

具有心理效应和媒体影响的随机 HIV/AIDS 传染病模型

刘宗萱,张太雷,梁媛

(长安大学 理学院,西安 710064)

摘要:建立了一类满足 Logistic 人口增长方程且同时具有心理效应和媒体影响的随机 HIV/AIDS 传染病模型,通过构造相应的 Lyapunov 函数,利用停时理论、伊藤引理及强大数定理等对随机 HIV/AIDS 传染病模型进行了理论分析,进而证明了随机模型全局正解的存在唯一性,并且通过对相应 Lyapunov 函数的计算研究,给出了疾病灭绝和持久的充分条件.最后,利用最小二乘法和 Euler-Maruyama 方法对随机传染病模型进行数值模拟,进一步显示了随机传染病模型的动力学行为.

关键词:心理效应;随机传染病模型;灭绝性;持久性;伊藤公式

中图分类号:O175.1

文献标志码:A

文章编号:1000-2367(2024)06-0063-10

艾滋病(acquired immunodeficiency syndrome, AIDS),是由艾滋病病毒即人类免疫缺陷病毒(HIV)引起的一种病死率极高的恶性传染病.HIV 病毒侵入人体,能破坏人体的免疫系统,令感染者逐渐丧失对各种疾病的抵抗能力,最后导致死亡^[1].HIV 病毒进入人体的最初阶段是“急性期”,而这时候的患者只能被称为 HIV 感染者,而不能被称为是艾滋病人.当病人进入典型的艾滋病期,是艾滋病病毒感染的最终阶段.此期具有 3 个基本特点:严重的细胞免疫缺陷,发生各种致命性机会性感染,发生各种恶性肿瘤^[2-8].艾滋病的终期,免疫功能崩溃,病人出现各种严重的综合病症,直至死亡.在当今社会中,媒体的发展以及人们对疾病的防控意识增强对传染病的防治产生了较好的效应,张钰倩等^[9]研究了一类具有媒体效应和追踪隔离的 SIQR 时滞传染病模型,研究表明:媒体对传染病信息的广泛报道以及提高报道信息的准确率可降低疾病传播,有利于控制传染病.同时,不同于大多数人口恒定的系统,朱晶^[10]提出并研究了一类具有心理效应且满足 Logistic 人口增长方程的 SIR 传染病模型,研究表明,当心理作用系数较大时,疾病的传播会得到抑制.基于此,提出一类满足 Logistic 人口增长方程且具有心理效应和媒体效应的 HIV/AIDS 传染病模型:

$$\begin{cases} \frac{dS_1(t)}{dt} = (b - \frac{rN(t)}{K})N(t) - \frac{\beta_1 S_1(t)I(t)}{1 + \alpha N(t)} - qS_1(t)M(t) - mS_1(t) + \delta S_2(t), \\ \frac{dS_2(t)}{dt} = qS_1(t)M(t) - mS_2(t) - \delta S_2(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta_1 S_1(t)I(t)}{1 + \alpha N(t)} - (m + \mu)I(t), \\ \frac{dA(t)}{dt} = \mu I - (m + \rho)A(t), \\ \frac{dM(t)}{dt} = \eta I(t) - \theta M(t). \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期:2023-06-19;修回日期:2023-08-12.

基金项目:陕西省自然科学基金基础研究计划(2022JM-023).

作者简介:刘宗萱(1999-),男,河南安阳人,长安大学硕士研究生,研究方向为生物数学,E-mail:lzx642873464@163.com.

通信作者:张太雷(1980-),男,长安大学教授,博士,研究方向为生物数学,E-mail:tlzhang@chd.edu.cn.

引用本文:刘宗萱,张太雷,梁媛.具有心理效应和媒体影响的随机 HIV/AIDS 传染病模型[J].河南师范大学学报(自然科学版),2024,52(6):63-72.(Liu Zongxuan, Zhang Tailei, Liang Yuan. Random HIV/AIDS infectious disease model with psychological and media effects[J]. Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition), 2024,52(6):63-72.DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2023.06.19.0008.)

模型(1)中 $S_1(t), S_2(t), I(t), A(t), M(t)$ 分别表示 t 时刻的无意识的易感者、有意识的易感者、艾滋病前期患者、艾滋病后期患者及媒体的播报量. b 为自然出生率, m 为自然死亡率, $r = b - d$ 为内禀增长率, K 为环境容纳量, α 为心理效应系数, β_1 为传染率, q 为无意识的易感者经过媒体播报变为有意识的易感者的概率(这里认为有意识的易感者不会被感染, 失去防范意识变为无意识的易感者会被感染(防范意识的失去率为 δ)), μ 为艾滋病前期病人转化为后期的概率, ρ 为艾滋病后期病人因病死亡的概率, η 为媒体播报的数量受疾病影响的生成率, θ 为疾病意识衰减率. 疾病的基本再生数为 $R_0 = \frac{\beta_1 K}{(1 + \alpha K)(m + \mu)}$.

1 模型建立及预备定理

在实际的情况中, 利用随机传染病模型能更好地描述出疾病的传播过程^[11-15], 王定宇等^[16] 研究了一类基于心理作用的随机 SIRS 传染病模型, 建立了 Lyapunov 函数对模型进行分析, 并得出了疾病灭绝和持久的充分条件. 何雪晴等^[17] 研究了一类同时具有 Logistic 出生和 Markov 切换的随机 SIRS 传染病模型, 讨论出了该模型的解存在一个遍历平稳分布的结果, 以及疾病灭绝的充分条件. 考虑到随机因素对模型的影响, 在确定性模型中加入随机扰动项, 考虑一类具有心理效应和媒体影响的随机 HIV/AIDS 模型:

$$\begin{cases} dS_1(t) = \left[(b - \frac{rN(t)}{K})N(t) - \frac{\beta_1 S_1(t)I(t)}{1 + \alpha N(t)} - qS_1(t)M(t) - mS_1(t) + \delta S_2(t) \right] dt - \\ \frac{\sigma S_1(t)I(t)}{1 + \alpha N(t)} dB(t) + \sigma_1 S_1(t) dB_1(t), \\ dS_2(t) = (qS_1(t)M(t) - mS_2(t) - \delta S_2(t)) dt + \sigma_2 S_2(t) dB_2(t), \\ dI(t) = \left(\frac{\beta_1 S_1(t)I(t)}{1 + \alpha N(t)} - m(d + \mu)I(t) \right) dt + \frac{\sigma S_1(t)I(t)}{1 + \alpha N(t)} dB(t) + \sigma_3 I(t) dB_3(t), \\ dA(t) = (\mu I - (m + \rho)A(t)) dt + \sigma_4 A(t) dB_4(t), \\ dM(t) = (\eta I(t) - \theta M(t)) dt, \end{cases} \quad (2)$$

其中 $B(t), B_i(t) (i = 1, 2, 3, 4)$ 表示独立的布朗运动, $\sigma, \sigma_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 是其强度系数.

