

Hom- T -smash 积 Hom-Hopf 代数上的拟三角结构

焦争鸣, 郭敏, 夏正亮

(河南师范大学 数学与信息科学学院, 河南 新乡 453007)

摘要:主要研究 Hom- T -smash 积 Hom-Hopf 代数 $(B \bowtie_T H, \alpha_B \otimes \alpha_H)$ 上的拟三角结构, 给出了 Hom- T -smash 积 Hom-Hopf 代数构成拟三角 Hom-Hopf 代数的充要条件.

关键词: Hom-Hopf 代数; 拟三角结构; Hom- T -smash 积

中图分类号: O153.3

文献标志码: A

作为提供量子 Yang-Baxter 方程解的有效工具, 拟三角 Hopf 代数和余拟三角 Hopf 代数(也称辫子 Hopf 代数)概念分别由 Drinfeld 和 Larson-Towber 在文献[1-2]中引入. 由于其深刻的物理背景, 引起了许多代数学者的关注和研究, 相关的研究结果可参见文献[1-4].

近年来, 作为代数一类形变代数, Hom-结合代数的概念由 Makhlouf 和 Silvestrov^[5] 在研究拟李代数时引入. 这里通常代数的结合性由 Hom-结合性所代替, 即: $\alpha(a)(bc) = (ab)\alpha(c)$, 其中 $\alpha: A \rightarrow A$ 为一个线性映射. 对偶地文献[6-7]引入了 Hom-余结合余代数概念, 随之, 文献[7-9]相继给出 Hom-双代数(Hopf 代数), (余)拟三角 Hom-双代数(Hopf 代数)定义, 并对其进行了深入研究. 文献[10-11]分别给出了 Hom- T -smash 积 Hom-Hopf 代数和 Hom- ω -smash 余积 Hom-Hopf 代数的定义并研究了其上的余拟三角结构.

本文将主要对 Hom- T -smash 积 Hom-Hopf 代数上的拟三角结构进行研究, 给出 Hom- T -smash 积 Hom-Hopf 代数具有拟三角结构的充分必要条件. 本文的所有工作都在一个固定的域 k 上进行, 张量积和线性映射均指域 k 上的. 文中将沿用文献[12]中记法, 对于代数 C 和任意 $c \in C$, 记 $\Delta(c) = \Sigma_{c(1)} \otimes c(2)$ (为了方便, 以下省略“ Σ ”).

1 预备知识

本节先回顾一下 Hom-结构定义.

一个 Hom-结合代数是一个四元组 (A, μ, η, α) (简称 (A, α)), 其中 A 是一个线性空间, $\alpha: A \rightarrow A, \eta: k \rightarrow A, \mu: A \otimes A \rightarrow A, \mu(a \otimes a') = aa'$ 为线性映射. 使对所有 $a, a', a'' \in A$, 满足下列条件

- 1) $(aa') = \alpha(a)\alpha(a'), \alpha(1_A) = 1_A$, 其中 $1_A = \eta(1_k)$;
- 2) $\alpha(a)(a'a'') = (aa')\alpha(a''); 3) a1_A = 1_Aa = \alpha(a)$.

一个 Hom-代数同态 $f: (A, \mu_A, 1_A, \alpha_A) \rightarrow (B, \mu_B, 1_B, \alpha_B)$ 是指一个线性映射 $f: A \rightarrow B$ 满足 $\alpha_B \circ f = f \circ \alpha_A, f(1_A) = 1_B$ 和 $f \circ \mu_A = \mu_B \circ (f \otimes f)$.

定义 2^[6] 一个 Hom-余结合余代数是一个四元组 $(C, \Delta, \epsilon_C, \beta)$ (简称: (C, β)), 其中 C 是一个线性空间, $\beta: C \rightarrow C, \epsilon_C: C \rightarrow k, \Delta: C \rightarrow C \otimes C$ 为线性映射. 使对所有 $c \in C$, 下列条件满足

- 1) $\Delta \circ \beta = (\beta \otimes \beta) \circ \Delta, \epsilon_C \circ \beta = \epsilon_C$;
- 2) $\beta(c_{(1)}) \otimes c_{(2)(1)} \otimes c_{(2)(2)} = c_{(1)(1)} \otimes c_{(1)(2)} \otimes \beta(c_{(2)})$;

收稿日期: 2014-06-06

基金项目: 河南省基础与前沿技术研究计划项目(132300410052); 河南省教育厅基础研究项目(2009A110009)

作者简介: 焦争鸣(1956-), 男, 河南安阳人, 河南师范大学教授, 主要从事 Hopf 代数研究, E-mail: zmjiao@htu.cn.

$$3) \epsilon_C(c_{(1)}) c_{(2)} = c_{(1)} \epsilon_C(c_{(2)}) = \beta(c).$$

一个 Hom- 余代数同态 $g : (C, \Delta_C, \epsilon_C, \beta_C) \rightarrow (D, \Delta_D, \epsilon_D, \beta_D)$ 是指一个线性映射 $g : C \rightarrow D$ 满足 $\beta_D \circ g = g \circ \beta_C, \epsilon_D \circ g = \epsilon_C$ 和 $\Delta_D \circ g = (g \otimes g) \circ \Delta_C$.

定义 3^[7-8] 一个 Hom- 双代数是一个六元组 $(H, \mu_H, 1_H, \Delta_H, \epsilon_H, \gamma)$ (简称 (H, γ)), 其中 (H, γ) 是 Hom- 结合代数, 也是 Hom- 余结合余代数, 使得线性映射 Δ, ϵ_C 是 Hom- 代数同态, 即对任意 $h, g \in H$ 满足下列条件 $\Delta(hh') = \Delta(h)\Delta(h'), \Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H, \epsilon(hh') = \epsilon(h)\epsilon(h'), \epsilon(1_H) = 1_H$.

一个反对极是一个线性映射 $S : H \rightarrow H$, 如果满足下列条件

$$S(h_{(1)})h_{(2)} = h_{(1)}S(h_{(2)}) = \epsilon(h)1_H, S(\gamma(h)) = \gamma(S(h)),$$

一个有反对极的 Hom- 双代数称为 Hom-Hopf 代数.

设 (B, α_B) 和 (H, α_H) 为 Hom- 结合代数, 线性映射 $T : H \otimes B \rightarrow B \otimes H, T(h \otimes b) = b_T \otimes h_T$, 满足 $(\alpha_B \otimes \alpha_H) \circ T = T \circ (\alpha_H \otimes \alpha_B)$, 在向量空间 $B \otimes H$ 上定义乘法

$$(b \otimes h)(b' \otimes h') = b\alpha_B^{-1}(b')_T \otimes \alpha_H^{-1}(h_T)h'. \quad (1)$$

对任意的 $h, h' \in H$ 和 $b, b' \in B$. 如果 $B \otimes H$ 对此乘法构成新的 Hom- 结合代数, 单位元为 $1_B \otimes 1_H$, 则称此新的 Hom- 结合代数 $B \otimes H$ 为 Hom-smash 积, 记为 $B \#_T H$.

命题 1^[10] 设 (B, α_B) 和 (H, α_H) 为 Hom- 结合代数, 线性映射 $T : H \otimes B \rightarrow B \otimes H$. 则 $B \#_T H$ 为一个 Hom-smash 积当且仅当下列条件成立 ($T = \iota$)

$$T(h \otimes 1_B) = 1_B \otimes \alpha_H(h); \quad (2)$$

$$T(1_H \otimes b) = \alpha_B(b) \otimes 1_H; \quad (3)$$

$$\alpha_B((ab)_T) \otimes \alpha_H(h)_T = \alpha_B(a_T)\alpha_B(b)_T \otimes h_T; \quad (4)$$

$$\alpha_B(b)_T \otimes (\alpha_H(h)_T) = b_T \otimes \alpha_H^{-1}(\alpha_H(h)_T)g_T. \quad (5)$$

任给 $h, g \in H$ 和 $a, b \in B$.

