

PBR₀代数的性质及其滤子

龚加安^{1,2}, 吴洪博¹

(1. 陕西师范大学 数学与信息科学学院, 西安 710062; 2. 商洛职业技术学院, 陕西 商洛 056001)

摘要:在研究BR₀-代数的基础上,首先给出了PBR₀-代数的概念,讨论了PBR₀-代数的一些性质,得到了PBR₀-代数的等价刻画定理,然后讨论了PBR₀-代数的滤子及其生成滤子的性质.

关键词:逻辑代数;BR₀代数;PBR₀代数;滤子;生成滤子

中图分类号:O141.1

文献标志码:A

多值逻辑不仅与当今一些前沿学科如模糊控制,人工智能,神经网络和计算机科学有着密切联系,而且多值逻辑理论本身的内容非常丰富.众所周知,不同的模糊逻辑系统对应着不同的逻辑代数.早在1958年,著名的逻辑学家C. C. Chang为解决Lukasiewicz逻辑系统的完备性引入了MV代数^[1].1997年,王国俊教授基于对模糊逻辑与逻辑推理方面存在的问题的分析,提出了一种新的形式演绎系统——L*系统和与之相配的逻辑代数——R₀代数^[2].此后,吴洪博教授又创建了模糊逻辑系统基础L*(BL*)和基础R₀(BR₀)代数^[3].以上理论的提出与研究,引起了人们极大的兴趣并取得丰硕的成果.在以上的模糊逻辑与推理的研究中,长期占主导地位的是所谓的t-模逻辑,而通常的t-模均要求t-模具有交换性.近年来受非可换线性逻辑(它在逻辑程序设计,计算机语言,模糊数据库等领域有着重要的应用)的影响,几个基于非可换t-模(也称伪t-模)的非可换逻辑系统相继提出^[4-5].吴洪博教授和他的学生们近年来一直致力于这方面的研究,取得了一些成果^[6-11].基于以上的研究,本文提出了对应于广义t-模的PBR₀-代数,并给出了PBR₀-代数的若干性质及其滤子.

1 预备知识

定义1^[3] 设M是(∧, ∨, →)型代数,如果

(i) M上有偏序≤使(M, ≤)成为有界分配格,且∨是关于序≤而言的上确界运算;

(ii) ∨是关于≤而言的逆序对合对应;

(iii) 对任意的a, b, c ∈ M,以下条件成立:

$$(B_1) \quad \neg a \rightarrow \neg b = b \rightarrow a;$$

$$(B_2) \quad 1 \rightarrow a = a, a \rightarrow a = 1;$$

$$(B_3) \quad b \rightarrow c \leq (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c);$$

$$(B_4) \quad a \rightarrow (b \rightarrow c) = b \rightarrow (a \rightarrow c);$$

$$(B_5) \quad a \rightarrow b \vee c = (a \rightarrow b) \vee (a \rightarrow c), a \rightarrow b \wedge c = (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c).$$

这里1是M中的最大元,并记0 = ∨1,那么称M为基础R₀-代数,记作BR₀-代数.

有时用a'表示∨a.由于“∨”是逆序对合对应,故De Morgan对偶律成立,即(a ∨ b)' = a' ∧ b', (a ∧ b)' = a' ∨ b'.易知a' = a → 0.对于Boole-代数,若规定a → b = a' ∨ b,则Boole-代数是BR₀-代数.

定义2^[3] 满足条件(B₆)(a → b) → b = a ∨ b的BR₀-代数是MV-代数.

收稿日期:2015-05-28;修回日期:2016-04-12.

基金项目:国家自然科学基金(61562015)

第1作者简介:龚加安(1975-),男,陕西商州人,商洛职业技术学院副教授,陕西师范大学青年骨干访问学者,研究方向为格上拓扑学与非经典数理逻辑.

通信作者:吴洪博(1959-),男,陕西师范大学教授,研究方向为格上拓扑学与非经典数理逻辑,E-mail:sxslgongke@163.com.

定义 3^[3] 满足条件(B₆) $(a \rightarrow b) \vee ((a \rightarrow b) \rightarrow \neg a \vee b) = 1$ 的 BR_0^- 代数称之为 R_0^- 代数.

性质 1^[3] 设 M 是 BR_0^- 代数, 对任意的 $a, b, c \in M$, 则

(1) $\neg a = a \rightarrow 0$; (2) $a \leq b$ 当且仅当 $a \rightarrow b = 1$; (3) $(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a) = 1$; (4) $a \rightarrow b \leq a \wedge c \rightarrow b \wedge c, a \rightarrow b \leq a \vee c \rightarrow b \vee c$; (5) $a \leq b \rightarrow c$ 当且仅当 $b \leq a \rightarrow c$; (6) 若 $a \leq b$, 则 $b \rightarrow c \leq a \rightarrow c, c \rightarrow a \leq c \rightarrow b$; (7) $a \vee b \leq ((a \rightarrow b) \rightarrow b) \wedge ((b \rightarrow a) \rightarrow a)$; (8) $\neg a \vee b \leq a \rightarrow b$.

