

导数非线性 Schrödinger 方程的爆破解

郑昊昊,李用声

(华南理工大学 数学学院,广州 510640)

摘要:研究下述导数非线性 Schrödinger 方程的初边值问题: $i\phi_t + \alpha\phi_{xx} = i\beta|\phi|^{2\sigma}\phi_x - g(|\phi|^2)\phi$, $\sigma \geq 1$, $x \in [a, b]$, 其中 α, β 为实数, $g(\cdot)$ 是实值函数. 当 α, β, ϕ_0 及 $g(s)$ 满足一定条件时, 利用守恒律和修正的 virial 等式, 证明了爆破解的存在性. 最后, 得到了爆破解的渐近行为等一些性质.

关键词:导数非线性 Schrödinger 方程; 爆破解; 修正的 virial 等式

中图分类号:O175.23

文献标志码:A

在本文考虑下述导数非线性 Schrödinger 方程

$$i\phi_t + \alpha\phi_{xx} = i\beta|\phi|^{2\sigma}\phi_x - g(|\phi|^2)\phi, \sigma \geq 1. \quad (1)$$

其中 α, β 为实数, $g(\cdot)$ 是实值函数. 当 $\beta=0$ 时, 方程(1)化为下述一维情形下的非线性 Schrödinger 方程

$$i\phi_t + \alpha\phi_{xx} = -g(|\phi|^2)\phi. \quad (2)$$

方程(2)的局部适定性和全局适定性已经被广泛研究, 见文献[1-3]及其参考文献. 文献[4]首先研究了方程(2)的爆破解的存在性, 之后爆破解的性质也被广泛研究, 见文献[5-6]及其参考文献. 最近文献[7]研究了能量临界以及能量超临界情形下方程(2)解的爆破准则.

当 $g=0$ 时, 方程(1)化为下述导数非线性 Schrödinger 方程

$$i\phi_t + \phi_{xx} + i|\phi|^{2\sigma}\phi_x = 0. \quad (3)$$

当 $\sigma=1$ 时, 这是等离子体物理中 Alfvén 波的一个模型, 见文献[8-9]. 文献[10]研究了光滑空间的适定性. 后来文献[11-12]研究了其 H^1 解的局部适定性. 随后文献[13]得到了在大初值条件下的 H^s 局部适定性, $s \geq \frac{1}{2}$. 通过规范变换及守恒律, 得到了 H^1 解的全局适定性结果, 其中初值满足下列条件

$$\|\phi_0\|_2 < \sqrt{2\pi}. \quad (4)$$

在条件(4)下, 文献[14-15]证明了 H^s 解的全局适定性, 其中 $s > \frac{1}{2}$. 之后文献[16]得到了 $H^{\frac{1}{2}}$ 解的全局适定性. 然而, $\sqrt{2\pi}$ 并不是全局适定性的最大阈值. 在文献[17-18]中, 证明了 H^1 解的全局存在性, 其中初值满足下列条件

$$\|\phi_0\|_2 < 2\sqrt{\pi}. \quad (5)$$

最近文献[19]证明了在初值满足(5)条件下 $H^{\frac{1}{2}}$ 解是全局存在的.

对于 $\sigma \geq 1$, 文献[12]证明了方程(3)的初边值问题的解的 H^1 局部适定性. 最近, 文献[20]得到在初值满足一些限制条件下 H^1 解的全局存在性. 对于其他的一些适定性结果, 见文献[21-22].

关于方程(1)的爆破解的研究, 当 $\sigma=1$ 时, 文献[23]研究了方程(1)在有界区域上的初边值条件下爆破

收稿日期:2020-12-06; 修回日期:2021-03-07.

基金项目:国家自然科学基金(11571118;11971356)

作者简介:李用声(1965-),男,湖北襄阳人,华南理工大学教授,博士生导师,主要从事非线性发展方程与无穷维动力系统的研究, E-mail:yshili@scut.edu.cn.

通信作者:郑昊昊(1998-),男,江西南昌人,研究方向为非线性发展方程, E-mail:1327820053@qq.com.