设 (B, α_B, S_B) 和 (H, α_H, S_H) 为 Hom-Hopf 代数, 线性映射 $T : H \otimes B \rightarrow B \otimes H$. 如果 Hom-smash 积代数结构和张量余积 Hom- 余代数结构构成一个 Hom- 双代数, 称之为 Hom-T-smash 双代数, 记为 $B \bowtie_T H$ ^[10].

命题 2^[10] 设 (B, α_B) 和 (H, β_H) 为 Hom-Hopf 代数, 线性映射 $T : H \otimes B \rightarrow B \otimes H$. 则 $B \#_T H$ 为一个 Hom-T-smash 积当且仅当条件 (2) ~ (5) 成立和 T 为余代数映射, 即

$$b_{T(1)} \otimes h_{T(1)} \otimes b_{T(2)} \otimes h_{T(2)} = b_{(1)T} \otimes h_{(1)T} \otimes b_{(2)T} \otimes h_{(2)T}, \epsilon_B(b_T)\epsilon_H(h_T) = \epsilon_B(b)\epsilon_H(h),$$

并且, Hom-T-smash 积 Hom- 双代数 $(B \bowtie_T H, \alpha_B \otimes \alpha_H)$ 为 Hom-Hopf 代数, 其反对极为

$$S(b \otimes h) = \alpha_B^{-1}(S_B(b))_T \otimes \alpha_H^{-1}(S_H(h)_T),$$

对任意的 $h \in H$ 和 $b \in B$.

定义 4 设 (B, α_B, S_B) 和 (H, α_H, S_H) 为 Hom- 双代数. 线性映射 $T : H \otimes B \rightarrow B \otimes H$ 称为 Hom- 右余正规的, 若对任意的 $h \in H$ 和 $b \in B$ 都有

$$\epsilon_B(b_T)h_T = \epsilon_B(b)\alpha_H(h). \quad (6)$$

例 1 设 (B, α_B, S_B) 和 (H, α_H, S_H) 为 Hom-Hopf 代数, 线性映射 $T = \tau_{H,B} : H \otimes B \rightarrow B \otimes H$. 则 $(B \bowtie_T H, \alpha_B \otimes \alpha_H)$ 是通常的张量积 Hom-Hopf 代数.

下面的引理, 将给出 Hom-T-smash 积 Hopf 代数 $B \bowtie_T H$ 的一些性质, 其中 T 是 Hom- 右余正规线性映射.

引理 1 设 $(B \bowtie_T H, \alpha_B \otimes \alpha_H)$ 为一个 Hom-T-smash 积 Hopf 代数, T 是 Hom- 右余正规线性映射. 则对任意的 $h \in H$ 和 $a, b \in B$ 有

$$\alpha_B^{-1}(\alpha_B(b)_T)\epsilon_H(h_{(1)T}) \otimes h_{(2)} = b_T \otimes h_T = \alpha_B^{-1}(\alpha_B(b)_T)\epsilon_H(h_{(2)T}) \otimes h_{(1)}, \quad (7)$$

$$\alpha_B((ab)_T)\epsilon_H(\alpha_H(h)_T) = \alpha_B(a)_T\alpha_B(b)_T\epsilon_H(h_{(1)T})\epsilon_H(h_{(2)T}) = \alpha_B(a)_T\alpha_B(b)_T\epsilon_H(h_{(2)T})\epsilon_H(h_{(1)T}). \quad (8)$$

证明 因为 T 是余代数映射, 则对任意的 $h \in H$ 和 $b \in B$ 有 $b_{T(1)} \otimes h_{T(1)} \otimes b_{T(2)} \otimes h_{T(2)} = b_{(1)T} \otimes h_{(1)T} \otimes b_{(2)T} \otimes h_{(2)T}$, 以 $(\epsilon_B \otimes id_H \otimes id_B \otimes id_H)$ 作用等式两边, 利用 (6) 式, 得到 $b_T \otimes h_T = \alpha_B^{-1}(\alpha_B(b)_T)\epsilon_H(h_{(1)T}) \otimes h_{(2)}$. 同理可得 $b_T \otimes h_T = \alpha_B^{-1}(\alpha_B(b)_T)\epsilon_H(h_{(2)T}) \otimes h_{(1)}$. 因此 (7) 成立.

(8) 可以由(7)和(4)得到. 事实上,有

$$\alpha_B((ab)_T)\varepsilon_H(\alpha_H(h)_T) \underline{(4)}\alpha_B(a_T)\alpha_B(b)_i\varepsilon_H(h_T) \underline{(7)}\alpha_B(a)_T\alpha_B(b)_i\varepsilon_H(h_{(1)T})\varepsilon_H(h_{(2)_i}),$$

同理,有 $\alpha_B((ab)_T)\varepsilon_H(\alpha_H(h)_T) \underline{(4)}\alpha_B(a_T)\alpha_B(b)_i\varepsilon_H(h_T) \underline{(7)}\alpha_B(a)_T\alpha_B(b)_i\varepsilon_H(h_{(2)T})\varepsilon_H(h_{(1)_i})$.

证毕.

下面回顾一下拟三角 Hom-Hopf 代数的定义,并给出一些相关的概念.

定义 5^[9,13] 设 (H, α_H) 是一个 Hom-Hopf 代数, $R = R^{(1)} \otimes R^{(2)} \in H \otimes H$. (H, R) 称为拟三角 Hom-Hopf 代数,如果对任意的 $h \in H$, 下列条件成立($R = r$):

- 1) $\Delta_H(R^{(1)}) \otimes \alpha_H(R^{(2)}) = \alpha_H(R^{(1)}) \otimes \alpha_H(r^{(1)}) \otimes R^{(2)}r^{(2)}$; 2) $\varepsilon_H(R^{(1)})R^{(2)} = 1_H$;
- 3) $\alpha_H(R^{(1)}) \otimes \Delta_H(R^{(2)}) = R^{(1)}r^{(1)} \otimes \alpha_H(r^{(2)}) \otimes \alpha_H(R^{(2)})$; 4) $R^{(1)}\varepsilon_H(R^{(2)}) = 1_H$;
- 5) $\Delta_H^{\text{op}}(h)R = R\Delta_H(h)$; 6) $(\alpha_H \otimes \alpha_H) \circ R = R$.

此外, R 可逆, 其逆为: $R^{-1} = S_H(R^{(1)}) \otimes R^{(2)}$.

定义 6 设 (B, α_B) 和 (H, α_H) 为 Hom-Hopf 代数. (B, H, U) 称为对偶相容 Hom- U -Hopf 代数对, 如果对 $U = U^{(1)} \otimes U^{(2)} \in B \otimes H$, 下列条件成立($U = u$):

- 1) $\Delta_B(U^{(1)}) \otimes \alpha_H(U^{(2)}) = \alpha_B(U^{(1)}) \otimes \alpha_B(u^{(1)}) \otimes U^{(2)}u^{(2)}$; 2) $\varepsilon_B(U^{(1)})U^{(2)} = 1_H$;
- 3) $\alpha_B(U^{(1)}) \otimes \Delta_H(U^{(2)}) = u^{(1)}U^{(1)} \otimes \alpha_H(u^{(2)}) \otimes \alpha_H(U^{(2)})$; 4) $U^{(1)}\varepsilon_H(U^{(2)}) = 1_B$.

定义 7 设 (B, α_B) 和 (H, α_H) 为 Hom-Hopf 代数. (B, H, V) 称为斜对偶相容 Hom- V -Hopf 代数对, 如果对 $V = V^{(1)} \otimes V^{(2)} \in H \otimes B$, 下列条件成立($V = v$):

- 1) $\Delta_H(V^{(1)}) \otimes \alpha_B(V^{(2)}) = \alpha_H(V^{(1)}) \otimes \alpha_H(v^{(1)}) \otimes v^{(2)}V^{(2)}$; 2) $\varepsilon_H(V^{(1)})V^{(2)} = 1_B$;
- 3) $\alpha_H(V^{(1)}) \otimes \Delta_B(V^{(2)}) = v^{(1)}V^{(1)} \otimes \alpha_H(V^{(2)}) \otimes \alpha_H(v^{(2)})$; 4) $V^{(1)}\varepsilon_B(V^{(2)}) = 1_H$.