引理 1^[3] 在 BR_0^- 代数 M 中引进二元运算 $*$: $M \times M \rightarrow M$, 对任意的 $a, b \in M, a * b = \neg(a \rightarrow \neg b)$, 则 $(*, \rightarrow)$ 是伴随对, 且 $(M, *, 1)$ 是带单位元 1 的 Abel 半群.

引理 2 若 M 是有界格, 且满足: (1) $(M, *, 1)$ 是带单位元 1 的 Abel 半群; (2) 对任意的 $a, b, c \in M, a * b \leq c$ 当且仅当 $a \leq b \rightarrow c$. 则

(1) $a \leq b$ 当且仅当 $a \rightarrow b = 1$; (2) $b \rightarrow (\bigwedge_{i \in I} a_i) = \bigwedge_{i \in I} (b \rightarrow a_i), (a_i \in M, i \in I)$;
 (3) $(\bigvee_{i \in I} a_i) * b = \bigvee_{i \in I} (a_i * b)$; (4) $(\bigvee_{i \in I} a_i) \rightarrow b = \bigwedge_{i \in I} (a_i \rightarrow b)$;
 (5) 若 $a \leq b$, 则 $a * c \leq b * c$; (6) 若 $a \leq b$, 则 $c \rightarrow a \leq c \rightarrow b, b \rightarrow c \leq a \rightarrow c$;
 (7) $a \rightarrow b \leq a \wedge c \rightarrow b \wedge c, a \rightarrow b \leq a \vee c \rightarrow b \vee c$; (8) $b \rightarrow c \leq (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)$.

2 PBR_0 代数及其性质

定义 4 若一个结构 $(M, \vee, \wedge, *, \rightarrow, \Rightarrow, 0, 1)$, 对任意的 $a, b, c \in M$, 满足下列条件:

(PB₁) $(M, \vee, \wedge, 0, 1)$ 是有界格;
 (PB₂) $(M, *, 1)$ 是有单位元 1 的半群;
 (PB₃) $a * b \leq c$ 当且仅当 $a \leq b \rightarrow c$ 当且仅当 $b \leq a \Rightarrow c$;
 (PB₄) $(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a) = (a \Rightarrow b) \vee (b \Rightarrow a) = 1$;
 (PB₅) $(a \rightarrow 0) \Rightarrow 0 = (a \Rightarrow 0) \rightarrow 0 = a$,

则称该代数结构为 PBR_0^- 代数, 记作 PBR_0^- 代数.

注 1 PBR_0^- 代数正是 BR_0^- 代数去掉 $*$ 运算的交换条件而导致了双蕴涵运算的一种代数结构.

性质 2 若 M 是 PBR_0^- 代数 $(M, \vee, \wedge, *, \rightarrow, \Rightarrow, 0, 1)$, 对任意的 $a, b, c \in M$, 则下列性质成立:

(P₁) $a \leq b$ 当且仅当 $a \rightarrow b = 1$ 当且仅当 $a \Rightarrow b = 1$;
 (P₂) $a * (a \Rightarrow b) \leq b \leq a \rightarrow (a * b), a * (a \Rightarrow b) \leq a \leq b \Rightarrow (b * a)$;
 (P₃) $(a \rightarrow b) * a \leq a \leq b \rightarrow (a * b), (a \rightarrow b) * a \leq b \leq a \rightarrow (b * a)$;
 (P₄) $1 \Rightarrow a = 1 \rightarrow a = a$;
 (P₅) $a * 0 = 0 * a = 0$;
 (P₆) $a \vee b = ((a \Rightarrow b) \rightarrow b) \wedge ((b \Rightarrow a) \rightarrow a) = ((a \rightarrow b) \Rightarrow b) \wedge ((b \rightarrow a) \Rightarrow a)$;
 (P₇) $a \rightarrow (b \Rightarrow c) = b \Rightarrow (a \rightarrow c)$;
 (P₈) 若 $a \leq b$, 则 $a * c \leq b * c, c * a \leq c * b$;
 (P₉) $a \rightarrow b \leq (c \rightarrow a) \rightarrow (c \rightarrow b), a \Rightarrow b \leq (c \Rightarrow a) \Rightarrow (c \Rightarrow b)$;
 (P₁₀) $a \rightarrow b \leq (b \rightarrow c) \Rightarrow (a \rightarrow c), a \Rightarrow b \leq (b \Rightarrow c) \rightarrow (a \Rightarrow c)$.

证明 只证(P₂).

因 $a \Rightarrow b \leq a \Rightarrow b$, 所以由(PB₃) 可得 $a * (a \Rightarrow b) \leq b$. 又因 $a * b \leq a * b$, 所以由(PB₃) 得 $b \leq a \Rightarrow (a * b)$. 得证 $a * (a \Rightarrow b) \leq b \leq a \Rightarrow (a * b)$.

因 $a \Rightarrow b \leq 1, a \Rightarrow a = 1$, 所以 $a \Rightarrow b \leq a \Rightarrow a$, 从而由(PB₃) 得 $a * (a \Rightarrow b) \leq a$. 又因 $b * a \leq b * a$, 所以由(PB₃) 得 $a \leq b \Rightarrow (b * a)$. 得证 $a * (a \Rightarrow b) \leq a \leq b \Rightarrow (b * a)$.