引理 1^[18] (Itô 引理) 对于 $t \geq 0$, 设 $x(t)$ 满足随机微分方程 $dx(t) = f(t)dt + g(t)dB(t)$. 其中 $f \in L^1(\mathbf{R}_+; \mathbf{R}^n), g \in L^2(\mathbf{R}_+; \mathbf{R}^n)$. 若 $V \in C^{2,1}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+; \mathbf{R}^n)$ 则 $V(x(t), t)$ 满足

$$dV(x(t), t) = [V_t(x(t), t) + V_x(x(t), t)f(t) + \frac{1}{2}V_{xx}(x(t), t)g^2(t)]dt + V_x(x(t), t)g(t)dB(t) \quad \text{a.s.}$$

其中 $V_t = \frac{\partial V}{\partial t}, V_x = \frac{\partial V}{\partial x} = (\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_d}), V_{xx} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = (\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j})_{d \times d}$.

引理 2^[18] (强大数定理) 令 $\phi = \{\phi_t\}_{t \geq 0}$ 是实值连续局部鞅且 $\phi(0) = 0$, 那么

$$\limsup \frac{\langle \phi, \phi \rangle_t}{t} < \infty \quad \text{a.s.} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\phi_t}{t} = 0.$$

2 全局正解存在唯一性

研究此随机传染病模型, 首先通过 Lyapunov 方法来证明该模型全局正解的存在唯一性.

定理 1 当 $t \geq 0$ 时, 对任意初值 $(S_1(0), S_2(0), I(0), A(0), M(0)) \in \mathbf{R}_+^5$, 模型(2) 存在唯一正解 $(S_1(t), S_2(t), I(t), A(t), M(t)) \in \mathbf{R}_+^5$ 几乎处处成立, 即对 $t \geq 0, (S_1(t), S_2(t), I(t), A(t), M(t))$ 依概率 1 落在 \mathbf{R}_+^5 中.

证明 模型(2)的右端满足局部 Lipschitz 条件, 则对任意的初值 $(S_1(0), S_2(0), I(0), A(0), M(0)) \in \mathbf{R}_+^5$, 模型存在唯一的局部最大解 $(S_1(t), S_2(t), I(t), A(t), M(t)) \in \mathbf{R}_+^5, t \in [0, \tau_e)$ 其中 τ_e 为爆破时刻. 下证 $\tau_e = \infty$ a.s., 由于 $(S_1(0), S_2(0), I(0), A(0), M(0)) \in \mathbf{R}_+^5$, 则存在充分大的正数 c_0 , 因此 $S_1(0), S_2(0), I(0), A(0)$ 和 $M(0)$ 均属于区间 $(\frac{1}{c_0}, c_0)$. 对于每个正整数 $c \geq c_0$, 定义停时

$$\tau_c = \{t \in [0, \tau_c) : \min\{S_1(t), S_2(t), I(t), A(t), M(t)\} \geq \frac{1}{c}\} \text{ 或}$$

$$\max\{S_1(t), S_2(t), I(t), A(t), M(t)\} \geq c\},$$

显然 τ_c 是递增的, 令 $\tau_\infty = \lim_{c \rightarrow \infty} \tau_c$, 因此 $\tau_\infty \leq \tau_c$, 若 $\tau_\infty = \infty$, 则 $\tau_c = \infty$, 且对任意的 $t \geq 0$ 有 $(S_1(0), S_2(0), I(0), A(0), M(0)) \in \mathbf{R}_+^5$ 反之则存在常数 $T > 0$ 和 $\epsilon_0 \in (0, 1)$ 使 $P\{\tau_\infty \leq T\} > \epsilon_0$, 故存在正整数 $c_1 \geq c_0$, 使得 $P\{\tau_c > T\} \geq \epsilon_0, c \geq c_1$.

定义函数 $V_1 = (S_1 - 1 - \ln S_1) + (S_2 - 1 - \ln S_2) + (I - 1 - \ln I) + (A - 1 - \ln A) + (M - 1 - \ln M)$.

由 Itô 公式得, $dV_1 = LV_1 + (\frac{1}{S_1} - \frac{1}{I}) \frac{\sigma S_1 I}{1 + \alpha N} dB(t) + \sigma_1 S_1 dB_1(t) + \sigma_2 S_2 dB_2(t) + \sigma_3 I dB_3(t) + \sigma_4 A dB_4(t)$, 其中

$$LV_1 = (1 - \frac{1}{S_1})[(b - \frac{rN}{K})N - \frac{\beta_1 S_2 I}{1 + \alpha N} - \beta_2 S_1 M - mS_1 + \delta S_2] + (1 - \frac{1}{S_2})(\beta_2 S_1 M - mS_2 - \delta S_2) +$$

$$(1 - \frac{1}{I}) \leq rK + \frac{\beta_1}{\alpha} + qM + 4m + \delta + \mu + \rho + \eta I + \theta + \sigma^2 K^2 + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2}{2}.$$

由随机模型得 $dM \leq (\eta K - \theta M)dt$, 解得 $M \leq \frac{\eta}{\theta}K - \frac{1}{\theta}e^{\theta t} \leq \frac{\eta}{\theta}K$, 那么 $LV_1 \leq rK + \frac{\beta_1}{\alpha} + qM + 4m + \delta + \mu + \rho + \eta I + \theta + \sigma^2 K^2 \leq rK + \frac{\beta_1}{\alpha} + q \frac{\eta}{\theta}K + 4m + \delta + \mu + \rho + \eta I + \theta + \sigma^2 K = G$, 这里 G 是一个正常数, 则整理可得:

$$dV_1(S_1(t), S_2(t), I(t), I(t), A(t), M(t)) \leq Gdt + (\frac{1}{S_1} - \frac{1}{I}) \frac{\sigma S_1 I}{1 + \alpha N} dB(t) +$$

$$\sigma_1 S_1 dB_1(t) + \sigma_2 S_2 dB_2(t) + \sigma_3 I dB_3(t) + \sigma_4 A dB_4(t).$$