定义 8 设 (B, α_B) 和 (H, α_H) 为 Hom-Hopf 代数, $T: H \otimes B \rightarrow B \otimes H$. (B, H, U) 为对偶相容 Hom- U -Hopf 代数对, (B, H, V) 为斜对偶相容 Hom- V -Hopf 代数对. (B, P) 称为 (U, V) -弱拟三角 Hom-Hopf 代数, 如果对任意的 $b \in B$, $P = P^{(1)} \otimes P^{(2)} \in B \otimes B$, 下列条件成立($P = p$):

- 1) $\Delta_B(P^{(1)}) \otimes \alpha_B(P^{(2)}) = P^{(1)}U^{(1)} \otimes \alpha_B(p^{(1)}) \otimes P^{(2)}\alpha_B^{-1}((p^{(2)})_i)\varepsilon_B(\alpha_H(U^{(2)}_i))$;
- 2) $\varepsilon_B(P^{(1)})P^{(2)} = 1_B$; 3) $\varepsilon_B(P^{(1)}) \otimes \Delta_B(P^{(2)}) = P^{(1)}\alpha_B^{-1}((p^{(1)})_i)\varepsilon_B(\alpha_H(V^{(1)}_i)) \otimes \alpha_B(p^{(2)}) \otimes P^{(2)}V^{(2)}$;
- 4) $P^{(1)}\varepsilon_B(P^{(2)}) = 1_B$; 5) $b_{(2)}\alpha_B(P^{(1)}) \otimes b_{(1)}\alpha_B(P^{(2)}) = (P^{(1)}U^{(1)})\alpha_B^{-1}(b_{(1)})_T\varepsilon_H(\alpha_H(V^{(1)}_T)) \otimes \alpha_B(P^{(2)})(\alpha_B^{-2}(b_{(2)})_TV^{(2)})\varepsilon_H(U_i^{(2)})$.

2 Hom-T-smash 积 Hom-Hopf 代数 $B \bowtie_T H$ 上的拟三角结构

本节总假定 (B, α_B) 和 (H, α_H) 为 Hom-Hopf 代数, 线性映射 $T: H \otimes B \rightarrow B \otimes H$ 是 Hom-右余正规的并且使得 $B \bowtie_T H$ 成为 Hom-T-smash 积 Hom-Hopf 代数, 则有下面引理.

引理 2 设 $(B \bowtie_T H, \alpha_B \otimes \alpha_H)$ 为 Hom-T-smash 积 Hom-Hopf 代数, 定义 $\rho: B \bowtie_T H \rightarrow B, \rho(b \otimes h) = \varepsilon_H(h)b; \pi: B \bowtie_T H \rightarrow H, \pi(b \otimes h) = \varepsilon_B(b)h$, 对任意的 $b \otimes h \in B \bowtie_T H$. 则

- 1) ρ 是 Hom-余代数映射, 且 $\rho((a \otimes h)(b \otimes g)) = \alpha_B^{-1}(b)_T\varepsilon_H(h_T)\varepsilon_H(g)$; 2) π 是 Hom-双代数映射.

证明 直接验证即可.

设 $(B \bowtie_T H, \alpha_B \otimes \alpha_H, R)$ 为拟三角 Hom-Hopf 代数, 且

$$R = R^{(1)} \otimes R^{(2)} \otimes R^{(3)} \otimes R^{(4)} \in B \bowtie_T H \otimes B \bowtie_T H.$$

设

$$P = R^{(1)}\varepsilon_H(R^{(2)}) \otimes R^{(3)}\varepsilon_H(R^{(4)}) = P^{(1)} \otimes P^{(2)} \in B \otimes B, \quad (9)$$

$$Q = \varepsilon_B(R^{(1)})R^{(2)} \otimes \varepsilon_B(R^{(3)})R^{(4)} = Q^{(1)} \otimes Q^{(2)} \in H \otimes H, \quad (10)$$

$$U = R^{(1)}\varepsilon_H(R^{(2)}) \otimes \varepsilon_B(R^{(3)})R^{(4)} = U^{(1)} \otimes U^{(2)} \in B \otimes H, \quad (11)$$

$$V = \varepsilon_B(R^{(1)})R^{(2)} \otimes R^{(3)}\varepsilon_H(R^{(4)}) = V^{(1)} \otimes V^{(2)} \in H \otimes B. \quad (12)$$

于是有下面命题.

命题 3 设 $(B \bowtie_T H, \alpha_B \otimes \alpha_H)$ 为 Hom-T-smash 积 Hom-Hopf 代数, $R = R^{(1)} \otimes R^{(2)} \otimes R^{(3)} \otimes R^{(4)} \in$

$B \bowtie_{\tau} TH \otimes B \bowtie_{\tau} TH$, P, Q, U, V 如(9) ~ (12) 给定. 如果 R 满足定义 5 中 2)、4) 式, 则有

$$P^{(1)} \varepsilon_B(P^{(2)}) = \varepsilon_B(P^{(1)}) P^{(2)} = 1_B; \quad (13)$$

$$Q^{(1)} \varepsilon_H(Q^{(2)}) = \varepsilon_H(Q^{(1)}) Q^{(2)} = 1_H; \quad (14)$$

$$\varepsilon_B(U^{(1)}) U^{(2)} = 1_H, U^{(1)} \varepsilon_H(U^{(2)}) = 1_B; \quad (15)$$

$$\varepsilon_H(V^{(1)}) V^{(2)} = 1_B, V^{(1)} \varepsilon_B(V^{(2)}) = 1_H. \quad (16)$$

证明 直接验证即可.

命题 4 设 $(B \bowtie_{\tau} TH, \alpha_B \otimes \alpha_H)$ 为 Hom- T -smash 积 Hom-Hopf 代数, $R = R^{(1)} \otimes R^{(2)} \otimes R^{(3)} \otimes R^{(4)} \in B \bowtie_{\tau} TH \otimes B \bowtie_{\tau} TH$, P, Q, U, V 如(9) ~ (12) 给定. 如果 $(B \bowtie_{\tau} TH, R)$ 为拟三角 Hom-Hopf 代数, 则对任意的 $b \in B$, 有

$$R^{(1)} b_{\tau_H}(R_T^{(2)}) \otimes \varepsilon_B(R^{(3)}) R^{(4)} = \alpha_B(b) R^{(1)} \varepsilon_H(R^{(2)}) \otimes \varepsilon_B(R^{(3)}) R^{(4)}; \quad (17)$$

$$\varepsilon_B(R^{(1)}) R^{(2)} \otimes R^{(3)} b_{\tau_H}(R_T^{(4)}) = \varepsilon_B(R^{(1)}) R^{(2)} \otimes \alpha_B(b) R^{(3)} \varepsilon_H(R^{(4)}); \quad (18)$$

$$R = P^{(1)} U^{(1)} \otimes Q^{(1)} V^{(1)} \otimes P^{(2)} V^{(2)} \otimes Q^{(2)} U^{(2)}. \quad (19)$$

证明 因为 $(B \bowtie_{\tau} TH, \alpha_B \otimes \alpha_H, R)$ 为拟三角 Hom-Hopf 代数, 则对任意的 $h \in H$ 和 $b \in B$, 有 $\Delta_{B \bowtie_{\tau} TH}^{\rho}(b \otimes h)R = R \Delta_{B \bowtie_{\tau} TH}(b \otimes h)$. 因此, 有等式

$$\begin{aligned} R^{(1)} \alpha_B^{-1}(b_{(1)})_T \otimes \alpha_H^{-1}(R^{(2)}_T) h_{(1)} \otimes R^{(3)} \alpha_B^{-1}(b_{(2)})_i \otimes \alpha_H^{-1}(R^{(4)}_i) h_{(2)} = \\ b_{(2)} \alpha_B^{-1}(R^{(1)})_T \otimes \alpha_H^{-1}(h_{(2)T}) R^{(2)} \otimes b_{(1)} \alpha_B^{-1}(R^{(3)})_i \otimes \alpha_H^{-1}(h_{(1)i}) R^{(4)}. \end{aligned} \quad (20)$$

在(20)中取 $h = 1_H$, 再用 $(\rho \otimes \pi)$ 作用等式(20)两边, 可得(17). 在(20)中取 $h = 1_H$, 再用 $(\pi \otimes \rho)$ 作用等式(20)两边, 可得到(18).