解的存在性及其一些性质.之后文献[17]讨论了方程(3)在右半直线上的初边值问题,并且在负能量的假设下得到了解的爆破.但是对于 $\sigma > 1$ 的条件下,方程(1)的解是否会爆破仍然不清楚.本文旨在讨论这个问题.研究方程(1)在下列边值条件下爆破解的存在性以及爆破解的性质,

$$\phi(0, x) = \phi_0(x), x \in \bar{\Omega} = [a, b], \phi(t, a) = 0, \phi(t, b) = 0, t \geq 0, \quad (6)$$

将文献[23]以及文献[17]中的结果推广到 $\sigma \geq 1$ 的情形.

在本文采用以下记号. f_x, f_t 分别表示函数 f 对 x, t 的偏导数. $\text{Re}f, \text{Im}f$ 表示复值函数 f 的实部和虚部.

$\Omega = (a, b)$, $\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$, $p \geq 1$.对 $m \in \mathbf{N}$, $H^m(\Omega)$ 和 $H_0^m(\Omega)$ 为通常的 Sobolev 空间,其范数为 $\|f\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|a| \leq m} \|D^a f\|_2\right)^{1/2}$.

1 守恒律及修正的 virial 等式

在这一节,建立方程(1)的守恒律及修正的 virial 等式. Virial 等式对下一节爆破解的讨论至关重要.

引理 1 设 α, β 为实数, $g(s)$ 是实值函数, $g(0) = 0$.假设初值 $\phi_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\phi \in C([0, T], H_0^1(\Omega))$ 是相应的方程(1)的解.则对 $0 \leq t < T$,

$$M = \|\phi\|_2^2 = \|\phi_0\|_2^2, \quad (7)$$

$$E = \alpha^2 \int_a^b |\phi_x|^2 dx - \alpha \int_a^b G(|\phi|^2) dx - \frac{\alpha\beta}{\sigma+1} \text{Im} \int_a^b |\phi|^{2\sigma} \phi_x \bar{\phi} dx. \quad (8)$$

其中 $G(s) = \int_0^s g(\tau) d\tau$.

证明 方程(1)两边乘以 $2\bar{\phi}$,然后积分,再对结果取实部,得到第一个等式(7).方程(1)两边乘以 $2\bar{\phi}_t$,然后积分,再对结果取虚部,注意到

$$2\text{Im} \int_a^b i\bar{\phi}_t \alpha \phi_{xx} dx = -2\alpha \text{Re} \int_a^b \bar{\phi}_{tx} \phi_x dx = -\alpha \frac{d}{dt} \int_a^b |\phi_x|^2 dx,$$

$$2\text{Im} \int_a^b i g(|\phi|^2) \phi \bar{\phi}_t dx = 2\text{Re} \int_a^b g(|\phi|^2) (|\phi|^2)_t dx = \frac{d}{dt} \int_a^b G(|\phi|^2) dx,$$

以及

$$\frac{d}{dt} \text{Im} \int_a^b |\phi|^{2\sigma} \phi_x \bar{\phi} dx = (\sigma+1) \text{Im} \int_a^b |\phi|^{2\sigma} \phi_x \bar{\phi}_t dx + \sigma \int_a^b |\phi|^{2(\sigma-1)} (\bar{\phi})^2 \phi_x \phi_t dx -$$

$$\text{Im} \int_a^b [\sigma |\phi|^{2(\sigma-1)} (|\phi|^2)_x \bar{\phi} \phi_t + |\phi|^{2\sigma} \phi_x \bar{\phi}_t] dx = -2(\sigma+1) \text{Im} \int_a^b |\phi|^{2\sigma} \phi_t \bar{\phi} dx.$$

最后得到 $\frac{d}{dt} [\alpha \int_a^b |\phi_x|^2 dx - \int_a^b G(|\phi|^2) dx - \frac{\beta}{\sigma+1} \text{Im} \int_a^b |\phi|^{2\sigma} \phi_x \bar{\phi} dx] = 0$,

因此,能量守恒律(8)成立.引理 1 证毕.

