程中,  $x_a(t)$  与  $x_b(t)$  的时间差变化趋势也相同( $\tau_d$  从 0.06 附近向 -0.06 附近变化).在 2 种不同周期的访问映射下,  $\tau_{02}$  (包含  $\tau_{p02}, \tau_{q02}$ ) 对于  $\tau_d$  (轨迹之间时间差)在变化趋势的影响是一致的.  $\tau_{02}$  从小于同步值到大于同步值变化的过程中,  $x_a(t)$  与  $x_b(t)$  的时间差均由正变为负,即同步类型均从 GAS 变为 CS 再变为 GLS.

而图 5(b), (c) 的  $\tau_d$  变化趋势刚好与图 5(a) 相反.在图 5(b) 中,对于 2 种周期访问映射,在  $A_{p2}$  和  $A_{q2}$  均

从 0.70 变化至 0.90 的过程中,  $x_a(t)$  与  $x_b(t)$  的时间差  $\tau_d$  均由负变化向正, 但同步情况从 GLS 变化到 CS 再变化至 GAS 这一结论, 只在周期 1 访问映射情况下成立. 这是因为准周期访问映射情况下, 参数  $A_2$  (包含  $A_{p2}$  和  $A_{q2}$ ) 的改变, 会使得 GLS 和 GAS 同时存在, 当 2 种同步同时存在的时候, 2 系统的时间差  $\tau_d$ , 会比只存在一种同步情况下的  $\tau_d$  要显著平缓. 因此在图 5(b) 中, 准周期情况下,  $\tau_d$  的变化趋势明显比周期 1 的  $\tau_d$  的变化趋势平缓. 同样, 在图 5(c) 中,  $k_{p2}$  和  $k_{q2}$  的变化, 对于周期 1 访问映射, 同步类型从 GLS 变化到 CS 再变化至 GAS; 而对于准周期访问映射,  $\tau_d$  的变化趋势会明显比周期 1 的  $\tau_d$  的变化趋势平缓.