对上式从 0 到 $\tau_c \wedge T$ 积分并取期望得:

$$EV_1(S_1(\tau_c \wedge T), S_2(\tau_c \wedge T), I(\tau_c \wedge T), I(\tau_c \wedge T), A(\tau_c \wedge T), M(\tau_c \wedge T)) \leq EV_1(S_1(0), S_2(0), I(0), A(0), M(0)) +$$

$$GE(\tau_c \wedge T) + E[\int_0^{\tau_c \wedge T} (\frac{1}{S_1(u)} - \frac{1}{I(u)}) \frac{\sigma S_1(u) I(u)}{1 + \alpha N(u)} dB(u) + \int_0^{\tau_c \wedge T} \sigma_1 S_2(u) dB_1(u) +$$

$$\int_0^{\tau_c \wedge T} \sigma_2 S_2(u) dB_2(u) + \int_0^{\tau_c \wedge T} \sigma_3 I(u) dB_3(u) + \int_0^{\tau_c \wedge T} \sigma_4 A(u) dB_4(u)] \leq$$

$$V_1(S_1(0), S_2(0), I(0), A(0), M(0)) + GT,$$

令 $\Omega_c = \{\tau_c \leq T\}, c \geq c_1$, 其中 $P\{\Omega_c\} \geq \epsilon_0$, 对于每个 $\omega_0 \in \Omega_c$, 都有 $S_1(\tau_c \wedge T)$ 或 $S_2(\tau_c \wedge T)$ 或 $I(\tau_c \wedge T)$ 或 $A(\tau_c \wedge T)$ 或 $M(\tau_c \wedge T)$ 等于 $c \vee \frac{1}{c}$, 即 $V_1(S_1(\tau_c \wedge T), S_2(\tau_c \wedge T), I(\tau_c \wedge T), A(\tau_c \wedge T), M(\tau_c \wedge T))$ 不小于 $c - 1 - \ln c$ 或 $\frac{1}{c} - 1 - \ln \frac{1}{c}$, 即

$$V_1(S_1(\tau_c \wedge T), S_2(\tau_c \wedge T), I(\tau_c \wedge T), A(\tau_c \wedge T), M(\tau_c \wedge T)) \geq c - 1 - \ln c \wedge \frac{1}{c} - 1 + \ln c, \text{ 则}$$

$$V_1(S_1(0), S_2(0), I(0), A(0), M(0)) + AT \geq E[I_{\Omega_c}(\omega_0) V(S_1(\tau_c, \omega_0), S_2(\tau_c, \omega_0), I(\tau_c, \omega_0),$$

$$A(\tau_c, \omega_0), M(\tau_c, \omega_0))] \geq \epsilon_0(c - 1 - \ln c) \wedge (\frac{1}{c} - 1 + \ln c),$$

其中 I_{Ω_c} 表示 Ω_c 的示性函数, 令 $c \rightarrow \infty$, 则

$V_1(S_1(0), S_2(0), I(0), A(0), M(0)) + GT = \infty, V_1(S_1(0), S_2(0), I(0), A(0), M(0)) + GT < \infty$ 产生矛盾, 故 $\tau_c = \infty, \text{a.s.}$ 定理得证.

3 疾病的灭绝

在对传染病模型的研究中, 疾病灭绝的条件备受关注, 关于疾病的灭绝给出以下定理.

定理 2 对于具有任意的正初值 $(S_1(0), S_2(0), I(0), A(0), M(0)) \in \mathbf{R}_+^5$ 的随机模型(2), 若 $\sigma^2 > \max\{\frac{\beta_1}{2m}, \beta_1\alpha\}$ 或者 $\beta_1\alpha > \sigma^2 > \alpha^2\beta_1 - 2\alpha^2d$ 时, 疾病灭绝, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = 0$ a.s.

证明 定义函数 $V_2 = \ln Q(t) = \ln(I(t) + A(t))$, 运用 Itô 公式得:

$$dV_2 = (\frac{1}{I+A}(\frac{\beta_1 S_1 I}{1+\alpha N} - mI - (m+\rho)A) - \frac{1}{2(I+A)^2}(\frac{\sigma^2 S_1^2 I^2}{(1+\alpha N)^2} + \sigma_3^2 I^2 + \sigma_4^2 A^2))dt + \frac{\sigma S_1 I}{(I+A)(1+\alpha N)}dB(t) + \sigma_3 I dB_3(t) + \sigma_4 A dB_4(t) \leq (\frac{1}{I+A}((\beta_1 K - m)I - (m+\rho)A) - \frac{1}{2(I+A)^2}(\frac{\sigma^2 S_1^2 I^2}{(1+\alpha N)^2}))dt + \frac{\sigma S_1 I}{(I+A)(1+\alpha N)}dB(t) + \sigma_3 I dB_3(t) + \sigma_4 A dB_4(t),$$

对上式两边从 0 到 t 积分并除以 t 得:

$$\frac{\ln Q(t) - \ln Q(0)}{t} \leq \frac{1}{t} \int_0^t (\frac{1}{I(u)+A(u)}((\beta_1 K - m)I(u) - (m+\rho)A(u)) - \frac{1}{2(I(u)+A(u))^2} \times (\frac{\sigma^2 S_1(u)^2 I(u)^2}{(1+\alpha N(u))^2} + \sigma_3^2 I(u)^2 + \sigma_4^2 A(u)^2))du + \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\sigma S_1(u)I(u)}{(I(u)+A(u))(1+\alpha N(u))}dB(u) + \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\sigma_3 I(u)}{(I(u)+A(u))}dB_3(u) + \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\sigma_4 A(u)}{(I(u)+A(u))}dB_4(u).$$

接下来分情况讨论.