引理 2 设 $\phi \in H_0^1(\Omega)$ 且 $(x-a)\phi \in L^2(\Omega)$,有 $\|\phi\|_2^2 \leq 2\|\phi_x\|_2 \|(x-a)\phi\|_2$.

证明 注意到

$$\int_a^b |\phi|^2 dx = -2\text{Re} \int_a^b (x-a) \phi \bar{\phi}_x dx \leq 2\|\phi_x\|_2 \|(x-a)\phi\|_2,$$

所以引理 2 成立.

接下来,将引入方程(1)的修正的 virial 等式.这个过程遵循标准的讨论,参见文献[4, 17, 23].可以发现 ϕ 的 virial 量与质量临界非线性 Schrödinger 方程相似.但由于非线性项的不同,两者之间仍存在差异.定义

$$V(t) = \int_a^b (x-a)^2 |\phi|^2 dx, \quad (9)$$

$$P(t) = \text{Im} \int_a^b (x-a) \bar{\phi} \phi_x dx. \quad (10)$$

引理 3 设 $(x-a)\phi_0(x) \in L^2(\Omega)$, $(x-a)^{\frac{1}{\sigma+1}} |\phi_0(x)|^2 \in L^{\sigma+1}(\Omega)$, $\phi_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\phi \in C([0, T])$,

$H_0^1(\Omega)$ 是相应方程(1)的解,则

$$\frac{d}{dt}V(t) = 4\alpha P(t) - \frac{2\beta}{\sigma+1} \int_a^b (x-a) |\phi|^{2(\sigma+1)} dx, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}P(t) = & 2\alpha \int_a^b |\phi_x|^2 dx - \alpha(b-a) |\phi_x(b,t)|^2 - \beta \operatorname{Im} \int_a^b |\phi|^{2\sigma} \phi_x \bar{\phi} dx + \\ & \int_a^b G(|\phi|^2) dx - \int_a^b g(|\phi|^2) |\phi|^2 dx. \end{aligned} \quad (12)$$

证明 通过直接的计算,有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(t) = & \int_a^b (x-a)^2 \left[-2\operatorname{Im} \alpha \bar{\phi} \phi_{xx} + \frac{\beta}{\sigma+1} (|\phi|^{2(\sigma+1)})_x \right] dx = \\ & 4\alpha P(t) - \frac{2\beta}{\sigma+1} \int_a^b (x-a) |\phi|^{2(\sigma+1)} dx, \end{aligned}$$

所以(11)式成立.对于(12)式,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}P(t) = & -\operatorname{Im} \int_a^b [\bar{\phi} + 2(x-a)\bar{\phi}_x] \phi_t dx = -\operatorname{Im} \int_a^b [\bar{\phi} + 2(x-a)\bar{\phi}_x] [i\alpha \phi_{xx} + \beta |\phi|^{2\sigma} \phi_x + \\ & ig(|\phi|^2)\phi] dx = 2\alpha \int_a^b |\phi_x|^2 dx - \alpha(b-a) |\phi_x(b,t)|^2 - \beta \operatorname{Im} \int_a^b |\phi|^{2\sigma} \phi_x \bar{\phi} dx + \\ & \int_a^b G(|\phi|^2) dx - \int_a^b g(|\phi|^2) |\phi|^2 dx. \end{aligned}$$

从而(12)式也成立.引理 3 证毕.

联系(11)、(12)式以及能量守恒(8),得到下列引理.

引理 4 设引理 3 的假设条件成立,则对方程(1)的解 $\phi \in C([0, T], H_0^1(\Omega))$, 有

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}V(t) = & 4(\sigma+1)E + \int_a^b \alpha [(8+4\sigma)G(|\phi|^2) - 4g(|\phi|^2)|\phi|^2] dx + \\ & (4-4\sigma)\alpha^2 \int_a^b |\phi_x|^2 dx - \frac{2\beta}{\sigma+1} \frac{d}{dt} \int_a^b (x-a) |\phi|^{2(\sigma+1)} dx. \end{aligned} \quad (13)$$

2 爆破解的存在性及其性质

在这一节,受文献[3-4, 23]的启发,运用 virial 等式(13)来证明,在一定条件下,方程(1)的解会发生爆破,进而研究爆破解的渐近行为.