性质 3 若 M 是 PBR_0^- 代数 $(M, \vee, \wedge, *, \rightarrow, \Rightarrow, 0, 1)$, 对任意的 $a, b, c \in M$, 则

(P₁₁) 若 $a \leq b$, 则 $c \Rightarrow a \leq c \Rightarrow b, c \rightarrow a \leq c \rightarrow b$;
 (P₁₂) 若 $a \leq b$, 则 $b \Rightarrow c \leq a \Rightarrow c, b \rightarrow c \leq a \rightarrow c$;
 (P₁₃) 若 $a \leq b$, 则 $a \leq c \Rightarrow b, a \leq c \rightarrow b$;

$$(P_{14}) (a \rightarrow b) * a \leq a \wedge b, a * (a \Rightarrow b) \leq a \wedge b.$$

证明 由(P₂), (P₃), 结合(PB₃)可证.

性质4 若M是完备的PBR₀⁻代数,对任意的 $a, b, c, \in M, \{a_i \mid i \in I\} \subseteq M$,则

$$(P_{15}) a * (\bigvee_{i \in I} a_i) = \bigvee_{i \in I} (a * a_i), (\bigvee_{i \in I} a_i) * a = \bigvee_{i \in I} (a_i * a);$$

$$(P_{16}) b \Rightarrow (\bigwedge_{i \in I} a_i) = \bigwedge_{i \in I} (b \rightarrow a_i), b \rightarrow (\bigwedge_{i \in I} a_i) = \bigwedge_{i \in I} (b \rightarrow a_i);$$

$$(P_{17}) (\bigvee_{i \in I} a_i) \Rightarrow b = \bigwedge_{i \in I} (a_i \Rightarrow b), (\bigvee_{i \in I} a_i) \rightarrow b = \bigwedge_{i \in I} (a_i \rightarrow b);$$

$$(P_{18}) a \Rightarrow b \vee c = (a \Rightarrow b) \vee (a \Rightarrow c), a \rightarrow b \vee c = (a \rightarrow b) \vee (a \rightarrow c);$$

$$(P_{19}) a \wedge b \Rightarrow c = (a \Rightarrow c) \vee (b \Rightarrow c), a \wedge b \rightarrow c = (a \rightarrow c) \vee (b \rightarrow c).$$

证明 以(P₁₅), (P₁₉)为例.

(P₁₅) 由(PB₃)得 $\forall x \in M, a * (\bigvee_{i \in I} a_i) \leq x$ 当且仅当 $\bigvee_{i \in I} a_i \leq a \Rightarrow x$ 当且仅当 $\forall i \in I, a_i \leq a \Rightarrow x$ 当且仅当 $\forall i \in I, a * a_i \leq x$ 当且仅当 $\bigvee_{i \in I} (a * a_i) \leq x$.由x的任意性得 $a * (\bigvee_{i \in I} a_i) = \bigvee_{i \in I} (a * a_i)$.

同理可证 $(\bigvee_{i \in I} a_i) * a = \bigvee_{i \in I} (a_i * a)$. (P₁₅)成立.

(P₁₉)一方面,由性质(P₁₂)得 $a \wedge b \Rightarrow c \geq a \Rightarrow c, b \Rightarrow c$,从而 $a \wedge b \Rightarrow c \geq (a \Rightarrow c) \vee (b \Rightarrow c)$.

另一方面,由(P₁₁), (P₁₀), (P₁₆), (P₁), (PB₄)得

$$(a \wedge b \Rightarrow c) \rightarrow (a \Rightarrow c) \vee (b \Rightarrow c) \geq ((a \wedge b \Rightarrow c) \rightarrow (a \Rightarrow c)) \vee ((a \wedge b \Rightarrow c) \rightarrow (b \Rightarrow c)) \geq (a \Rightarrow a \wedge b) \vee (b \Rightarrow a \wedge b) = ((a \Rightarrow a) \wedge (a \Rightarrow b)) \vee ((b \Rightarrow a) \wedge (b \Rightarrow b)) = (a \Rightarrow b) \vee (b \Rightarrow a) = 1, \text{即} (a \wedge b \Rightarrow c) \rightarrow (a \Rightarrow c) \vee (b \Rightarrow c) = 1. \text{利用}(P_1) \text{得} a \wedge b \Rightarrow c \leq (a \Rightarrow c) \vee (b \Rightarrow c).$$

综上两方面得证 $a \wedge b \Rightarrow c = (a \Rightarrow c) \vee (b \Rightarrow c)$.

同理得证 $a \wedge b \rightarrow c = (a \rightarrow c) \vee (b \rightarrow c)$. (P₁₉)成立.

性质5 若M是PBR₀⁻代数,则对任意的 $a, b, c, \in M$ 有

$$(P_{20}) (a * b) \rightarrow c = a \rightarrow (b \rightarrow c), (b * a) \Rightarrow c = a \Rightarrow (b \Rightarrow c);$$

$$(P_{21}) a * b \leq a \wedge b \leq a, b;$$

$$(P_{22}) a \vee (b * c) \geq (a \vee b) * (a \vee c).$$

证明 只证(P₂₂).由(P₁₅)得

$$(a \vee b) * (a \vee c) = (a * a) \vee (a * c) \vee (b * a) \vee (b * c) \leq a \vee a \vee a \vee (b * c) = a \vee (b * c).$$

定义5 在PBR₀⁻代数 $(M, \vee, \wedge, *, \rightarrow, \Rightarrow, 0, 1)$ 中定义两个非运算 $\sim, \sim: M \rightarrow M$.对任意的 $a \in M$,
 $a^- = a \rightarrow 0, a^{\sim} = a \Rightarrow 0$.