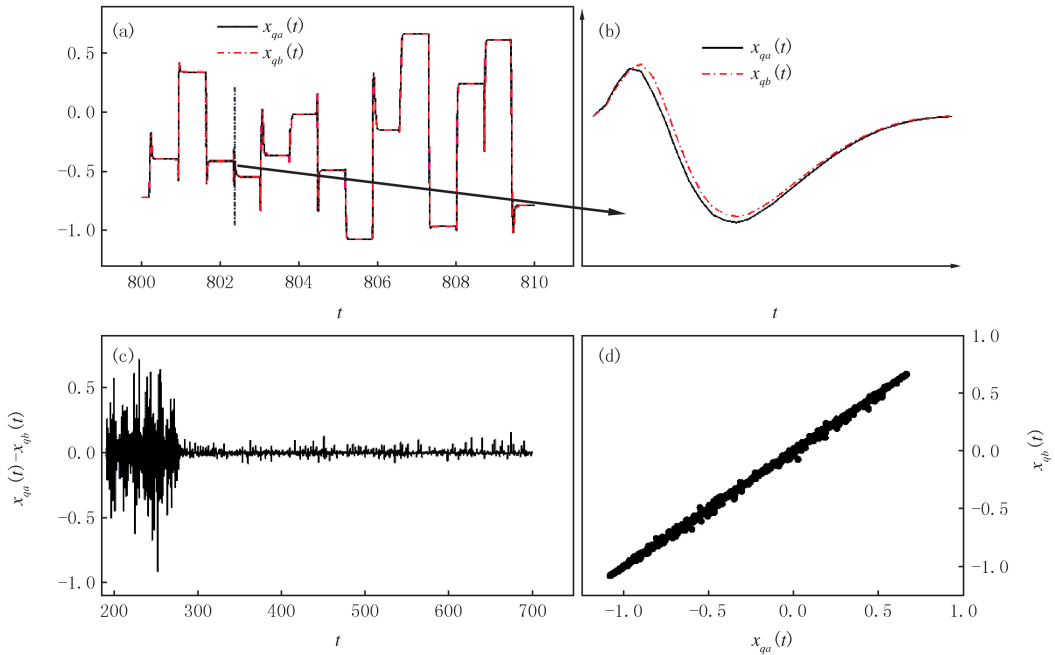


图4 GAS、GLS两种同步现象在准周期访问映射情况下同时出现

Fig.4 Both GAS and GLS synchronization situations occur at the same

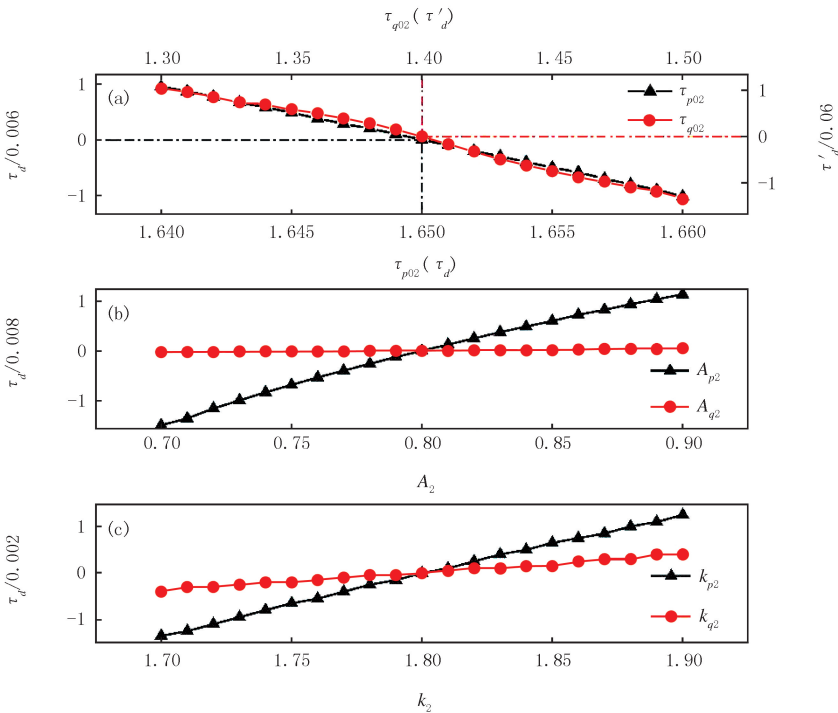


图5 不同周期访问映射下,  $\tau, A, k$  对双轨迹时间差的影响

Fig.5 The effect of  $\tau, A, k$  on the dual trajectory time difference for different cycle access map



为了更直观理解 GAS 和 GLS,使用式(4).GAS,GLS 的相似函数由

$$S_{GAS}^2(\tau_d) = \frac{\langle [x_b(t - \tau_d) - x_a(t)]^2 \rangle}{\langle [x_a(t)]^2 \rangle \langle [x_b(t)]^2 \rangle}, S_{GLS}^2(\tau_d) = \frac{\langle [x_b(t + \tau_d) - x_a(t)]^2 \rangle}{\langle [x_a(t)]^2 \rangle \langle [x_b(t)]^2 \rangle},$$

作为相似性函数<sup>[20,23]</sup>,其中,  $\tau_d = \frac{|\tau_{p01} - \tau_{p02}|}{2} = \frac{|\tau_{q01} - \tau_{q02}|}{2}$ ;  $A, k$  表示的相似函数分别为

$$S_{GAS}^2((A, k)_d) = \frac{\langle [x_b(t - (A, k)_d) - x_a(t)]^2 \rangle}{\langle [x_a(t)]^2 \rangle \langle [x_b(t)]^2 \rangle}, S_{GLS}^2((A, k)_d) = \frac{\langle [x_b(t + (A, k)_d) - x_a(t)]^2 \rangle}{\langle [x_a(t)]^2 \rangle \langle [x_b(t)]^2 \rangle},$$