定理 1 设 $\beta \geq 0, \alpha G(s) \leq \frac{\alpha}{2+\sigma} g(s)s$, 引理 3 的条件成立,假设下述条件之一成立,

(i) $E < 0$,

(ii) $E = 0$ 且 $\alpha \operatorname{Im} \int_a^b (x-a) \bar{\phi}_0 \phi_{0x} dx < 0$,

(iii) $E > 0$ 且 $\alpha \operatorname{Im} \int_a^b (x-a) \bar{\phi}_0 \phi_{0x} dx < -\frac{\sqrt{2(\sigma+1)}}{2} \sqrt{E} (x-a) \|\phi_0\|_2$.

则存在 $T^* \in (0, \infty)$, 使得 $\lim_{t \rightarrow T^*} \|\phi_x\|_2 = \infty$.

证明 由等式(13)以及条件 $\sigma \geq 1, \beta \geq 0$ 和 $\alpha G(s) \leq \frac{\alpha}{2+\sigma} g(s)s$, 得到

$$\frac{d^2}{dt^2}V(t) \leq 4(\sigma+1)E - \frac{2\beta}{\sigma+1} \frac{d}{dt} \int_a^b (x-a) |\phi|^{2(\sigma+1)} dx. \quad (14)$$

对时间积分两次,得到

$$\begin{aligned} V(t) = & V(0) + V'(0)t + \int_0^t \int_0^s \frac{d^2}{d\tau^2} V(\tau) d\tau ds \leq V(0) + [V(0) + \frac{2\beta}{\sigma+1} \int_a^b (x-a) |\phi_0|^{2(\sigma+1)} dx] t + \\ & 2(\sigma+1)Et^2 = \int_a^b (x-a)^2 |\phi_0|^2 dx + 4\alpha t \operatorname{Im} \int_a^b (x-a) \bar{\phi}_0 \phi_{0x} dx + 2(\sigma+1)Et^2. \end{aligned} \quad (15)$$

在定理 1 中假设条件(i)、(ii)或者(iii)下,(15)式意味着存在 $T^* \in (0, \infty)$,使得 $V(T^*)=0$.由引理 2 的不等式可知, $\|\phi\|_2^2 \leq 2\|\phi_x\|_2\|(x-a)\phi\|_2$,得到 $\lim_{t \rightarrow T^*} \|\phi_x\|_2 = \infty$. 定理 1 得证.

注记 1 若取区域 $\Omega = (a, \infty)$, 并且考虑方程(1)的相应的初值问题,有类似定理 1 的结果.

从证明中可以发现,相对质量临界非线性 Schrödinger 方程的情形,在 virial 量的估计中多了一项 $\frac{2\beta}{\sigma+1}$.

$\frac{d}{dt} \int_a^b (x-a)|\phi|^{2(\sigma+1)} dx$.事实上这正是含导数的非线性项带来的影响,并且这一项很难得到准确的估计.但由于 Ω 区间的下界大于 a , 始终可以保证该项的正性,从而在估计的时候避免复杂的讨论.注意到对于 Cauchy 问题,这里的讨论是不适用的.

接下来讨论爆破解的渐近行为的一些性质.

定理 2 在定理 1 的条件下,令 T^* 是解 $\phi(x, t)$ 的爆破时间.另外,假设对于某个常数 $C_0 > 0$ 使得 $s^{2\sigma+1} \leq C_0 G(s), s > 0$.则对任意的 $\theta \in (0, 1)$, 有

$$\int_0^{T^*} \|\phi_x(\cdot, \tau)\|_2^\theta d\tau \leq \text{const.}$$

证明 由 virial 等式(13)式以及直接的计算,对于 $t \in [0, T^*)$, 有

$$\int_a^b (x-a)^2 |\phi|^2 dx \leq C_1 - C_2 \int_0^t \int_0^\tau \int_a^b G(|\phi|^2) dx ds d\tau. \tag{16}$$