性质6 若M是PBR₀⁻代数 $(M, \vee, \wedge, *, \rightarrow, \Rightarrow, 0, 1)$,对任意的 $a, b \in M$,则

$$(P_{23}) 1^- = 1^{\sim} = 0, 0^* = 0^- = 1; (P_{24}) a * a^- = a^- * a = 0;$$

$$(P_{25}) a \leq b^- \text{当且仅当} a * b = 0; (P_{26}) a \leq b^{\sim} \text{当且仅当} b * a = 0;$$

$$(P_{27}) a \rightarrow b^- = (a * b)^-, a \Rightarrow b^{\sim} = (b * a)^{\sim}; (P_{28}) a \leq b^- \text{当且仅当} b \leq a^{\sim};$$

$$(P_{29}) \text{若} a \leq b, \text{则} b^- \leq a^-, b^{\sim} \leq a^{\sim}; (P_{30}) a \rightarrow b = b^- \Rightarrow a^-, a \Rightarrow b = b^{\sim} \rightarrow a^{\sim};$$

$$(P_{31}) a \rightarrow b^- = b \Rightarrow a^-, a \Rightarrow b^{\sim} = b \rightarrow a^{\sim}; (P_{32}) a * b = (a \rightarrow b^-)^{\sim} = (b \Rightarrow a^{\sim})^-;$$

$$(P_{33}) a \rightarrow b = (a * b^-)^-, a \Rightarrow b = (b^- * a)^*.$$

证明 以(P₂₇)为例进行证明,其余的可利用性质2和性质3得证.

由(PB₃)知 $\forall x \in M, x \leq (a * b) \rightarrow 0$ 当且仅当 $x * (a * b) \leq 0$ 当且仅当 $(x * a) * b \leq 0$ 当且仅当 $x * a \leq b \rightarrow 0$ 当且仅当 $x \leq a \rightarrow (b \rightarrow 0)$,由x的任意性得 $(a * b) \rightarrow 0 = a \rightarrow (b \rightarrow 0)$,即 $a \rightarrow b^- = (a *)^-$.

同理得证 $a \Rightarrow b^{\sim} = (b * a)^{\sim}$.

性质7 若M是一个PBR₀⁻代数 $(M, \wedge, \vee, *, \rightarrow, \Rightarrow, 0, 1)$,对任意的 $a, b, c \in M$,则

$$(P_{34}) (a \vee b)^- = a^- \wedge b^-, (a \vee b)^{\sim} = a^{\sim} \wedge b^{\sim};$$

$$(P_{35}) (a \wedge b)^- = a^- \vee b^-, (a \wedge b)^{\sim} = a^{\sim} \vee b^{\sim};$$

$$(P_{36}) a \Rightarrow b \leq a \vee c \Rightarrow b \vee c, a \rightarrow b \leq a \vee c \rightarrow b \vee c;$$

$$(P_{37}) a \Rightarrow b \leq a \wedge c \Rightarrow b \wedge c, a \rightarrow b \leq a \wedge c \rightarrow b \wedge c;$$

(P₃₈) $a \rightarrow b \leq (a \rightarrow c) \vee (c \rightarrow b), a \Rightarrow b \leq (a \Rightarrow c) \vee (c \Rightarrow b)$.

证明 (P₃₄), (P₃₅), 由两个非运算的定义和(P₁), (P₁₇), (P₁₉), (P₃₀) 可证.

下证(P₃₆), (P₃₈) 成立.

(P₃₆) 根据(P₁), (P₁₁) 和(P₁₇) 得

$$(a \vee c) \rightarrow (b \vee c) = (a \rightarrow b \vee c) \wedge (c \rightarrow b \vee c) = a \rightarrow b \vee c \geq a \rightarrow b,$$

所以 $(a \vee c) \rightarrow (b \vee c) \geq a \rightarrow b$.

同理可证 $a \Rightarrow b \leq a \vee c \Rightarrow b \vee c$. (P₃₆) 成立.

(P₃₈) 因 $a \rightarrow b \leq a \vee c \rightarrow b \vee c$, 且由(P₁₇), (P₁₈) 得

$$\begin{aligned} a \vee c \rightarrow b \vee c &= (a \vee c \rightarrow b) \vee (a \vee c \rightarrow c) = ((a \rightarrow b) \wedge (c \rightarrow b)) \vee ((a \rightarrow c) \wedge (c \rightarrow c)) = \\ &= ((a \rightarrow b) \wedge (c \rightarrow b)) \vee (a \rightarrow c) \leq (a \rightarrow c) \vee (c \rightarrow b), \end{aligned}$$

所以 $a \rightarrow b \leq (a \rightarrow c) \vee (c \rightarrow b)$.

同理得证 $a \Rightarrow b \leq (a \Rightarrow c) \vee (c \Rightarrow b)$. 即(P₃₈) 成立.

注 2 由(P₃₄), (P₃₅) 知 De Morgan 对偶律对两个非运算都成立.