对于(19)有以下计算. 由定义 5 中 1) 和 3) 式, 有

$$\begin{aligned} (\Delta_{B \bowtie_{\tau} TH} \otimes \Delta_{B \bowtie_{\tau} TH})(\alpha_B(R^{(1)}) \otimes \alpha_H(R^{(2)}) \otimes \alpha_B(R^{(3)}) \otimes \alpha_H(R^{(4)})) = \\ \Delta_{B \bowtie_{\tau} TH}(\alpha_B(R^{(1)}) \otimes \alpha_H(R^{(2)})) \otimes \Delta_{B \bowtie_{\tau} TH}(\alpha_B(R^{(3)}) \otimes \alpha_H(R^{(4)})) = \\ \Delta_{B \bowtie_{\tau} TH}((\alpha_B(R^{(1)}) \otimes \alpha_H(R^{(2)}))(\alpha_B(r^{(1)}) \otimes \alpha_H(r^{(2)}))) \otimes \\ ((\alpha_B \otimes \alpha_H) \otimes (\alpha_B \otimes \alpha_H))^2((r^{(3)} \otimes r^{(4)}) \otimes (R^{(3)} \otimes R^{(4)})) = \\ \Delta_B \triangleright \triangleleft_{\tau} TH(\alpha_B(R^{(1)}) \otimes \alpha_H(R^{(2)})) \Delta_{B \bowtie_{\tau} TH}(\alpha_B(r^{(1)}) \otimes \alpha_H(r^{(2)})) \otimes \\ ((\alpha_B \otimes \alpha_H) \otimes (\alpha_B \otimes \alpha_H))^2((r^{(3)} \otimes r^{(4)}) \otimes (R^{(3)} \otimes R^{(4)})) = \\ ((\alpha_B \otimes \alpha_H) \otimes (\alpha_B \otimes \alpha_H))(R^{(1)} \otimes R^{(2)} \otimes \bar{R}^{(1)} \otimes \bar{R}^{(2)})((\alpha_B \otimes \alpha_H) \otimes \\ (\alpha_B \otimes \alpha_H))(r^{(1)} \otimes r^{(2)} \otimes \bar{r}^{(1)} \otimes \bar{r}^{(2)}) \otimes ((\alpha_B \otimes \alpha_H) \otimes (\alpha_B \otimes \alpha_H)) \cdot \\ ((r^{(3)} \otimes r^{(4)})(r^{(3)} \otimes \bar{r}^{(4)}) \otimes (R^{(3)} \otimes R^{(4)})(\bar{R}^{(3)} \otimes \bar{R}^{(4)})). \end{aligned}$$

由定义 2 中 1) 式, 上式等价于

$$\begin{aligned} (\Delta_{B \bowtie_{\tau} TH} \otimes \Delta_{B \bowtie_{\tau} TH})(R^{(1)} \otimes R^{(2)} \otimes R^{(3)} \otimes R^{(4)}) = \\ (R^{(1)} \otimes R^{(2)} \otimes \bar{R}^{(1)} \otimes \bar{R}^{(2)})(r^{(1)} \bar{r}^{(2)} \otimes \bar{r}^{(1)} r^{(2)}) \otimes \\ ((r^{(3)} \otimes r^{(4)})(r^{(3)} \otimes \bar{r}^{(4)}) \otimes (R^{(3)} \otimes R^{(4)})(\bar{R}^{(3)} \otimes \bar{R}^{(4)})), \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} R^{(1)}_{(1)} \otimes R^{(2)}_{(1)} \otimes R^{(1)}_{(2)} \otimes R^{(2)}_{(2)} \otimes R^{(3)}_{(1)} \otimes R^{(4)}_{(1)} \otimes R^{(3)}_{(2)} \otimes R^{(4)}_{(2)} = \\ R^{(1)} \alpha_B^{-1}(r^{(1)})_T \otimes \alpha_H^{-1}(R^{(2)}_T) r^{(2)} \otimes \bar{R}^{(1)} \alpha_B^{-1}(r^{(1)})_T \otimes \alpha_H^{-1}(\bar{R}^{(2)}_T) \bar{r}^{(2)} \otimes \\ r^{(3)} \alpha_B^{-1}(r^{(3)})_i \otimes \alpha_H^{-1}(r^{(4)}_i) r^{(4)} \otimes R^{(3)} \alpha_B^{-1}(\bar{R}^{(3)})_i \otimes \alpha_H^{-1}(R^{(4)}_i) \bar{R}^{(4)}. \end{aligned} \quad (21)$$

用 $(\pi \otimes \rho \otimes \rho \otimes \pi)$ 作用等式(21)两边, 有

$$\begin{aligned} R^{(2)} \otimes R^{(1)} \otimes R^{(3)} \bar{R}^{(4)} = \varepsilon_B(R^{(1)} \alpha_B^{-1}(r^{(1)})_T) \alpha_H^{-1}(R^{(2)}_T) r^{(2)} \otimes \bar{R}^{(1)} \alpha_B^{-1}(r^{(1)})_T \alpha_H^{-1}(\bar{R}^{(2)}_T) \bar{r}^{(2)} \otimes \\ r^{(3)} \alpha_B^{-1}(r^{(3)})_i \alpha_H^{-1}(r^{(4)}_i) r^{(4)} \otimes \varepsilon_B(R^{(3)} \alpha_B^{-1}(\bar{R}^{(3)})_i) \alpha_H^{-1}(R^{(4)}_i) \bar{R}^{(4)} \quad (6) \varepsilon_B(R^{(1)} r^{(1)}) R^{(2)} r^{(2)} \otimes \\ \bar{R}^{(1)} \alpha_B^{-1}(r^{(1)})_T \varepsilon_H(\bar{R}^{(2)} \bar{r}^{(2)}) \otimes r^{(3)} \alpha_B^{-1}(r^{(3)})_i \varepsilon_H(r^{(4)} r^{(4)}) \otimes \varepsilon_B(R^{(3)} \bar{R}^{(3)})_i R^{(4)} \bar{R}^{(4)} \quad (17) \\ \varepsilon_B(R^{(1)} r^{(1)}) R^{(2)} r^{(2)} \otimes \bar{r}^{(1)} \bar{R}^{(1)} \varepsilon_H(\bar{R}^{(2)} \bar{r}^{(2)}) \otimes r^{(3)} \alpha_B^{-1}(r^{(3)})_i \varepsilon_H(r^{(4)} r^{(4)}) \otimes \varepsilon_B(R^{(3)} \bar{R}^{(3)})_i R^{(4)} \bar{R}^{(4)} \quad (18) \\ \varepsilon_B(R^{(1)} r^{(1)}) R^{(2)} r^{(2)} \otimes \bar{r}^{(1)} \bar{R}^{(1)} \varepsilon_H(\bar{R}^{(2)} \bar{r}^{(2)}) \otimes r^{(3)} \alpha_B^{-1}(r^{(3)})_i \varepsilon_H(r^{(4)} r^{(4)}) \otimes \varepsilon_B(R^{(3)} \bar{R}^{(3)})_i R^{(4)} \bar{R}^{(4)}, \end{aligned}$$

即有 $R = P^{(1)} U^{(1)} \otimes Q^{(1)} V^{(1)} \otimes P^{(2)} V^{(2)} \otimes Q^{(2)} U^{(2)}$. 证毕.