情况 1 当 $R_0 < 1, \beta_1 K < m$ 时, $\beta_1 K - m < 0, -(d+\rho) < 0$, 因此存在正整数 m_1 , 使得 $\beta_1 K - m < -m_1 - (m+\rho) < -m_1$, 因此

$$\frac{\ln Q(t) - \ln Q(0)}{t} \leq -m_1 - \frac{1}{2(I(u)+A(u))^2}(\frac{\sigma^2 S_1(u)^2 I(u)^2}{(1+\alpha N(u))^2} + \sigma_3^2 I(u)^2 + \sigma_4^2 A(u)^2)du + \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\sigma S_1(u)I(u)}{(I(u)+A(u))(1+\alpha N(u))}dB(u) + \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\sigma_3 I(u)}{(I(u)+A(u))}dB_3(u) + \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\sigma_4 A(u)}{(I(u)+A(u))}dB_4(u).$$

其中 $\frac{\min\{\frac{S_1(u)^2 I(u)^2}{(1+\alpha N(u))^2}, I(u)^2, A(u)^2\}}{2(I(u)+A(u))^2} \geq \frac{m_2}{2}, m_2$ 为正整数. 其次令

$$\psi(t) = \int_0^t \frac{\sigma S_1(u)I(u)}{(I(u)+A(u))(1+\alpha N(u))}dB(u) + \int_0^t \frac{\sigma_3 I(u)}{(I(u)+A(u))}dB_3(u) + \int_0^t \frac{\sigma_4 A(u)}{(I(u)+A(u))}dB_4(u),$$

由引理 2, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi(t)}{t} = 0$, 对上式取极限得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln Q(t)}{t} \leq -m_1 - \frac{m_2(\sigma^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2)}{2} < 0$ a.s. 从而 $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = 0$ a.s.

情况 2 当 $R_0 > 1, \beta_1 K > m, m > \frac{\beta_1 K - \rho}{2}$ 时, $\beta_1 K - m > 0, (d+\rho) > 0$, 此时存在正整数 m_3 , 使得 $0 < \beta_1 K - m < m_3, m+\rho > m_3$, 因此

$$\frac{\ln Q(t) - \ln Q(0)}{t} \leq m_3 - \frac{m_2(\sigma^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2)}{2} + \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\sigma S_1(u)I(u)}{(I(u)+A(u))(1+\alpha N(u))}dB(u) + \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\sigma_3 I(u)}{(I(u)+A(u))}dB_3(u) + \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\sigma_4 A(u)}{(I(u)+A(u))}dB_4(u),$$

同理 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi(t)}{t} = 0$, 当 σ, σ_3 和 σ_4 之一足够大时, 存在 $m_3 - \frac{m_2(\sigma^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2)}{2} < 0$, 对上式取极限 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln Q(t)}{t} \leq m_3 - \frac{m_2(\sigma^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2)}{2} < 0$ a.s. 从而 $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = 0$ a.s.

注 1 由定理 2 可知,当 $R_0 > 1$, 对应确定性模型中疾病持续存在,而在随机模型中,只要白噪声的强度足够大,疾病也会走向灭绝.

4 疾病的持久性

在此节中,定义 $\langle f(t) \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t f(u) du$, 假设模型(2)中人口出生死亡率相同,即 $b = m$ 人口总数恒定为 N , 媒体播报量 M 为小于 $\frac{\eta}{\theta} K$ 定常数,则模型(2)变为

$$\begin{cases} dS_1(t) = [\lambda N - \frac{\beta_1 S_1(t) I(t)}{1 + \alpha N} - q S_1(t) M(t) - m S_1(t) + \delta S_2(t)] dt - \frac{\sigma S_1(t) I(t)}{1 + \alpha N} dB(t) + \sigma_1 S_1(t) dB_1(t), \\ dS_2(t) = (q S_1(t) M(t) - m S_2(t) - \delta S_2(t)) dt + \sigma_2 S_2(t) dB_2(t), \\ dI(t) = (\frac{\beta_1 S_1(t) I(t)}{1 + \alpha N} - (m + \mu) I(t)) dt + \frac{\sigma S_1(t) I(t)}{1 + \alpha N} dB(t) + \sigma_3 I(t) dB_3(t), \\ dA(t) = (\mu I(t) - (m + \rho) A(t)) dt + \sigma_4 A(t) dB_4(t). \end{cases} \tag{3}$$

计算模型(3)得确定性系统的基本再生数得 $R_0 = \frac{\beta_1 \lambda N}{(m + \mu)(1 + \alpha N)(m + qM)}$. 同时定义模型(3)的阈值

$$R_0^{*s} = \frac{\beta_1 \lambda N}{(m + \mu)(1 + \alpha N)(m + qM)} - \frac{\sigma^2 N^2 + \sigma_3^2 (1 + \alpha N)^2}{2(m + \mu)(1 + \alpha N)^2}.$$

关于模型(3),有如下定理.

定理 3 设 $(S_1(t), S_2(t), I(t), A(t))$, 是模型(3)关于初值 $(S_1(0), S_2(0), I(0), A(0))$ 的解,若 $R_0^{*s} < 1$, 且 $e_1 \geq \frac{1}{m + qM}$ (e_1 在下文给出), 那么模型(3)的疾病将持久存在,且满足

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \langle I(t) \rangle \geq \frac{(\alpha N + 1)}{\beta_1 e_1} (R_0^{*s} - 1), \liminf_{t \rightarrow \infty} \langle A(t) \rangle = \frac{\mu}{m + \rho} \liminf_{t \rightarrow \infty} \langle I(t) \rangle.$$

证明 令 $\Phi(t) = \frac{S_1(t) - S_1(0)}{t} + \frac{S_2(t) - S_2(0)}{t} + \frac{I(t) - I(0)}{t} + \frac{A(t) - A(0)}{t}$, 对模型(3)两端从 0 到 t 积分并代入 $\Phi(t)$ 得 $\Phi(t) = \lambda N - m \langle S_1(t) \rangle - m \langle S_2(t) \rangle - m \langle I(t) \rangle - (m + \rho) \langle A(t) \rangle$. 单独对模型(3)中第 2 个式子和第 4 个式子两边从 0 到 t 积分得:

$$\frac{S_2(t) - S_2(0)}{t} = q \langle S_1(t) \rangle M - m \langle S_2(t) \rangle - \delta \langle S_2(t) \rangle, \langle S_2(t) \rangle = \frac{q \langle S_1(t) \rangle M - \frac{S_2(t) - S_2(0)}{t}}{m + \delta},$$

$$\frac{A(t) - A(0)}{t} = \mu \langle I(t) \rangle - (m + \rho) \langle A(t) \rangle, \langle A(t) \rangle = \frac{\mu \langle I(t) \rangle - \frac{A(t) - A(0)}{t}}{m + \rho}.$$