定理 1 一个 PBR_0^- 代数 $(M, \wedge, \vee, *, \rightarrow, \Rightarrow, 0, 1)$ 是一个有界分配格.

证明 由性质(P₁), (P₁₈), (P₃₇) 可得.

定义 6 一个 PBR_0^- 代数 $(M, \vee, \wedge, *, \rightarrow, \Rightarrow, 0, 1)$ 是交换的, 如果对任意的 $a, b \in M$, 有 $a * b = b * a$.

定理 2 一个 PBR_0^- 代数 $(M, \vee, \wedge, *, \rightarrow, \Rightarrow, 0, 1)$ 是交换的, 当且仅当对任意的 $a, b \in M$, 有 $a \rightarrow b = a \Rightarrow b$.

证明 (必要性) 由(PB₃) 得 $\forall x \in M, x \leq a \rightarrow b$ 当且仅当 $x * a \leq b$ 当且仅当 $a * x \leq b$ 当且仅当 $x \leq a \rightarrow b$. 由 x 的任意性得证 $a \rightarrow b = a \Rightarrow b$.

(充分性) 设 $\forall a, b \in M, a \rightarrow b = a \Rightarrow b$, 由(P₃₂) 和(P₇) 得

$$\begin{aligned} a * b &= (a \rightarrow b^-) \sim = (a \rightarrow (b \rightarrow 0)) \Rightarrow 0 = (a \rightarrow (b \Rightarrow 0)) \Rightarrow 0 = \\ &= (b \Rightarrow (a \rightarrow 0)) \Rightarrow 0 = (b \rightarrow (a \rightarrow 0)) \Rightarrow 0 = b * a. \end{aligned}$$

推论 1 一个交换的 PBR_0^- 代数 $(M, \vee, \wedge, *, \rightarrow, \Rightarrow, 0, 1)$ 是一个 BR_0^- 代数.

推论 2 若 PBR_0^- 代数 $(M, \vee, \wedge, *, \rightarrow, \Rightarrow, 0, 1)$ 中的 $*$ 运算是连续的, 则 PBR_0^- 代数就是 BR_0^- 代数.

引理 3 若(P₁), (P₇) 成立, 则(P₉) 等价与(P₁₀).

证明 设(P₉) 成立, 由(P₁), (P₇) 知

$$1 = (a \rightarrow b) \Rightarrow ((c \rightarrow a) \rightarrow (c \rightarrow b)) = (c \rightarrow a) \rightarrow ((a \rightarrow b) \Rightarrow (c \rightarrow b)),$$

故 $c \rightarrow a \leq (a \rightarrow b) \Rightarrow (c \rightarrow b)$.

同理可证 $c \Rightarrow a \leq (a \Rightarrow b) \rightarrow (c \Rightarrow b)$. (P₁₀) 成立.

反之, 设(P₁₀) 成立, 类似可得(P₉) 成立.

在 PBR_0^- 代数中, 这些性质不是独立的, 下面给出它们之间的联系.

定理 3 在有界格 M 中

- (i) 若(P₁₈) 成立, 则(P₁₁) 成立;
- (ii) 若(P₄), (P₃₀) 成立, 则(PB₅) 成立;
- (iii) 若(P₁), (P₃₀) 成立, 则(P₂₉) 成立;
- (iv) 若(P₂₉), (PB₅) 成立, 则(P₃₄), (P₃₅) 成立;
- (v) 若(PB₃), (P₈) 成立, 则(P₁₂) 成立;
- (vi) 若(P₁₇) 成立, 则(P₁₂) 成立;
- (vii) 若(P₁), (P₁₁), (P₁₇) 成立, 则(P₃₆) 成立;
- (viii) 若(P₁₇), (P₁₈), (P₃₆) 成立, 则(P₃₈) 成立;
- (ix) 若(PB₃), (P₁₂), (P₁₅) 成立, 则(P₁₇) 成立.

证明 略.

定理 4 M 是一个 PBR_0 -代数 $(M, \vee, \wedge, *, \rightarrow, \Rightarrow, 0, 1)$ 的充要条件是对任意的 $a, b, c \in M$ 满足 (PB_1) $(M, \vee, \wedge, 0, 1)$ 是有界格;

$$(P_4) 1 \Rightarrow a = 1 \rightarrow a = a;$$

$$(P_7) a \rightarrow (b \Rightarrow c) = b \Rightarrow (a \rightarrow c);$$

$$(P_9) a \rightarrow b \leq (c \rightarrow a) \rightarrow (c \rightarrow b), a \Rightarrow b \leq (c \Rightarrow a) \Rightarrow (c \Rightarrow b);$$

$$(P_{18}) a \Rightarrow b \vee c = (a \Rightarrow b) \vee (a \Rightarrow c), a \rightarrow b \vee c = (a \rightarrow b) \vee (a \rightarrow c);$$

$$(P_{30}) a \rightarrow b = b^- \Rightarrow a^-, a \Rightarrow b = b^- \rightarrow a^-.$$

其中 $a^- = a \Rightarrow 0, a^- = a \rightarrow 0, 1^- = 1^- = 0, 0^- = 0^- = 1$.