命题 5 设 $(B \bowtie_T H, \alpha_B \otimes \alpha_H, R)$ 为拟三角 Hom-Hopf 代数, 则 R 可以分解为 $R = P^{(1)}U^{(1)} \otimes Q^{(1)}V^{(1)} \otimes P^{(2)}V^{(2)} \otimes Q^{(2)}U^{(2)}$, 使得 P, Q, U, V 满足下列条件 ($T = t$).

- (i) $U^{(1)}\alpha_B^{-1}(b_T)\varepsilon_H(\alpha_H(Q^{(1)}_T) \otimes Q^{(2)}U^{(2)}) = bU^{(1)} \otimes \alpha_H(U^{(2)}),$
- (ii) $Q^{(1)}V^{(1)} \otimes V^{(2)}\alpha_B^{-1}(b_T)\varepsilon_H(\alpha_H(Q^{(2)}_T)) = \alpha_H(V^{(1)}) \otimes bV^{(2)},$
- (iii) $\alpha_B(U^{(1)}) \otimes U^{(2)}h = U_T^{(1)}\varepsilon_H(h_{(2)}T) \otimes \alpha_H^{-1}(h_{(1)})U^{(2)},$
- (iv) $V^{(1)}h \otimes \alpha_B(V^{(2)}) = \alpha_H^{-1}(h_{(2)})V^{(1)} \otimes V_T^{(2)}\varepsilon_H(h_{(1)}T),$
- (v) $\alpha_B(P^{(1)}) \otimes \alpha_B(P^{(2)})\varepsilon_H(h) = P_T^{(1)}\varepsilon_H(h_{(2)}T) \otimes P_t^{(2)} \otimes_H(h_{(1)}t),$
- (vi) $\alpha_B(P^{(1)}) \otimes V^{(1)} \otimes P^{(2)}V^{(2)} = P^{(1)}U^{(1)} \otimes V^{(1)} \otimes P^{(2)}\alpha_B^{-1}(V^{(2)})\varepsilon_H(\alpha_H(U^{(2)}_T)),$
- (vii) $P^{(1)}U^{(1)} \otimes U^{(2)} \otimes \alpha_B(P^{(2)}) = P^{(1)}\alpha_B^{-1}(U_T^{(1)})\varepsilon_H(\alpha_H(V^{(1)}_T)) \otimes U^{(2)} \otimes P^{(2)}V^{(2)},$
- (viii) $U^{(1)} \otimes Q^{(1)} \otimes Q^{(2)}U^{(2)} = U^{(1)} \otimes Q^{(1)} \otimes U^{(2)}Q^{(2)},$
- (ix) $Q^{(1)}V^{(1)} \otimes Q^{(2)} \otimes V^{(2)} = V^{(1)}Q^{(1)} \otimes Q^{(2)} \otimes V^{(2)},$

这里 $h \in H$ 和 $a, b \in B$.

证明 因为 R 满足定义 5 中 5) 式, 故对任意的 $h \in H$ 和 $b \in B$, 有

$$\Delta_{B \bowtie_T H}^{\alpha_B}(b \otimes h)R = R\Delta_{B \bowtie_T H}(b \otimes h),$$

因此, 有

$$\begin{aligned} & (P^{(1)}U^{(1)})\alpha_B^{-1}(b_{(1)})_T \otimes \alpha_H^{-1}((Q^{(1)}V^{(1)})_T)h_{(1)} \otimes (P^{(2)}V^{(2)})\alpha_B^{-1}(b_{(2)})_t \otimes \alpha_H^{-1}((Q^{(2)}V^{(2)})_t)h_{(2)} = \\ & b_{(2)}\alpha_B^{-1}(P^{(1)}U^{(1)})_T \otimes \alpha_H^{-1}(h_{(2)}T)(Q^{(1)}V^{(1)}) \otimes b_{(1)}\alpha_B^{-1}(P^{(2)}V^{(2)})_t \otimes \alpha_H^{-1}(h_{(1)}t)(Q^{(2)}U^{(2)}). \end{aligned} \quad (22)$$

令 $h = 1_H$, 并以 $(\rho \otimes \pi)$ 作用等式 (22) 两边, 可得 (i); 令 $h = 1_H$, 以 $(\pi \otimes \rho)$ 作用等式 (22) 两边, 可得 (ii); 令 $b = 1_B$, 以 $(\rho \otimes \pi)$ 作用等式 (22) 两边, 可得 (iii); 令 $b = 1_B$, 以 $(\pi \otimes \rho)$ 作用等式 (22) 两边, 可得 (iv); 令 $b = 1_B$, 以 $(\rho \otimes \rho)$ 作用等式 (22) 两边, 可得 (v).

由定义 5 中 1) 式有

$$\begin{aligned} & P^{(1)}_{(1)}U^{(1)}_{(1)} \otimes Q^{(1)}_{(1)}V^{(1)}_{(1)} \otimes P^{(1)}_{(2)}U^{(1)}_{(2)} \otimes Q^{(1)}_{(2)}V^{(1)}_{(2)} \otimes \alpha_B(P^{(2)}V^{(2)}) \otimes \alpha_H(Q^{(2)}U^{(2)}) = \\ & \alpha_B(P^{(1)}U^{(1)}) \otimes \alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)}) \otimes \alpha_B(\bar{P}^{(1)}\bar{U}^{(1)}) \otimes \alpha_H(\bar{Q}^{(1)}\bar{V}^{(1)}) \otimes \\ & (P^{(2)}V^{(2)})\alpha_B^{-1}(\bar{P}^{(2)}\bar{V}^{(2)})_T \otimes \alpha_H^{-1}((Q^{(2)}U^{(2)})_T)(\bar{Q}^{(2)}\bar{U}^{(2)}). \end{aligned} \quad (23)$$

以 $(\rho \otimes \pi \otimes \rho)$ 作用等式 (23) 两边, 可得 (vi). 以 $(\rho \otimes \pi \otimes \pi)$ 作用等式 (23) 两边, 可得 (viii).

由定义 5 中 3) 式有

$$\begin{aligned} & \alpha_B(P^{(1)}U^{(1)}) \otimes \alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)}) \otimes P^{(2)}_{(1)}V^{(2)}_{(1)} \otimes Q^{(2)}_{(1)}U^{(2)}_{(1)} \otimes P^{(2)}_{(2)}V^{(2)}_{(2)} \otimes Q^{(2)}_{(2)}U^{(2)}_{(2)} = \\ & (P^{(1)}U^{(1)})\alpha_B^{-1}(\bar{P}^{(1)}\bar{U}^{(1)})_T \otimes \alpha_H^{-1}((Q^{(1)}V^{(1)})_T)(\bar{Q}^{(1)}\bar{V}^{(1)}) \otimes \\ & \alpha_B(\bar{P}^{(2)}\bar{V}^{(2)}) \otimes \alpha_H(\bar{Q}^{(2)}\bar{U}^{(2)}) \otimes \alpha_B(P^{(2)}V^{(2)}) \otimes \alpha_H(Q^{(2)}U^{(2)}). \end{aligned} \quad (24)$$

以 $(\rho \otimes \pi \otimes \rho)$ 作用等式 (23) 两边, 可得 (vii). 以 $(\pi \otimes \pi \otimes \rho)$ 作用等式 (23) 两边, 可得 (ix). 证毕.