其中,  $\langle x \rangle$  表示对  $x$  的时间平均积分,  $(A, k)_d$  包含  $(A, k)_{pd} = \frac{1}{2} \sin(2\pi t) [\frac{A_2 - A_1}{2\pi} + \frac{A_1 k_1 - A_2 k_2}{2\pi} \sin(2\pi t)]$ ,  $(A, k)_{qd} = \frac{1}{2} \sin(2\sqrt{2}\pi t) [\frac{A_2 - A_1}{2\sqrt{2}\pi} + \frac{A_1 k_1 - A_2 k_2}{2\sqrt{2}\pi} \sin(2\sqrt{3}\pi t)]$ . 计算得到的 2 种周期访问映射下的层流混沌耦合系统,参数  $\tau_0, A, k$  分别对应的相似函数图(图 6).其中图 6(a-c)的访问映射周期为 1,图 6(d-f)的访问映射为准周期.

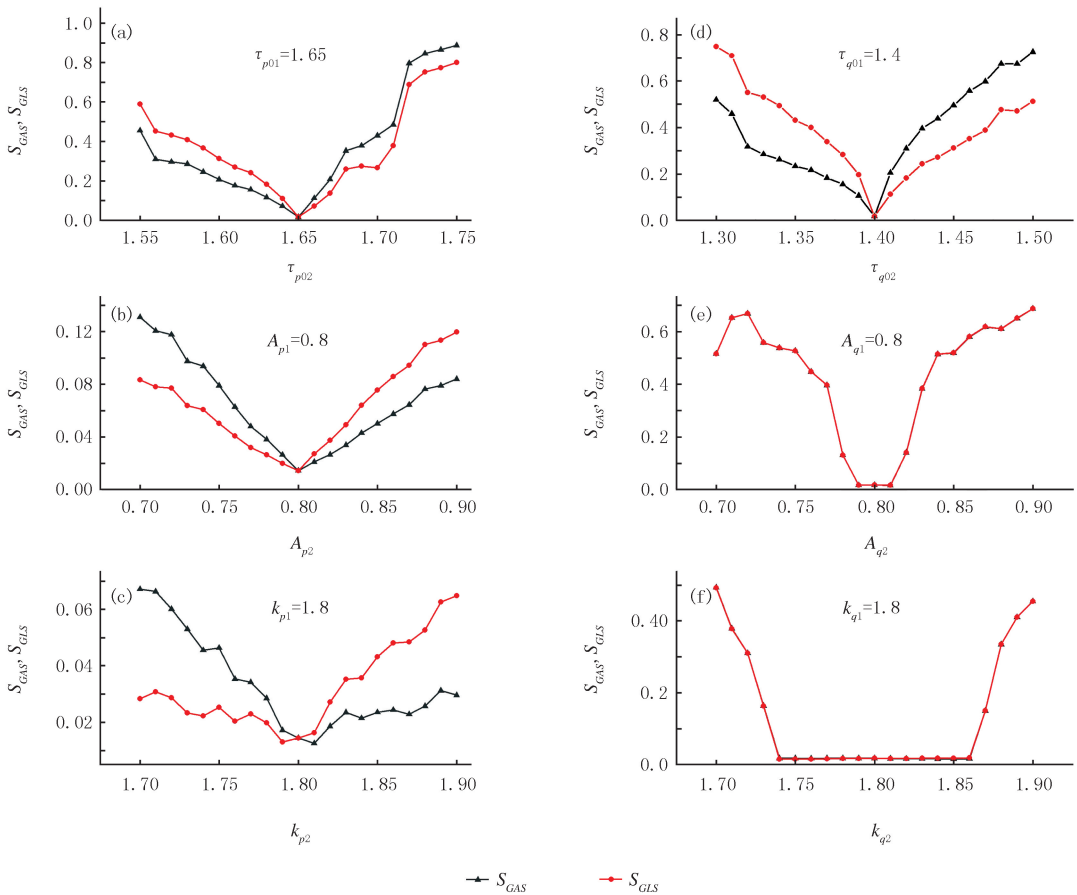


图6 周期1访问映射和准周期访问映射下的相似函数图

Fig.6 Similarity function with period of 1 access map and quasi-periodic access map