证明 (必要性) 由定义 4、性质 2、性质 4 及性质 6 可得证.

(充分性) 首先, 在 M 上定义二元运算 $* M \times M \rightarrow M, \forall a, b \in M,$

$$a * b = (a \rightarrow b^-)^- = (b \Rightarrow a^-)^-.$$

其次, 由定理 3(ii) 知 (PB_5) 也成立.

下面分 3 步证明其余条件也成立.

(I) (1) 由 $*$ 运算的定义, (PB_5) 及 (P_4) 知

$$a * 1 = (a \rightarrow 1^-)^- = (a \rightarrow 0)^- = a, 1 \sim a = (1 \rightarrow a^-)^- = (a^-)^- = a,$$

所以 1 是 $(M, *, 1)$ 的单位元.

(2) 由 $*$ 运算的定义, $(P_7), (PB_5)$ 和 (P_{30}) 知

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= (a \rightarrow (b * c)^-)^- = (a \rightarrow ((b \rightarrow c^-)^-)^-)^- = (a \rightarrow (b \rightarrow c^-))^-, \\ (a * b) * c &= ((a * b) \rightarrow c^-)^- = ((a \rightarrow b^-)^- \rightarrow c^-)^- = ((c^-)^- \rightarrow ((a \rightarrow b^-)^-)^-)^- = \\ &= ((c^-)^- \rightarrow (a \rightarrow b^-))^- = (a \rightarrow ((c^-)^- \rightarrow b^-))^- = (a \rightarrow (b \rightarrow c^-))^-, \end{aligned}$$

所以 $a * (b * c) = (a * b) * c$, 即 $*$ 运算满足结合律, 从而 $(M, *)$ 是半群. (PB_2) 成立.

(II) 先证 $a * b \leq c$ 当且仅当 $a \leq b \rightarrow c$.

(1) (必要性) 由 $*$ 运算的定义, $(PB_5), (P_1), (P_7), (P_{30})$ 得 $a * b \leq c$, 即

$$1 = (a \rightarrow b^-)^- \rightarrow c = c^- \Rightarrow (a \rightarrow b^-) = a \rightarrow (c^- \Rightarrow b^-) = a \rightarrow (b \rightarrow c),$$

所以 $a \leq b \rightarrow c$.

(2) (充分性) 由 $(PB_5), (P_1), (P_7), (P_{30})$ 得

$$1 = a \rightarrow (b \rightarrow c) = a \rightarrow (c^- \Rightarrow b^-) = c^- \Rightarrow (a \rightarrow b^-) = a \rightarrow b^- \rightarrow c,$$

所以 $a * b \leq c$. 类似可证 $a * b \leq c$ 当且仅当 $b \leq a \rightarrow c$. (PB_3) 成立.

(III) 由 $(P_1), (P_{38})$ 知

$$(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a) \geq a \rightarrow a = 1, (a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a) \geq a \Rightarrow a = 1,$$

所以 $(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a) = (a \Rightarrow b) \vee (b \Rightarrow a) = 1$. (PB_4) 成立.

由此得证满足上述条件的 M 是 PBR_0 -代数.

推论 3 PBR_0 -代数类是一个簇^[6], 即是等式代数类. 因此 PBR_0 -代数类关于子代数、同态像以及直积都是封闭的.

(P_9) 可写成等式的形式:

$$\begin{aligned} (a \rightarrow b) \wedge ((c \rightarrow a) \rightarrow (c \rightarrow b)) &= (a \rightarrow b), \\ (a \wedge b) \wedge ((c \Rightarrow a) \rightarrow (c \Rightarrow b)) &= (a \Rightarrow b). \end{aligned}$$

3 PBR_0 代数的滤子

定义 7 M 的非空子集 F 称为 M 的滤子, 如果它满足下列条件:

(F_1) $x, y \in F$ 时, $x * y \in F$; (F_2) $x \in F, x \leq y$ 时, $y \in F$.

若 $F \neq M$, 则称 F 是 M 的真滤子.

定理 5 若 F 是 M 的滤子, 则

- (1) $1 \in F$; (2) 若 $x, y \in F$, 则 $x \wedge y \in F$;
 (3) 若 $x \in F, y \in M$, 则 $y \rightarrow x \in F, y \Rightarrow x \in F$.

注 3 PBR_0 -代数的滤子是格滤子^[12].

定理 6 设 F 是 M 的子集, 则下列条件等价:

- (i) F 是一个滤子; (ii) $1 \in F$, 且 $a, a \Rightarrow b \in F$ 时, $b \in F$;
 (iii) 若 $a, b \in F, b \leq a \Rightarrow c$, 则 $c \in F$; (iv) $1 \in F$, 且 $a, a \rightarrow b \in F$ 时, $b \in F$;
 (v) 若 $a, b \in F, b \leq a \rightarrow c$, 则 $c \in F$.

证明 (i) \Rightarrow (ii) 由 (F_2) 得 $1 \in F$ 若 $a, a \Rightarrow b \in F$, 则由 (F_1) 得 $a * (a \Rightarrow b) \in F$. 又 (P_2) $a * (a \Rightarrow b) \leq b$, 再利用 (F_2) 知 $b \in F$.