定理 1 设 $(B \bowtie_T H, \alpha_B \otimes \alpha_H, R)$ 为拟三角 Hom-Hopf 代数, 则 R 可以分解为

$$R = P^{(1)}U^{(1)} \otimes Q^{(1)}V^{(1)} \otimes P^{(2)}V^{(2)} \otimes Q^{(2)}U^{(2)},$$

1) (H, Q) 为拟三角 Hom-Hopf 代数; 2) (B, H, U) 为对偶相容 Hom- U -Hopf 代数对; 3) (H, B, V) 斜对偶相容 Hom- V -Hopf 代数对; 4) (B, P) 为 (U, V) -弱拟三角 Hom-Hopf 代数.

证明 1) 由引理 2, 知道 $(\pi \otimes \pi) : B \bowtie_T H \otimes B \bowtie_T H \rightarrow H \otimes H$ 是 Hom-双代数映射, 且由 $(\pi \otimes \pi)R = (\pi \otimes \pi) \circ (\alpha_B \otimes \alpha_H)R$ 知 $(\pi \otimes \pi)R = Q^{(1)} \otimes Q^{(2)} = Q$. 则容易验证 (H, Q) 为拟三角 Hom-Hopf 代数. 故定理中 1) 得证.

2) 由 (15) 知, 定义 6 中 2)、4) 式成立. 以 $(\rho \otimes \rho \otimes \pi)$ 作用等式 (23) 两边, 有

$$U^{(1)}_{(1)} \otimes U^{(1)}_{(2)} \otimes \alpha_H(U^{(2)}) = \alpha_B(U^{(1)}) \otimes \alpha_B(\bar{U}^{(1)}) \otimes U^{(2)}\bar{U}^{(2)},$$

即知定义 6 中 1) 式对 U 成立. 以 $(\rho \otimes \pi \otimes \pi)$ 作用等式 (24) 两边, 有

$$\begin{aligned} & \alpha_B(U^{(1)}) \otimes U^{(2)}_{(1)} \otimes U^{(2)}_{(2)} = U^{(1)}\alpha_B^{-1}(\bar{U}_T^{(1)})\varepsilon_H(\alpha_H(Q^{(1)}_T)) \otimes \alpha_H(\bar{U}^{(2)}) \otimes \alpha_H(Q^{(2)}U^{(2)}) \quad \text{(i)} \\ & \bar{U}^{(1)}U^{(1)} \otimes \alpha_H(\bar{U}U^{(2)}) \otimes \alpha_H(U^{(2)}), \end{aligned}$$

知定义 6 中 3) 式对 U 成立. 从而定理中 2) 得证.

3) 由 (16) 知, 定义 7 中 2)、4) 式成立, 以 $(\pi \otimes \pi \otimes \rho)$ 作用等式 (23) 两边, 有

$$\alpha_H(V^{(1)}_{(1)}) \otimes \alpha_H(V^{(1)}_{(2)}) \otimes \alpha_B^2(V^{(2)}) = \alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)}) \otimes \alpha_H^2(\bar{V}^{(1)}) \otimes \alpha_B(V^{(2)})\bar{V}_T^{(2)}\varepsilon_H(\alpha_H(Q^{(2)})_T) \quad (16)$$

$$\alpha_H^2(V^{(1)}) \otimes \alpha_H^2(\bar{V}^{(1)}) \otimes \alpha_B(V^{(2)}\bar{V}^{(2)}),$$

即得定义 7 中 1) 式成立. 再以 $(\pi \otimes \rho \otimes \rho)$ 作用等式(24) 两边, 易证定义 7 中 3) 式成立. 从而定理 1 中 3) 式得证.

4) 由(14) 知, 定义 8 中 2, 4) 式成立, 以 $(\rho \otimes \rho \otimes \rho)$ 作用等式(23) 两边, 有

$$\alpha_B(P^{(1)}) \otimes \Delta_B(P^{(2)}) = P^{(1)}\alpha_B^{-1}((p^{(1)}), \alpha_B(\alpha_H(V^{(1)}), i) \otimes \alpha_B(p^{(2)}) \otimes P^{(2)}V^{(2)}.$$

即知定义 8 中 3) 式成立, 在(22) 式中, 令 $h = 1_H$, 并以 $(\rho \otimes \rho)$ 作用两边, 由(ii) 可得定义 8 中 5) 式成立. 故定理中 4) 得证. 至此, 定理的证明全部完成.

下面证明上述条件也是充分的.

定理 2 设 $(B \bowtie_T H, \alpha_B \bowtie \alpha_H)$ 为 Hom-T-smash 积 Hom-Hopf 代数. $P = P^{(1)} \otimes P^{(2)} \in B \otimes B, Q = Q^{(1)} \otimes Q^{(2)} \in H \otimes H, U = U^{(1)} \otimes U^{(2)} \in B \otimes H, V = V^{(1)} \otimes V^{(2)} \in H \otimes B$, 使得

- 1) (H, Q) 为拟三角 Hom-Hopf 代数;
- 2) (B, H, U) 为对偶相容 Hom-U-Hopf 代数对;
- 3) (H, B, V) 斜对偶相容 Hom-V-Hopf 代数对;
- 4) (B, P) 为 (U, V) -弱拟三角 Hom-Hopf 代数;
- 5) P, Q, U, V 满足命题 5 中条件(i) - (ix).

则 $(B \bowtie_T H, \alpha_B \otimes \alpha_H, R)$ 为拟三角 Hom-Hopf 代数, 其中

$$R = P^{(1)}U^{(1)} \otimes Q^{(1)}V^{(1)} \otimes P^{(2)}V^{(2)} \otimes Q^{(2)}U^{(2)}.$$

证明 容易验证 R 满足定义 5 中 2) 和 4) 式. 下面验证 R 满足定义 5 中条件 1).