图 6(a)和(d)中,对于  $\tau_{02} > \tau_{01}, S_{GLS}(\tau_d) \approx 0$ ,表示存在 GLS;对于  $\tau_{02} < \tau_{01}, S_{GAS}(\tau_d) \approx 0$ ,表示存在 GAS.对于表示 CS 的  $\tau_{02} = \tau_{01}$ , 2 个相似性函数均为 0.图 6(b) 中当  $A_{p2} > A_{p1}$  时,  $S_{GAS}((A, k)_d) \approx 0$ ,存在 GAS;当  $A_{p2} < A_{p1}$  时,存在 GLS.3 种参数的准周期相似函数图(图 6(e-f))  $S_{GLS}, S_{GAS}$  的值几乎一致,即单独改变  $A$  或者  $k, S_{GAS}((A, k)_d) \approx S_{GLS}((A, k)_d)$ .这进一步说明在准周期访问映射下,单独改变  $A$  或者单独改变  $k$ , 2 种同步同时发生在层流相转换之间.图 6 在另一方面对于附录表 S1 和 S2 中有限的的变化进行了补充.

当只考虑延迟偏移  $\tau_0$ ,其余参数保持一致,无论是在周期 1 访问映射还是准周期访问映射情形时,改变  $\tau_0$  均能使 3 种同步相互转换.而对于  $A, k$  在周期 1 访问映射下,改变  $A, k$  也能使 3 种同步相互转换.但在准周期情况下,却能观察到 2 种同步(GAS 和 GLS)的同时存在的现象.

因此,在满足同步前提条件下  $\mu_1 + \omega_r = \mu_2 + \omega_s$ ,对于周期 1 的访问映射,延迟偏置  $\tau_{p0}$ ,影响访问映射振幅的 2 个因素  $k_p, A_p$ ,单独改变其中之一,都能使得耦合系统在 3 种同步之间的相互转换.然而对于准周期访问映射,会有不同的现象发生.此时单独改变延迟偏置  $\tau_{p0}$ ,仍然能使得耦合系统在 3 种同步之间的相互转换.而单独改变  $k_p, A_p$ ,会发现 GAS 和 GLS 同步同时存在于层流相转变之间.使用文献[16]中的准周期访问映射发现,当影响幅值的参数只有  $A$  时,改变  $A$  也能观察到 GAS 和 GLS 同步同时存在的现象.

### 3 结 论

本文首次对 2 种周期访问映射产生的层流混沌,分别进行了耦合,找到了层流混沌的一个新的系统,发现了一些不同且有趣的现象并进行了分析,得到了对于周期 1 访问映射和准周期访问映射情况下,层流混沌的 3 种同步结果.

耦合延迟项具有的偏移  $\tau_0$ ,和影响幅值的参数  $A, k$ ,小范围单独改变其中一项,在周期 1 访问映射下产生的 2 个耦合的层流混沌系统能在 GAS, GLS, CS 中相互转化.对于在准周期访问映射下,产生的 2 个耦合层流混沌系统,单独改变延迟偏移  $\tau_0$  仍能使得 2 轨迹在 GAS, GLS, CS 中相互转化.但单独改变  $A$  或者  $k$ ,会观察到 GAS 和 GLS 同步同时存在,且当影响访问映射幅值的因素,只有  $A$  时,这个结论依然成立.

附录见电子版(DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2024.01.09.0001).