(ii) \Rightarrow (iii) 由 (P_1) 知 $b \leq a \Rightarrow c$ 当且仅当 $b \Rightarrow (a \Rightarrow c) = 1 (1 \in F)$. 又 $b \in F$, 故 $a \Rightarrow c \in F$. 再由 $a \in F$ 得 $c \in F$.

(iii) \Rightarrow (i) 设 $a, b \in F$, 由 (P_2) 得 $b \leq a \Rightarrow (a * b)$, 则 $a * b \in F$. (F_1) 成立.

设 $a \in F, a \leq b$, 又 $a \leq 1 = a \Rightarrow b$, 故 $b \in F$. (F_2) 成立.

同理可证 (i) \Rightarrow (iv), (iv) \Rightarrow (v), (v) \Rightarrow (i).

由此可证 (i) 等价于 (ii) 等价于 (iii) 等价于 (iv) 等价于 (v).

容易证明 M 的滤子之交也是滤子, 下面考虑生成滤子.

定义 8 设 $A \subseteq M$, 包含 A 的最小的滤子称为由 A 生成的滤子, 记为 $[A]$. 若 $A = \{a\}$, 则 $[\{a\}]$ 记成 $[a]$, 显然 $[A] = \bigcap \{F \mid A \subseteq F \subseteq M, F \text{ 是 } M \text{ 的滤子}\}$.

定理 7 设 F 是 M 的非空子集, 则

$$\begin{aligned} [F] &= \{x \in M \mid \exists n \in \mathbb{N}, \text{ 及 } a_1, \dots, a_n \in F, \text{ 使得 } a_1 * a_2 * \dots * a_n \leq x\} = \\ &= \{x \in M \mid \exists n \in \mathbb{N}, \text{ 及 } a_1, \dots, a_n \in F, \text{ 使得 } a_n \Rightarrow (\dots \Rightarrow (a_1 \Rightarrow x) \dots) = 1\} = \\ &= \{x \in M \mid \exists n \in \mathbb{N}, \text{ 及 } a_1, \dots, a_n \in F, \text{ 使得 } a_1 \rightarrow (\dots \rightarrow (a_n \rightarrow x) \dots) = 1\}. \end{aligned}$$

证明 仅证第 1 个等式. 应用 (PB_3) 到第 1 个等式右边的式子即可得其余两个等式.

令 $A = \{x \in M \mid \exists n \in \mathbb{N}, \text{ 及 } a_1, \dots, a_n \in F, \text{ 使得 } a_1 * a_2 * \dots * a_n \leq x\}$.

(1) $\forall a \in F$, 由 (P_8) 知 $a * a \leq a * 1 = a$, 故 $a \in A$, 从而 $F \subseteq A$.

(2) 若 $a, b \in A$, 则 $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, 和 $a_1, \dots, a_{n_1}, b_1, \dots, b_{n_2} \in F$, 使得

$$a_1 * a_2 * \dots * a_{n_1} \leq a, b_1 * b_2 * \dots * b_{n_2} \leq b.$$

由 (P_8) 得 $(a_1 * a_2 * \dots * a_{n_1}) * (b_1 * b_2 * \dots * b_{n_2}) \leq a * b$, 故 $a * b \in A$ 若 $a \in A, a \leq b$, 则 $\exists n \in \mathbb{N}$, 和 $a_1, \dots, a_n \in F$, 使得 $a_1 * a_2 * \dots * a_n \leq a$, 从而 $a_1 * a_2 * \dots * a_n \leq b$, 所以 $b \in A$.

得证 A 是一个滤子.

(3) 设 C 是 M 的任意一个滤子, 且 $F \subseteq C$, 则 $\forall a \in A, \exists n \in \mathbb{N}$, 和 $a_1, \dots, a_n \in F \subseteq C$, 使得 $a_1 * a_2 * \dots * a_n \leq a$. 由 C 为滤子知 $a \in C$, 所以 $A \subseteq C$.

综上(1)、(2)、(3)得证 A 是包含 F 的最小滤子, 即 $A = [F]$.

$$\begin{aligned} \text{为简便, 记 } a^n &= \overbrace{a * \dots * a}^n, a^0 = 1, a \overset{n}{\Rightarrow} x = \overbrace{a \Rightarrow (a \Rightarrow \dots (a \Rightarrow x) \dots)}^n, a \overset{0}{\Rightarrow} x = x, a \overset{1}{\rightarrow} x = x, a \overset{n}{\rightarrow} x = \\ &= \overbrace{a \rightarrow (a \rightarrow \dots (a \rightarrow x) \dots)}^n \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

推论 4 $a \in M$, 则 $[a] = \{x \in M \mid \exists n \in \mathbb{N}, \text{ 使 } a^n \leq x\} = \{x \in M \mid \exists n \in \mathbb{N}, a \overset{n}{\Rightarrow} x = 1\} = \{x \in M \mid \exists n \in \mathbb{N}, a \overset{n}{\rightarrow} x = 1\}$.

推论 5 设 F 是 M 的滤子, $a \in M$, 则 $[F \cup \{a\}] = \{x \in M \mid \exists m \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_m \in F, \text{ 和 } n_1, \dots, n_m \geq 0, \text{ 使得 } (a_1 * a^{n_1}) * \dots * (a_m * a^{n_m}) \leq x\}$.