$$\begin{aligned} & \Delta_{\bowtie_T H}(P^{(1)}U^{(1)} \otimes Q^{(1)}V^{(1)}) \otimes \alpha_B(P^{(2)}V^{(2)}) \otimes \alpha_H(Q^{(2)}U^{(2)}) = P^{(1)}_{(1)}U^{(1)}_{(1)} \otimes Q^{(1)}_{(1)}V^{(1)}_{(1)} \otimes \\ & P^{(1)}_{(2)}U^{(1)}_{(2)} \otimes Q^{(1)}_{(2)}V^{(1)}_{(2)} \otimes \alpha_B(P^{(2)}V^{(2)}) \otimes \alpha_H(Q^{(2)}U^{(2)})P^{(1)}_{(1)}U^{(1)}_{(1)} \otimes \alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)})_{(1)} \otimes \\ & P^{(1)}_{(2)}U^{(1)}_{(2)} \otimes \alpha_H(\bar{Q}^{(1)}V^{(1)})_{(2)} \otimes \alpha_B(P^{(2)}V^{(2)}) \otimes (Q^{(2)}\bar{Q}^{(2)})\alpha_H(U^{(2)}) = P^{(1)}_{(1)}\alpha_B(U^{(1)}) \otimes \\ & \alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)})_{(1)} \otimes P^{(1)}_{(2)}\alpha_B(\bar{U}^{(1)}) \otimes \alpha_H(\bar{Q}^{(1)}V^{(1)})_{(2)} \otimes \alpha_B(P^{(2)}V^{(2)}) \otimes (Q^{(2)}\bar{Q}^{(2)})(U^{(2)}\bar{U}^{(2)}) = P^{(1)}_{(1)}\alpha_B(U^{(1)}) \otimes \\ & \alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)}) \otimes P^{(1)}_{(2)}\alpha_B(\bar{U}^{(1)}) \otimes \alpha_H(\bar{Q}^{(1)}\bar{V}^{(1)}) \otimes \alpha_B(P^{(2)})(\bar{V}^{(2)}V^{(2)}) \otimes (Q^{(2)}\bar{Q}^{(2)})(U^{(2)}\bar{U}^{(2)}) \quad \text{(viii)} \\ & P^{(1)}_{(1)}\alpha_B(U^{(1)}) \otimes \alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)}) \otimes P^{(1)}_{(2)}\alpha_B(\bar{U}^{(1)}) \otimes \alpha_H(\bar{Q}^{(1)}\bar{V}^{(1)}) \otimes \alpha_B(P^{(2)})(\bar{V}^{(2)}V^{(2)}) \otimes \\ & (Q^{(2)}U^{(2)})(\bar{Q}^{(2)}\bar{U}^{(2)}) \quad \text{(vi)}\alpha_B^{-1}(P^{(1)}_{(1)}u^{(1)}_{(1)})\alpha_B(U^{(1)}) \otimes \alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)}) \otimes \alpha_B^{-1}(P^{(1)}_{(2)}u^{(1)}_{(2)})\alpha_B(\bar{U}^{(1)}) \otimes \\ & \alpha_H(\bar{Q}^{(1)}\bar{V}^{(1)}) \otimes (P^{(2)}\alpha_B^{-1}(\bar{V}_i^{(2)}))\alpha_B(V^{(2)})\varepsilon_H(\alpha_H(u^{(2)}), i) \otimes \\ & (Q^{(2)}U^{(2)})(\bar{Q}^{(2)}\bar{U}^{(2)})(\alpha_B^{-1}(P^{(1)}_{(1)}u^{(1)}_{(1)})\alpha_B(U^{(1)}) \otimes \alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)}) \otimes (\alpha_B^{-1}(P^{(1)}_{(2)}\bar{u}^{(1)}))\alpha_B(\bar{U}^{(1)}) \otimes \\ & \alpha_H(\bar{Q}^{(1)}\bar{V}^{(1)}) \otimes \alpha_B(P^{(2)})(\alpha_B^{-1}(\bar{V}_i^{(2)}V^{(2)})\varepsilon_H((u^{(2)}\bar{u}^{(2)}), i) \otimes (Q^{(2)}U^{(2)})(\bar{Q}^{(2)}\bar{U}^{(2)}) \cdot \\ & (\alpha_B^{-1}(P^{(1)}\bar{u}^{(1)}))\alpha_B(U^{(1)}) \otimes \alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)}) \otimes (\bar{P}^{(1)}\bar{u}^{(1)})\alpha_B(\bar{U}^{(1)}) \otimes \alpha_H(\bar{Q}^{(1)}\bar{V}^{(1)}) \otimes \\ & (P^{(2)}\alpha_B^{-1}(\bar{P}_i^{(2)}))(\alpha_B^{-1}(\bar{V}_i^{(2)}V^{(2)})\varepsilon_H((\bar{u}^{(2)}), i)\varepsilon_H(\alpha_H(u^{(2)}\bar{u}^{(2)}), i) \otimes (Q^{(2)}U^{(2)})(\bar{Q}^{(2)}\bar{U}^{(2)}) = \\ & \alpha_B^{-1}(\alpha_B(P^{(1)})(\bar{u}^{(1)}u^{(1)}))\alpha_B(U^{(1)}) \otimes \alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)}) \otimes (\bar{P}^{(1)}\bar{u}^{(1)})\alpha_B(\bar{U}^{(1)}) \otimes \alpha_H(\bar{Q}^{(1)}\bar{V}^{(1)}) \otimes \\ & (P^{(2)}\alpha_B^{-1}(\bar{P}_i^{(2)}))(\alpha_B^{-1}(\alpha_B(\bar{V}^{(2)}), i)V^{(2)})\varepsilon_H(\alpha_H(\bar{u}^{(2)}), i)\varepsilon_H((\alpha_H(u^{(2)})\alpha_H(\bar{u}^{(2)}), i) \otimes \\ & (Q^{(2)}U^{(2)})(\bar{Q}^{(2)}\bar{U}^{(2)})(P^{(1)}u^{(1)})\alpha_B(U^{(1)}) \otimes \alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)}) \otimes (\bar{P}^{(1)}\bar{u}^{(1)})\alpha_B(\bar{U}^{(1)}) \otimes \alpha_H(\bar{Q}^{(1)}\bar{V}^{(1)}) \otimes \\ & (P^{(2)}\alpha_B^{-1}(\bar{P}_i^{(2)}))(\alpha_B^{-1}(\alpha_B(\bar{V}^{(2)}), i)V^{(2)})\varepsilon_H((u^{(2)}_{(1)}), i)\varepsilon_H((u^{(2)}_{(2)}\alpha_H(\bar{u}^{(2)}), i) \otimes (Q^{(2)}U^{(2)})(\bar{Q}^{(2)}\bar{U}^{(2)}) \quad \text{(5)} \\ & (P^{(1)}u^{(1)})\alpha_B(U^{(1)}) \otimes \alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)}) \otimes (\bar{P}^{(1)}\bar{u}^{(1)})\alpha_B(\bar{U}^{(1)}) \otimes \alpha_H(\bar{Q}^{(1)}\bar{V}^{(1)}) \otimes (P^{(2)}\alpha_B^{-1}(\bar{P}_i^{(2)})) \cdot \\ & (\alpha_B^{-1}(\bar{V}_i^{(2)}T)V^{(2)})\varepsilon_H((u^{(2)}_{(1)}), i)\varepsilon_H(\alpha_H(u^{(2)}_{(2)}), T)\varepsilon_H(\alpha_H(\bar{u}^{(2)}), i) \otimes (Q^{(2)}U^{(2)})(\bar{Q}^{(2)}\bar{V}U^{(2)}) = \\ & (P^{(1)}u^{(1)})\alpha_B(U^{(1)}) \otimes \alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)}) \otimes (\bar{P}^{(1)}\bar{u}^{(1)})\alpha_B(\bar{U}^{(1)}) \otimes \alpha_H(\bar{Q}^{(1)}\bar{V}^{(1)}) \otimes \alpha_B(P^{(2)}) \cdot \\ & (\alpha_B^{-1}(\bar{P}P_i^{(2)}\alpha_B^{-1}(\bar{V}_i^{(2)}), T)V^{(2)})\varepsilon_H((u^{(2)}_{(1)}), i)\varepsilon_H(\alpha_H(u^{(2)}_{(2)}), T)\varepsilon_H((\bar{u}^{(2)}), i) \otimes (Q^{(2)}U^{(2)})(\bar{Q}^{(2)}\bar{U}^{(2)}) \quad \text{(8)} \\ & (P^{(1)}u^{(1)})\alpha_B(U^{(1)}) \otimes \alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)}) \otimes (\bar{P}^{(1)}\bar{u}^{(1)})\alpha_B(\bar{U}^{(1)}) \otimes \alpha_H(\bar{Q}^{(1)}\bar{V}^{(1)}) \otimes \alpha_B(P^{(2)}) \cdot \\ & (\alpha_B^{-1}(\alpha^{-1}B(\bar{P}^{(2)})\alpha_B^{-2}(\bar{V}^{(2)}), T)V^{(2)})\varepsilon_H(\alpha_H(u^{(2)}), T)\varepsilon_H(\alpha_H(\bar{u}^{(2)}), i) \otimes (Q^{(2)}U^{(2)})(\bar{Q}^{(2)}\bar{U}^{(2)}) \quad \text{(vii)} \\ & (P^{(1)}u^{(1)})\alpha_B(U^{(1)}) \otimes \alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)}) \otimes \alpha_B(\bar{P}^{(1)}\bar{U}^{(1)}) \otimes \alpha_H(\bar{Q}^{(1)}\bar{V}^{(1)}) \otimes \\ & \alpha_B(P^{(2)})(\alpha_B^{-1}(\alpha_B^{-1}(\bar{P}^{(2)}\bar{V}^{(2)}), T)V^{(2)})\varepsilon_H(\alpha_H(u^{(2)}), T) \otimes (Q^{(2)}U^{(2)})(\bar{Q}^{(2)}\bar{U}^{(2)}) \quad \text{(ii)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (P^{(1)}u^{(1)})_{\alpha_B}(U^{(1)}) \otimes (Q^{(1)}q^{(1)})_{\alpha_H}(V^{(1)}) \otimes \alpha_B(\bar{P}^{(1)}\bar{U}^{(1)}) \otimes \alpha_H(\bar{Q}^{(1)}\bar{V}^{(1)}) \otimes \\
& \alpha_B(P^{(2)})(V^{(2)}\alpha_B^{-1}(\alpha_B^{-2}(\bar{P}^{(2)}\bar{V}^{(2)})_T)_i)\varepsilon_H((u^{(2)})_T)\varepsilon_H((q^{(2)})_i) \otimes (Q^{(2)}U^{(2)})(\bar{Q}^{(2)}\bar{U}^{(2)}) \quad (5) \\
& (P^{(1)}u^{(1)})_{\alpha_B}(U^{(1)}) \otimes (Q^{(1)}q^{(1)})_{\alpha_H}(V^{(1)}) \otimes \alpha_B(\bar{P}^{(1)}\bar{U}U^{(1)}) \otimes \alpha_H(\bar{Q}^{(1)}\bar{V}^{(1)}) \otimes \\
& \alpha_B(P^{(2)})(V^{(2)}\alpha_B^{-1}(\alpha_B^{-1}(\bar{P}^{(2)}\bar{V}^{(2)})_T))\varepsilon_H((u^{(2)}q^{(2)})_T) \otimes (Q^{(2)}U^{(2)})(\bar{Q}^{(2)}\bar{U}^{(2)}) = \\
& (P^{(1)}u^{(1)})_{\alpha_B}(U^{(1)}) \otimes \alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)}) \otimes \alpha_B(\bar{P}^{(1)}\bar{U}^{(1)}) \otimes \alpha_H(\bar{Q}^{(1)}\bar{V}^{(1)}) \otimes \\
& (P^{(2)}V^{(2)})_{\alpha_B^{-1}}(\bar{P}^{(2)}\bar{V}V^{(2)})_{T\varepsilon_H}((\alpha_H^{-1}(Q^{(2)}_{(1)})u^{(2)})_T) \otimes (\alpha_H^{-1}(Q^{(2)}_{(2)})U^{(2)})(\bar{Q}^{(2)}\bar{U}^{(2)}) = \\
& \alpha_B(P^{(1)})_{\alpha_B}(U^{(1)}) \otimes \alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)}) \otimes \alpha_B(\bar{P}P^{(1)}\bar{U}^{(1)}) \otimes \alpha_H(\bar{Q}^{(1)}\bar{V}^{(1)}) \otimes \\
& (P^{(2)}V^{(2)})_{\alpha_B^{-1}}(\bar{P}^{(2)}\bar{V}^{(2)})_{T\varepsilon_H}(\alpha_H^{-1}(Q^{(2)}_{(1)}U^{(2)}_{(1)})_T) \otimes \alpha_H^{-1}(Q^{(2)}_{(2)}U^{(2)}_{(2)})(\bar{Q}^{(2)}\bar{U}^{(2)}) \quad (7) \\
& \alpha_B(P^{(1)})_{\alpha_B}(U^{(1)}) \otimes \alpha_H(Q^{(1)}V^{(1)}) \otimes \alpha_B(\bar{P}^{(1)}\bar{U}^{(1)}) \otimes \alpha_H(\bar{Q}^{(1)}\bar{V}^{(1)}) \otimes \\
& (P^{(2)}V^{(2)})_{\alpha_B^{-1}}((\bar{P}^{(2)}\bar{V}^{(2)})_T) \otimes \alpha_H^{-1}((Q^{(2)}U^{(2)})_T)(\bar{Q}^{(2)}\bar{U}^{(2)}).
\end{aligned}$$