### 参 考 文 献

- [1] 黄华娟,闵峰.求解逆运动学的多策略蜻蜓算法[J].河南师范大学学报(自然科学版),2023,51(5):46-58.  
HUANG H J, MIN F. Multi-strategy dragonfly algorithm for solving inverse kinematics[J]. Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition), 2023, 51(5): 46-58.
- [2] 刘维清,刘汉昌,朱云,等.低通滤波器对时延耦合振子系统振幅死亡的影响[J].河南师范大学学报(自然科学版),2022,50(3):113-118.  
LIU W Q, LIU H C, ZHU Y, et al. The effects of the low pass filter on the amplitude death in the coupled oscillators with time delay[J]. Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition), 2022, 50(3): 113-118.
- [3] 庄裕富,许志平,彭侠夫,等.基于预定时间混沌同步系统的图像加密算法[J].厦门大学学报(自然科学版),2023,62(4):647-653.  
ZHUANG Y F, XU Z P, PENG X F, et al. Image encryption algorithm based on predefined time chaotic synchronization system[J]. Journal of Xiamen University(Natural Science), 2023, 62(4): 647-653.
- [4] BORTOLOTTO G S, STENZINGER R V, TRAGTENBERG M H R. Electromagnetic induction on a map-based action potential model[J]. Nonlinear Dynamics, 2019, 95(1): 433-444.
- [5] 刘航,仇国庆,刘平,等.带时间延迟工业最优控制问题扩展控制变量参数化算法[J].高校化学工程学报,2020,34(5):1283-1289.  
LIU H, QIU G Q, LIU P, et al. Extended control variable parameterization approach for time-delay optimal control problems in industrial engineering[J]. Journal of Chemical Engineering of Chinese Universities, 2020, 34(5): 1283-1289.
- [6] POPOVYCH O V, YANCHUK S, TASS P A. Delay-and coupling-induced firing patterns in oscillatory neural loops[J]. Physical Review Letters, 2011, 107(22): 228102.
- [7] HU G, ZHANG Y, CERDEIRA H, et al. From low-dimensional synchronous chaos to high-dimensional desynchronous spatiotemporal chaos in coupled systems[J]. Physical Review Letters, 2000, 85(16): 3377-3380.
- [8] ROSENBLUM M G, PIKOVSKY A S, KURTHS J. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators[J]. Physical Review Letters, 1997, 78(22): 4193-4196.
- [9] BURIĆN, TODOROVIĆD. Synchronization of hyperchaotic systems with delayed bidirectional coupling[J]. Physical Review E, 2003, 68(6): 066218.
- [10] SENTHILKUMAR D V, LAKSHMANAN M. Delay time modulation induced oscillating synchronization and intermittent anticipatory/lag and complete synchronizations in time-delay nonlinear dynamical systems[J]. Chaos, 2007, 17(1): 013112.
- [11] SHAHVERDIEV E M, SIVAPRAKASAM S, SHORE K A. Inverse anticipating chaos synchronization[J]. Physical Review E, 2002, 66(1): 017204.
- [12] LAKSHMANAN M, SENTHILKUMAR D V. Dynamics of Nonlinear Time-Delay Systems[M]. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Hei-

delberg, 2011.