其中 C_1, C_2 是正常数.由能量守恒等式(8),

$$\|\phi_x(\cdot, t)\|_2^2 \leq C_3 + C_4 \int_a^b |\phi|^{2(2\sigma+1)} dx + C_5 \int_a^b G(|\phi|^2) dx \leq C_3 + C_6 \int_a^b G(|\phi|^2) dx, \tag{17}$$

其中 $C_3 \sim C_6$ 是正常数.由 Fubini 定理以及不等式(17),有

$$\begin{aligned} \int_0^{T^*} (T^* - \tau) \|\phi_x(\cdot, \tau)\|_2^2 d\tau &\leq \frac{T^{*2}}{2} C_3 + C_6 \int_0^{T^*} (T^* - \tau) \int_a^b G(|\phi|^2) dx d\tau = \\ &\frac{T^{*2}}{2} C_3 + C_6 \int_0^{T^*} \int_0^\tau \int_a^b G(|\phi|^2) dx ds d\tau \leq \frac{T^{*2}}{2} C_3 + C_6 \frac{C_1}{C_2} \leq \text{const.}, \end{aligned} \tag{18}$$

最后,运用 Young 不等式,并且结合不等式(18),对 $\theta \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} \int_0^{T^*} \|\phi_x(\cdot, \tau)\|_2^\theta d\tau &= \int_0^{T^*} \left[\frac{1}{p} (T^* - \tau)^{-\frac{\theta}{2}p} + \frac{1}{q} (T^* - \tau)^{\frac{\theta}{2}q} \|\phi_x\|_2^{\theta q} \right] d\tau \leq \\ &\frac{1}{p} T^{* \frac{2(1-\theta)}{2-\theta}} + \frac{1}{q} \int_0^{T^*} (T^* - \tau) \|\phi_x(\cdot, \tau)\|_2^2 d\tau \leq \text{const.}, \end{aligned}$$

其中 $p = \frac{2}{2-\theta}, q = \frac{2}{\theta}$. 从而证明了定理 2.

推论 1 在定理 2 的条件下,有:

(i) $\int_0^{T^*} \|\phi(\cdot, t)\|_p^\eta d\tau \leq \text{const.}$, 其中 $0 \leq \eta < \frac{2p}{p-2}, p \geq 2$;

(ii) $\int_0^{T^*} \|\phi(\cdot, t)\|_q^q d\tau \leq \text{const.}$, 其中 $0 \leq q < 4$.

证明 由定理 2 及 Gagliardo-Nirenberg 不等式 $\|\phi\|_p \leq C \|\phi_x\|_2^{\frac{p-2}{2}} \|\phi\|_2^{\frac{p+2}{2}}$, 其中 $p \geq 2$, 能直接得到推论 1.

参 考 文 献

[1] KATO T. On nonlinear Schrödinger equations[J]. Ann IHP Phys théor, 1987, 46(1): 113-129.
 [2] TSUTSUMI Y. L^2 -solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear groups[J]. Funkcial Ekvac, 1987, 30(1): 115-125.
 [3] WEINSTEIN M I. Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates[J]. Commun Math Phys, 1983, 87(4): 567-576.
 [4] GLASSEY R T. On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations[J]. J Math Phys, 1977, 18(9): 1794-1797.