代入 $\Phi(t)$ 中并令 $e_1 = \frac{m + \delta}{m^2 + m\delta - mqM}$ 得:

$$\Phi(t) = \lambda N - m \langle S_1(t) \rangle - m \frac{q \langle S_1(t) \rangle M - \frac{S_2(t) - S_2(0)}{t}}{m + \delta} - m \langle I(t) \rangle - \mu \langle I(t) \rangle + \frac{A(t) - A(0)}{t},$$

$$\langle S_1(t) \rangle = e_1 [\lambda N - \frac{d \frac{S_2(t) - S_2(0)}{t}}{m + \delta} - m \langle I(t) \rangle - \mu \langle I(t) \rangle + \frac{A(t) - A(0)}{t} - \Phi(t)].$$

利用 Itô 公式计算

$$d \ln(I) = (\frac{1}{I} (\frac{\beta_1 S_1}{1 + \alpha N} - (d + \mu) I) - \frac{1}{2} \frac{\sigma^1 S_1^2}{(1 + \alpha N)^2} + \sigma_3^2) dt + \frac{\sigma S_1}{1 + \alpha N} dB(t) =$$

$$\left(\frac{\beta_1 S_1}{1+\alpha N} - (m + \mu) - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 S_1^2}{(1+\alpha N)^2}\right)dt + \frac{\sigma S_1}{1+\alpha N}dB(t) + \sigma_3 I dB_3(t).$$

对上式两边从 0 到 t 积分并除以 t 得:

$$\frac{\ln I(t) - \ln I(0)}{t} = \left\{ \frac{\beta_1 e_1 I}{1+\alpha N} \left[\lambda N - \frac{m \frac{S_2(t) - S_2(0)}{t}}{m + \delta} - m \langle I(t) \rangle - \mu \langle I(t) \rangle + \frac{A(t) - A(0)}{t} - \Phi(t) \right] - m - \mu - \frac{\sigma^2 N^2}{2(1+\alpha N)^2} - \frac{\sigma_3^2}{2} \right\} + \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\sigma S_1(u)}{1+\alpha N} dB(u) + \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_3 dB_3(u).$$

那么

$$\langle I(t) \rangle \geq (\lambda N + \frac{m(S_2(t) - S_2(0))}{t(m + \delta)} + \frac{A(t) - A(0)}{t} - \Phi(t)) \frac{1}{m + \mu} - \frac{1 + \alpha N}{\beta_1 e_1} - \frac{\sigma^2 N^2}{2\beta_1 e_1 (m + \mu)(1 + \alpha N)} - \frac{\sigma_3^2 (1 + \alpha N)}{2\beta_1 e_1 (m + \mu)} \left(\frac{\ln I(t) - \ln I(0)}{t} - \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\sigma S_1(u)}{1 + \alpha N} dB(u) - \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_3 dB_3(u) \right) \frac{1 + \alpha N}{\beta_1 e_1 (m + \mu)},$$

又由 $S_2(t), I(t), A(t) \leq N$ 及强大数定理可知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \int_0^t \frac{\sigma S_1(u)}{1 + \alpha N} dB(u) + \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_3 dB_3(u) \right) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_2(t) - S_2(0)}{t} = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln I(t) - \ln I(0)}{t} = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t) - A(0)}{t} = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi(t)}{t} = 0.$$

当 $e_1 \geq \frac{1}{d + qM}$ 时, 对上式下确界取极限得:

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \langle I(t) \rangle \geq \frac{1 + \alpha N}{\beta_1 e_1} \left(\frac{\lambda \beta_1 N}{(1 + \alpha N)(m + \mu)(m + qM)} - \frac{\sigma^2 N^2 + \sigma_3^2 (1 + \alpha N)^2}{2(m + \mu)(1 + \alpha N)^2} - 1 \right) = \frac{1 + \alpha N}{\beta_1 e_1} (R_0^{*s} - 1),$$

当 $R_0^{*s} > 1$ 可得: $\liminf_{t \rightarrow \infty} \langle I(t) \rangle \geq \frac{1 + \alpha N}{\beta_1 e_1} (R_0^{*s} - 1) > 0$.

接下来对模型(3)第 4 个式子两边从 0 到 t 积分得:

$$\frac{A(t) - A(0)}{t} = \mu \langle I \rangle - (m + \rho) \langle A(t) \rangle + \frac{\sigma_4}{t} \int_0^t A(u) dB_4(u), \\ \langle A(t) \rangle = \frac{\mu \langle I(t) \rangle}{m + \rho} - \frac{A(t) - A(0)}{t(m + \rho)} + \frac{\sigma_4}{t(m + \rho)} \int_0^t A(u) dB_4(u).$$

对 $\langle A(t) \rangle = \frac{\mu \langle I(t) \rangle}{m + \rho} - \frac{A(t) - A(0)}{t(m + \rho)} + \frac{\sigma_4}{t(m + \rho)} \int_0^t A(u) dB_4(u)$ 求下确界取极限得:

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \langle A(t) \rangle = \frac{\mu}{m + \rho} \liminf_{t \rightarrow \infty} \langle I(t) \rangle,$$

当 $R_0^{*s} > 1$ 可得: $\liminf_{t \rightarrow \infty} \langle A(t) \rangle = \frac{\mu}{m + \rho} \liminf_{t \rightarrow \infty} \langle I(t) \rangle > 0$. 综上所述, 当 $R_0^{*s} > 1$ 时 $\liminf_{t \rightarrow \infty} \langle I(t) \rangle > 0$,

$\liminf_{t \rightarrow \infty} \langle A(t) \rangle > 0$, 疾病将会持久.

注 2 定理 3 表明, 当 $R_0^{*s} > 1$ 时, 疾病将会持久. 且通过

$$R_0^{*s} = \frac{\beta_1 \lambda N}{(m + \mu)(1 + \alpha N)(m + qM)} - \frac{\sigma^2 N^2 + \sigma_3^2 (1 + \alpha N)^2}{2(m + \mu)(1 + \alpha N)^2} < \frac{\beta_1 \lambda N}{(m + \mu)(1 + \alpha N)(m + qM)} = R_0$$

得知, 相比于确定性模型, 随机模型中疾病持久的条件更为复杂, 即使 $R_0 > 1$, 但只要随机模型中白噪声强度或心理效应系数足够大, 使得 $R_0^{*s} > 1$, 疾病就难以持久.