类似可证 R 满足定义 5 中条件 3) 和 5)。从而得 $(B \bowtie_{T,H}, \alpha_B \otimes \alpha_H, R)$ 为一个拟三角 Hom-Hopf 代数。

定理 3 设 $(B \bowtie_{T,H}, \alpha_B \otimes \alpha_H)$ 为 Hom-T-smash 积 Hom-Hopf 代数, 则下列叙述等价:

- 1) $(B \bowtie_{T,H}, \alpha_B \otimes \alpha_H, R)$ 为拟三角 Hom-Hopf 代数, $R \in B \bowtie_{T,H} \otimes B \bowtie_{T,H}$,
- 2) R 可以写成如下形式 $R = P^{(1)}U^{(1)} \otimes Q^{(1)}V^{(1)} \otimes P^{(2)}V^{(2)} \otimes Q^{(2)}U^{(2)}$,

使得 (H, Q) 为拟三角 Hom-Hopf 代数, (B, H, U) 为对偶相容 Hom-U-Hopf 代数对, (H, B, V) 为斜对偶相容 Hom-V-Hopf 代数对, (B, P) 为 (U, V) -弱拟三角 Hom-Hopf 代数, P, Q, U, V 满足命题 5 中条件 (i) - (iv)。

注记 1 当 $\alpha_B \otimes \alpha_H = id_{B \otimes H}$, 则定理 3 就是文献[4]中定理 4.4 关于 Hopf 代数的结论。

参 考 文 献

- [1] Drinfeld V G. Quantum groups[C]. Proc of ICM, Berkeley, 1987.
- [2] Larson R, Towber J. Two dual classes of bialgebras related to the concepts of “quantum groups” and “quantum Lie algebras”[J]. Comm Algebra, 1991(19): 3295-3345.
- [3] Jiao Z, Wisbauer R. The braided structures for ω -smash coproduct Hopf algebras[J]. J Algebra, 2005(287): 474-495.
- [4] Jiao Z. The quasitriangular structures for a class of T-smash product Hopf algebras[J]. Israel J of Mathematics, 2005, 146(1): 125-147.
- [5] Makhlof A, Silvestrov S. Hom-algebras structures[J]. J Gen Lie theory Appl, 2008, 2(2): 51-64.
- [6] Makhlof A, Silvestrov S. Hom-algebras and Hom-coalgebras[J]. J Algebra Appl, 2010, 9(4): 553-589.
- [7] Makhlof A, Silvestrov S. Hom-Lie admissible Hom-coalgebras and Hom-Hopf algebras[M]. Berlin, Springer Verlag, 2009.
- [8] Caenepeel S, Goyvaerts I. Monoidal Hom-Hopf Algebras[J]. Communications in Algebra, 2011, 39(6): 2216-2240.
- [9] Yau D. Hom-bialgebras and comodule Hom-algebras[J]. Int Electron J Algebra, 2010, 8: 45-64.
- [10] Yau D. Hom-quantum groups; I. Quasi-triangular Hom-bialgebras[J]. J Phys A: Math Theor, 2012, 45(6): 065203.
- [11] Ma T S, Li H Y, Yang T. Cobraided smash product Hom-Hopf algebras [J]. Colloq Math, 2014, 134: 75-92.
- [12] 郑乃峰. Hom- ω -smash 余积 Hopf 代数上的辫化结构[J]. 数学物理学报, 2013, 33(6): 1068-1088.
- [13] Sweedler M E. Hopf Algebras[M]. New York: Benjamin, 1969.
- [14] 王忠伟, 陈圆圆, 张良云. Hom-Hopf 代数的对极和 Drinfeld 偶[J]. 中国科学: 数学, 2013, 42(11): 1079-1093.

The Quasitriangular Structure for Hom-T-smash Product Hom-Hopf Algebras

JIAO Zhengming, GUO Min, XIA Zhengliang

(College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

Abstract: In this paper, the quasitriangular structures for Hom-T-smash product Hom-Hopf algebras are discussed, and necessary and sufficient conditions for Hom-T-smash product Hom-Hopf algebras to be quasitriangular Hom-Hopf algebras are given.

Keywords: Hom-Hopf algebra; quasitriangular structure; Hom-T-smash product