定理 8 设 F 是 M 的滤子, 且 $a, b \in M$, 则

$$[F \cup \{a\}] \cap [F \cup \{b\}] = [F \cup \{a \vee b\}].$$

证明 设 $x \in [F \cup \{a\}] \cap [F \cup \{b\}]$, 则存在 $t, s \in \mathbf{N}, n_1, \dots, n_t, m_1, \dots, m_s \geq 0$, 和 $a_1, \dots, a_t, b_1, \dots, b_s \in F$, 使得 $(a_1 * a^{n_1}) * \dots * (a_t * a^{n_t}) \leq x, (b_1 * b^{m_1}) * \dots * (b_s * b^{m_s}) \leq x$. 令 $p = a_1 * \dots * a_t * b_1 * \dots * b_s$, $l = \max\{n_1, \dots, n_t, m_1, \dots, m_s\}$, 则由 F 为滤子知 $p \in F$, 且由 (P_8) 得 $(p * a^l)' \leq x, (p * b^l)' \leq x$. 于是由 (P_{22}) 得 $x \geq (p * a^l)' \vee (p * b^l)' \geq ((p * a^l)' \vee (p * b^l)')^s \geq ((p * a^l) \vee (p * b^l))^s = (p * (a^l \vee b^l))^s \geq (p * (a \vee b)^l)^s$, 所以 $x \in [F \cup \{a \vee b\}]$, 从而 $[F \cup \{a\}] \cap [F \cup \{b\}] \subseteq [F \cup \{a \vee b\}]$.

反之, 设 $x \in [F \cup \{a \vee b\}]$, 由推论 5 知 $\exists k \in \mathbf{N}, n_1, \dots, n_k \geq 0$, 和 $a_1, \dots, a_k \in F$, 使得 $(a_1 * (a \vee b)^{n_1}) * \dots * (a_k * (a \vee b)^{n_k}) \leq x$. 利用 (P_8) 得 $x \geq (a_1 * a^{n_1}) * \dots * (a_k * a^{n_k})$, 且 $x \geq (a_1 * b^{n_1}) * \dots * (a_k * b^{n_k})$, 故 $x \in [F \cup \{a\}]$, 且 $x \in [F \cup \{b\}]$, 从而 $[F \cup \{a \vee b\}] \subseteq [F \cup \{a\}] \cap [F \cup \{b\}]$.

得证 $[F \cup \{a\}] \cap [F \cup \{b\}] = [F \cup \{a \vee b\}]$.

推论 6 设 F 是 M 的滤子, $a, b \in M$, 若 $a \vee b \in F$, 则 $[F \cup \{a\}] \cap [F \cup \{b\}] = F$.

推论 7 设 $a, b \in M$, 则 $[a] \cap [b] = [a \vee b]$.

参 考 文 献

- [1] Chang C C. Algebraic analysis of many valued logic[J]. Trans Amer Math Soc, 1958, 88: 467-490.
- [2] 王国俊. 数理逻辑引论与归结原理[M]. 2版. 北京: 科学出版社, 2006.
- [3] 吴洪博. 基础 R_0 代数与基础 \mathcal{L}^* 系统[J]. 数学进展, 2003, 32(5): 565-576.
- [4] 张小红. 基于 T -模与伪 T -模的逻辑系统及其代数分析[D]. 西安: 西北工业大学, 2005.
- [5] 张小红. 非可换模糊逻辑系统 P^* 及其完备性[J]. 数学学报, 2007, 50(2): 421-442.
- [6] 王霞霞, 吴洪博. BL -代数的余零化算子及其 BL 同态像[J]. 吉林大学学报(理学版), 2014, 52(6): 1112-1118.
- [7] 汪 宁, 吴洪博. $SWBR_0$ -代数的蕴涵理想及其诱导的商代数[J]. 吉林大学学报(理学版), 2013, 51(1): 21-26.
- [8] 高李红, 吴洪博. QBL -代数及其余 BL 代数的等价性[J]. 吉林大学学报(理学版), 2011, 49(1): 41-46.
- [9] 汪 宁, 吴洪博. 基于 MBR_0 代数的 MTL_0 代数的表现形式[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2013, 35(12): 48-52.
- [10] 周建仁, 吴洪博. R_0 蕴涵算子所导出的逻辑函数的特征[J]. 数学学报(中文版), 2014, 57(2): 235-248.
- [11] 吴洪博, 谢晶晶. 一种度量结构在四种逻辑代数上的共性[J]. 模糊系统与数学, 2014, 28(2): 104-110.
- [12] 郑崇友, 樊 磊, 崔宏斌. Frame 与连续格[M]. 北京: 首都师范大学出版社, 2000.

Properties of PBR_0 -Algebras and Its Filters

GONG Jiaan^{1,2}, WU Hongbo¹

((1. College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China; 2. Shangluo Vocational and Technical Institution, Shangluo 726000, China)

Abstract: Based on the BR_0 -Algebra, the concept of PBR_0 -Algebra has been given, and some properties are discussed. The equivalence of the PBR_0 -Algebra is obtained. Then the properties of the filter and generated filter of PBR_0 -Algebra are discussed.

Keywords: logical Algebras; BR_0 -Algebras; PBR_0 -Algebras; filter; generated filter