- [5] MERLE F. On uniqueness and continuation properties after blow-up time of self-similar solutions of nonlinear Schrödinger equation with critical exponent and critical mass[J]. *Commun Pure Appl Math*, 1992, 45(2): 203-254.
- [6] MERLE F, TSUTSUMI Y. L^2 concentration of blow-up solutions for the nonlinear Schrödinger equation with critical power nonlinearity[J]. *J Diff Eq*, 1990, 84(2): 205-214.
- [7] DU D P, WU Y F, ZHANG K J. On blow-up criterion for the nonlinear Schrödinger equation[J]. *Discrete & Conti Dyn Syst A*, 2016, 36(7): 3639-3650.
- [8] MIO K, OGINO T, MINAMI K, et al. Modified nonlinear Schrödinger equation for Alfvén waves propagating along the magnetic field in cold plasmas[J]. *J Phys Soc Japan*, 1976, 41(1): 265-271.
- [9] MJØLHUS E. On the modulational instability of hydromagnetic waves parallel to the magnetic field[J]. *J Plasma Phys*, 1976, 16(3): 321-334.
- [10] GUO B L, TAN S B. On smooth solutions to the initial value problem for the mixed nonlinear Schrödinger equations[J]. *Proce Roy Soc Edinburgh Sect A: Math*, 1991, 119(1/2): 31-45.
- [11] HAYASHI N. The initial value problem for the derivative nonlinear Schrödinger equation in the energy space[J]. *Nonl Anal: Theory, Methods & Appl*, 1993, 20(7): 823-833.
- [12] HAYASHI N, OZAWA T. On the derivative nonlinear Schrödinger equation[J]. *Phys D: Nonl Phenomena*, 1992, 55(1/2): 14-36.
- [13] TAKAOKA H. Well-posedness for the one-dimensional nonlinear Schrödinger equation with the derivative nonlinearity[J]. *Adv Diff Eq*, 1999, 4(4): 561-580.
- [14] COLLIANDER J, KEEL M, STAFFILANI G, et al. Global well-posedness for Schrödinger equations with derivative[J]. *SIAM J Math Anal*, 2001, 33(3): 649-669.
- [15] COLLIANDER J, KEEL M, STAFFILANI G, et al. A refined global well-posedness result for Schrödinger equations with derivative[J]. *SIAM J Math Anal*, 2002, 34(1): 64-86.
- [16] MIAO C X, WU Y F, XU G X. Global well-posedness for Schrödinger equation with derivative in $H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R})$ [J]. *J Diff Eq*, 2011, 251(8): 2164-2195.
- [17] WU Y F. Global well-posedness for the nonlinear Schrödinger equation with derivative in energy space[J]. *Anal & PDE*, 2013, 6(8): 1989-2002.
- [18] WU Y F. Global well-posedness on the derivative nonlinear Schrödinger equation[J]. *Anal & PDE*, 2015, 8(5): 1101-1112.
- [19] GUO Z H, WU Y F. Global well-posedness for the derivative nonlinear Schrödinger equation in $H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R})$ [J]. *Discrete & Conti Dyn Syst A*, 2017, 37(1): 257-264.
- [20] FUKAYA N, HAYASHI M, INUI T. A sufficient condition for global existence of solutions to a generalized derivative nonlinear Schrödinger equation[J]. *Anal & PDE*, 2017, 10(5): 1149-1167.
- [21] AMBROSE D M, SIMPSON G. Local Existence Theory for Derivative Nonlinear Schrödinger Equations with Noninteger Power Nonlinearities[J]. *SIAM J Math Anal*, 2015, 47(3): 2241-2264.
- [22] SANTOS G D N. Existence and uniqueness of solution for a generalized nonlinear derivative Schrödinger equation[J]. *J Diff Eq*, 2015, 259(5): 2030-2060.
- [23] TAN S B. Blow-up solutions for mixed nonlinear Schrödinger equations[J]. *Acta Math Sinica*, 2004, 20(1): 115-124.

Blow-up solutions for derivative nonlinear Schrödinger equations

Zheng Haohao, Li Yongsheng

(School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

Abstract: In this paper, we study the blow-up solutions to the following initial boundary value problem of the derivative nonlinear Schrödinger equations, $i\phi_t + \alpha\phi_{xx} = i\beta|\phi|^{2\sigma}\phi_x - g(|\phi|^2)\phi$, $\sigma \geq 1$, $x \in [a, b]$, where α, β are real, $g(\cdot)$ is a real function. Under the some appropriate conditions on α, β, ϕ_0 and $g(s)$, we show the existence of the blow-up solutions by conservation laws and modified virial identity. Finally, we investigate asymptotic behavior and other properties of blow-up solutions.

Keywords: derivative nonlinear Schrödinger equation; blow-up solution; modified virial identity