- [13] MÜLLER D, OTTO A, RADONS G. Laminar chaos[J]. *Physical Review Letters*, 2018, 120(8): 084102.
- [14] HART J D, ROY R, MÜLLER-BENDER D, et al. Laminar chaos in experiments: nonlinear systems with time-varying delays and noise [J]. *Physical Review Letters*, 2019, 123(15): 154101.
- [15] KULMINSKII D D, PONOMARENKO V I, PROKHOROV M D. Laminar chaos in a delayed-feedback generator[J]. *Technical Physics Letters*, 2020, 46(5): 423-426.
- [16] MÜLLER-BENDER D, RADONS G. Laminar chaos in systems with quasiperiodic delay[J]. *Physical Review E*, 2023, 107(1): 014205.
- [17] MÜLLER-BENDER D, OTTO A, RADONS G, et al. Laminar chaos in experiments and nonlinear delayed Langevin equations: A time series analysis toolbox for the detection of laminar chaos[J]. *Physical Review E*, 2020, 101(3): 032213.
- [18] OTTO A, MÜLLER D, RADONS G. Universal dichotomy for dynamical systems with variable delay[J]. *Physical Review Letters*, 2017, 118(4): 044104.
- [19] MÜLLER D, OTTO A, RADONS G. From dynamical systems with time-varying delay to circle maps and Koopman operators[J]. *Physical Review E*, 2017, 95(6): 062214.
- [20] KHATUN T, BISWAS D, BANERJEE T. Synchronization of laminar chaos[J]. *The European Physical Journal Plus*, 2022, 137(5): 561.
- [21] YANG L J, CHEN T L. Application of chaos in genetic algorithms[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2002, 38(2): 168-172.
- [22] JI M J, TANG H W. Application of chaos in simulated annealing[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2004, 21(4): 933-941.
- [23] SENTHILKUMAR D V, LAKSHMANAN M. Transition from anticipatory to lag synchronization via complete synchronization in time-delay systems[J]. *Physical Review E*, 2005, 71(1): 016211.
- [24] PYRAGAS K. Synchronization of coupled time-delay systems: Analytical estimations[J]. *Physical Review E*, 1998, 58(3): 3067-3071.

## Coupled synchronization of laminar chaos under period 1 and quasi-periodic access map

Zhu Yun, Wang Xulin, Qiu Guoqiang

(School of Science, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou 341000, China)

**Abstract:** In this paper, we observe laminar chaos by using period-1 and quasi-periodic access map in a new system. After that, we couple the laminar chaotic dual system produced by two different periodic access map using time delay modulation to observe their synchronization behavior. When the parameters affecting access map are changed, the corresponding generalized anticipatory synchronization, generalized lag synchronization, and complete synchronization can be observed. But for quasi-periodic access map, generalized lag synchronization and anticipatory synchronization exist simultaneously in some cases.

**Keywords:** laminar chaos; access map; generalized anticipatory synchronization; generalized lag synchronization; complete synchronization

[责任编辑 杨浦 刘洋]



附 录

表 S1 周期 1 访问映射下 3 种同步情况

Tab. S1 Three synchronization cases under period-1 access map

$\tau_{p01}$	$\tau_{p02}$	$A_{p1}$	$A_{p2}$	$k_{p1}$	$k_{p2}$	$\eta$	同步类型
1.65	1.65	0.80	0.80	1.80	1.80	0.80	CS
1.65	<b>1.66</b>	0.80	0.80	1.80	1.80	0.80	GLS
1.65	<b>1.64</b>	0.80	0.80	1.80	1.80	0.80	GAS
1.65	1.65	0.80	<b>0.79</b>	1.80	1.80	0.80	GLS
1.65	1.65	0.80	<b>0.81</b>	1.80	1.80	0.80	GAS
1.65	1.65	0.80	0.80	1.80	<b>1.78</b>	0.80	GLS
1.65	1.65	0.80	0.80	1.80	<b>1.82</b>	0.80	GAS

表 S2 准周期访问映射下 3 种同步情况

Tab. S2 Three synchronization cases under quasi-period access map

$\tau_{q01}$	$\tau_{q02}$	$A_{q1}$	$A_{q2}$	$k_{q1}$	$k_{q2}$	$\eta$	同步类型
1.40	1.40	0.80	0.80	1.80	1.80	0.80	CS
1.40	<b>1.41</b>	0.80	0.80	1.80	1.80	0.80	GLS
1.40	<b>1.39</b>	0.80	0.80	1.80	1.80	0.80	GAS
1.40	1.40	0.80	<b>0.78</b>	1.80	1.80	0.80	GAS, GLS
1.40	1.40	0.80	<b>0.82</b>	1.80	1.80	0.80	GAS, GLS
1.40	1.40	0.80	0.80	1.80	<b>1.78</b>	0.80	GAS, GLS
1.40	1.40	0.80	0.80	1.80	<b>1.82</b>	0.80	GAS, GLS