5 数值模拟

为了对前面得出的结论进一步解释说明, 接下来进行数值模拟. 利用最小二乘法对确定性模型与随机模

型的解曲线进行模拟,比较二者解的渐近行为之间的差异,取初值 $(I(0),A(0))=(1,1)$.

(1)分别取参数 $b=0.9,\beta_1=0.11,q=0.2,K=100,\alpha=0.72,\delta=0.5,\mu=0.065,\rho=0.25,\eta=0.045,\theta=0.2,\sigma=0.06,m=0.15,\sigma_1=0.05,\sigma_2=0.06,\sigma_3=0.05,\sigma_4=0.4$ 此时 $R_0 < 1$,如图 1(a,b)所示,其他参数不变,取 $\sigma=0.1,\sigma_1=0.08,\sigma_2=0.08,\sigma_3=0.08,\sigma_4=0.8$.如图 1(c,d)所示.从图 1 可看到,随机模型围绕确定性模型不断震荡,且震荡幅度与 $\sigma,\sigma_i(i=1,2,3,4)$ 相关.

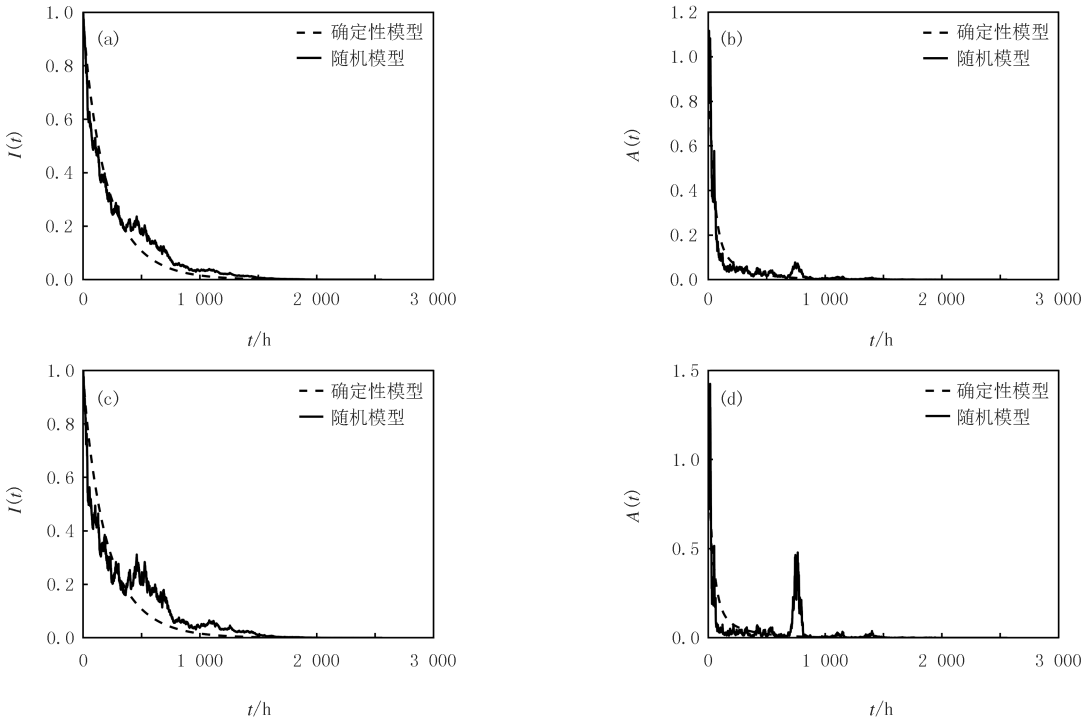


图1 $R_0 < 1$ 时随机模型的震荡行为
Fig.1 $R_0 < 1$ the oscillating behavior of stochastic models

(2)分别取参数 $b=0.8,\beta_1=0.05,q=0.25,K=100,\alpha=0.07,\delta=0.2,\mu=0.1,\rho=0.5,\eta=0.01,\theta=0.06,m=0.08,\sigma=0.013,\sigma_1=0.05,\sigma_2=0.05,\sigma_3=0.05,\sigma_4=0.05$ 此时 $R_0 > 1$,如图 2(a,b)所示,其他参数不变,取 $\sigma=0.03,\sigma_1=0.06,\sigma_2=0.06,\sigma_3=0.06,\sigma_4=0.06$.如图 2(c,d)所示,随机模型围绕确定性模型不断震荡,且震荡幅度与 $\sigma,\sigma_i(i=1,2,3,4)$ 相关.

接下来利用 Euler-Maruyama 方法对随机模型进行数值模拟.

(1)分别取参数 $b=10,\beta_1=2.9,q=0.03,K=100,\alpha=0.1,\delta=0.01,\mu=0.8,\rho=0.3,\eta=0.55,\theta=0.4,m=0.8,\sigma=0.3,\sigma_1=0.3,\sigma_2=0.3,\sigma_3=0.3,\sigma_4=0.3$ 此时 $R_0 > 1$,如图 3(a)所示;保持其他参数不变,取 $\alpha=1.5$,如图 3(b)所示.

(2)分别取参数 $b=10,\beta_1=0.5,q=0.03,K=100,\alpha=0.1,\delta=0.01,\mu=0.8,\rho=0.3,\eta=0.55,\theta=0.4,m=0.8,\sigma=1,\sigma_1=0.3,\sigma_2=0.3,\sigma_3=1,\sigma_4=2$,如图 4 所示,此时 $R_0 > 1$ 满足定理 2 的条件得到图 4,从图 4 中可以看出随机模型中的艾滋病已经灭绝,由此可知,当随机干扰强度足够大时,可以导致 $I(t),A(t)$ 灭绝.

注 3 图 1、图 2 体现了随机模型的解曲线在无病平衡点附近和地方病平衡点附近扰动,且扰动发强度与白噪声的强度有关,白噪声强度越大,模型扰动越强;图 3 体现了心理效应系数对随机模型的影响,心理效应系数越大,疾病的传播越困难;图 4 体现了即使是 $R_0 > 1$ 时,只要白噪声扰动强度足够大时,疾病也会灭绝.

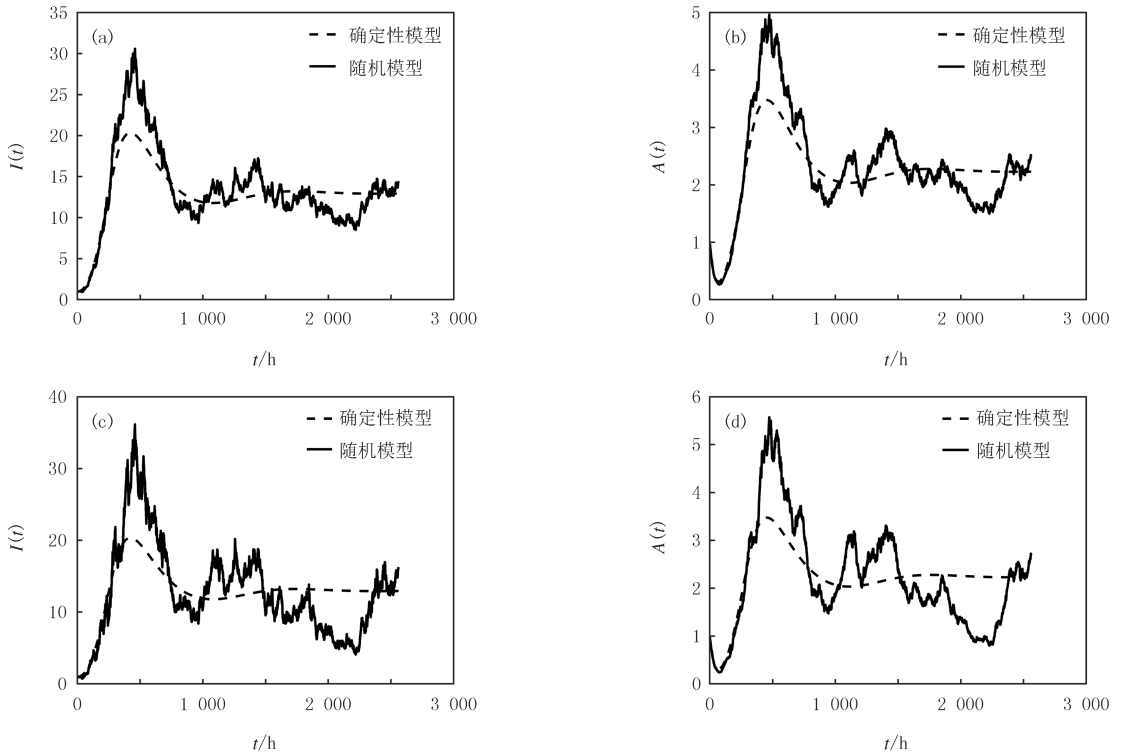
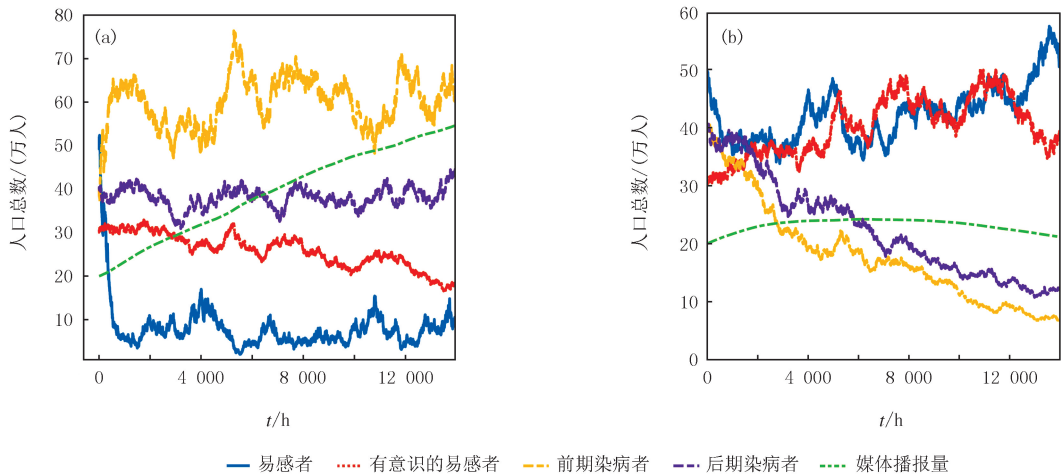
图2 $R_0 > 1$ 时随机模型的渐近行为Fig. 2 $R_0 > 1$ the oscillating behavior of stochastic models

图3 疾病的持久性

Fig. 3 Persistence of disease

6 结 论

考虑到心理效应、媒体影响及随机扰动,本文建立并研究了一类具有心理效应和媒体影响的随机 HIV/AIDS 传染病模型,利用 Lyapunov 方法证明了模型全局正解的存在唯一性,并对疾病灭绝和持久的条件进行分析,发现当 $R_0 > 1$ 时,可以通过增加白噪声强度或者增大心理效应系数改变随机模型的阈值,使 $R_0^s < 1$ 从而达到让疾病难以持续传播的目的.最后,利用最小二乘法进行数值模拟,发现随机模型的解会在确定性模型的无病平衡点和地方病平衡点附近震荡;利用 Euler-Maruyama 方法进行数值模拟,验证了强白噪声和较高的心理效应系数会使疾病难以持久这一结论.针对艾滋病,我国一直都是坚持预防为主、防治结合的方

针.对于此类无疫苗、无有效治愈药物的传染病,预防工作至关重要.因此,利用媒体报道等途径大力宣传艾滋病的相关知识,提高公众的认识和防范心理,是保护广大群众免受感染的重要手段.

本文中的 HIV/AIDS 模型,考虑到了环境会对疾病的传播产生影响,因此加入了随机扰动项,研究了更接近实际情况的随机传染病模型,对于此模型来说,除了考虑单独对 β_1 的扰动,也可以考虑对其他参数的扰动,比如对死亡率甚至对所有参数的扰动,建立新的模型进行研究,使得模型更具有实际应用价值.最后,白噪声对模型产生影响的同时,彩色噪声对模型的扰动也可以在模型的研究当中,考虑更为复杂的带 Markov 链的随机模型等,将在今后继续开展研究.

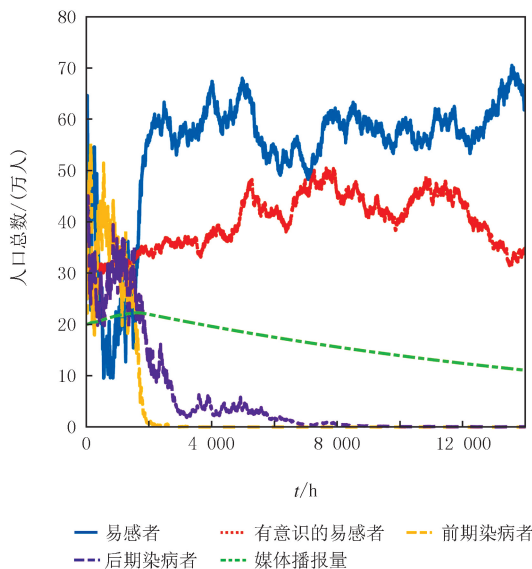


图4 强噪声使疾病的灭绝

Fig.4 The strong noise wiped out the disease

参 考 文 献

- [1] 王楚雯,胡颖,侯颖.广西壮族自治区艾滋病模型及预测分析[J].检验检疫学刊,2020,30(2):6-9.
WANG C W, HU Y, HOU Y. Modeling and predictive analysis of AIDs in Guangxi Zhuang autonomous reigion[J]. Journal of Inspection and Quarantine, 2020, 30(2): 6-9.
- [2] SURYANTO A, DARTI I. Global stability and optimal control of an HIV/AIDS epidemic model with behavioral change and treatment [J]. Eng Lett, 2021, 29(2): 575-591.
- [3] WANG X Y, GAO D Z, WANG J. Influence of human behavior on cholera dynamics[J]. Mathematical Biosciences, 2015, 267: 41-52.
- [4] XU J H, ZHOU Y C. Bifurcation analysis of HIV-1 infection model with cell-to-cell transmission and immune response delay[J]. Mathematical Biosciences and Engineering: MBE, 2016, 13(2): 343-367.
- [5] LAI X L, ZOU X F. Modeling cell-to-cell spread of HIV-1 with logistic target cell growth[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2015, 426(1): 563-584.
- [6] GUMEL A B, MOGHADAS S M, MICKENS R E. Effect of a preventive vaccine on the dynamics of HIV transmission[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2004, 9(6): 649-659.
- [7] 韩丽涛, 娄洁, 阮玉华, 等. 静脉注射吸毒人群 HIV/AIDS 数学模型分析[J]. 生物数学学报, 2008, 23(3): 429-434.
HAN L T, LOU J, RUAN Y H, et al. The analysis of the HIV/AIDS mathematical model for the injection drug use population[J]. Journal of Biomathematics, 2008, 23(3): 429-434.
- [8] WEI F Y, CHEN L H. Psychological effect on single-species population models in a polluted environment[J]. Mathematical Biosciences, 2017, 290: 22-30.
- [9] 张钰倩, 张太雷, 侯雯珊, 等. 一类具有媒体效应和追踪隔离的 SIQR 时滞传染病模型[J]. 浙江大学学报(理学版), 2022, 49(2): 159-169.
ZHANG Y Q, ZHANG T L, HOU W S, et al. A delayed SIQR epidemic model with media effect and tracking quarantine[J]. Journal of Zhejiang University (Science Edition), 2022, 49(2): 159-169.
- [10] 朱晶. 基于 Logistic 增长和心理作用的 SIR 传染病模型的渐近分析[J]. 北华大学学报(自然科学版), 2018, 19(3): 291-295.
ZHU J. Asymptotic analysis of an SIR epidemic model with psychology effect and logistic grow[J]. Journal of Beihua University (Natural Science), 2018, 19(3): 291-295.
- [11] RAZA A, RAFIQ M, BALEANU D, et al. Competitive numerical analysis for stochastic HIV/AIDS epidemic model in a two-sex population[J]. IET Systems Biology, 2019, 13(6): 305-315.
- [12] 赵彦军, 李辉来, 李文轩. 一类具有饱和发生率和心理作用的随机 SIR 传染病模型[J]. 吉林大学学报(理学版), 2021, 59(1): 20-26.
ZHAO Y J, LI H L, LI W X. A class of stochastic SIR epidemic model with saturated incidence and psychological effect[J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2021, 59(1): 20-26.

- [13] RIFHAT R, TENG Z D, WANG C X. Extinction and persistence of a stochastic SIRV epidemic model with nonlinear incidence rate[J]. *Advances in Difference Equations*, 2021, 2021(1): 200.
- [14] ZHANG Y H, MA X S, DIN A. Stationary distribution and extinction of a stochastic SEIQ epidemic model with a general incidence function and temporary immunity[J]. *AIMS Mathematics*, 2021, 6(11): 12359-12378.
- [15] 谭伟, 刘茂省. 具有非单调发生率的随机离散 SIR 传染病模型的稳定性[J]. *河南师范大学学报(自然科学版)*, 2023, 51(3): 56-65.
TAN W, LIU M X. Stability of stochastic discrete SIR epidemic model with nonmonotonic incidence rate[J]. *Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition)*, 2023, 51(3): 56-65.
- [16] 王定宇, 周少波. 一类基于心理作用的随机 SIRS 传染病模型[J]. *应用数学*, 2022, 35(3): 731-744.
WANG D Y, ZHOU S B. A class of stochastic SIRS epidemic model based on psychological effect[J]. *Mathematica Applicata*, 2022, 35(3): 731-744.
- [17] 何雪晴, 韦煜明. 同时具有 logistic 出生和 Markov 切换的随机 SIRS 传染病模型的动力学[J]. *应用数学和力学*, 2021, 42(12): 1327-1337.
HE X Q, WEI Y M. Dynamics of a class of stochastic SIRS infectious disease models with both logistic birth and Markov switching[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, 42(12): 1327-1337.
- [18] FRIEDMAN A. *Stochastic Differential Equations and Applications, Volume 1*[M]. New York: Academic Press, 1975.

Random HIV/AIDS infectious disease model with psychological and media effects

Liu Zongxuan, Zhang Tailei, Liang Yuan

(School of Science, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

Abstract: A random HIV/AIDS epidemic model satisfying the Logistic population growth equation with both psychological effects and media influences was established. By constructing the corresponding Lyapunov function, the existence and exclusivity of the global positive solution of the model are proved by theoretical analysis using Itô's lemma lemma and strong number theorem, and sufficient conditions for the extinction and persistence of the disease are given. Finally, the least square method and Euler-Maruyama method are used to verify the theoretical results.

Keywords: psychological effect; stochastic infectious disease model; extinction; persistence; Itô's formula

[责任编辑 陈留院 赵晓华]