第49卷 第3期　　河南师范大学学报(自然科学版)　　Vol.49 No.3
2021年5月　　Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition)　　May 2021

文章编号:1000-2367(2021)03-0009-09　　**DOI**:10.16366/j.cnki.1000-2367.2021.03.002

含一般非线性项Kirchhoff型约束变分问题Schwarz对称极小解的存在性

张贻民,杨华华

(武汉理工大学 数学科学研究中心,武汉 430070)

摘　要:利用约束变分理论和对称递减重排技巧考虑一般非线性项情形下一类Kirchhoff型约束变分问题Schwarz对称极小解的存在性和不存在性.针对非线性项的指数和约束 $\int_{\mathbf{R}^N}|u|^2\mathrm{d}x=c^2$ 中的 c 与极小化问题Schwarz对称极小解存在与否的关系,得到了一个细致明确的划分.

关键词:Schwarz对称极小解;递减重排;Kirchhoff约束变分

中图分类号:O175.25　　**文献标志码**:A

本文考虑如下约束极小化问题:

$$e(c)=\inf_{u\in S_c}E(u),\tag{1}$$

其中 $a,b>0,c>0,1\leq N\leq 3,S_c:=\{u\in H^1(\mathbf{R}^N):\int_{\mathbf{R}^N}u(x)^2\mathrm{d}x=c^2\},E(u)=\frac{a}{2}\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{b}{4}\left(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2-\int_{\mathbf{R}^N}F(|x|,u(x))\mathrm{d}x$.

由约束变分理论知,若 $F(|x|,u(x))=\int_0^u f(|x|,s)\mathrm{d}x$,则存在一个拉格朗日常数 μ,使得约束极小化问题(1)的极小解满足如下欧拉-拉格朗日方程

$$-(a+b\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2)\Delta u=f(|x|,u)+\mu u,x\in\mathbf{R}^N.\tag{2}$$

方程(2)表示基尔霍夫方程

$$u_{tt}-(a+b\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2)\Delta u=f(x,u)\tag{3}$$

的稳态解.在考虑绳的横向振动产生的绳长度变化的情形下,方程(3)表示弹力绳的自由振动[1].自从文献[2]利用泛函分析的技巧将弹力绳的自由振动描述成上述方程(3)的形式后,方程(2)和(3)受到数学研究者的广泛关注.特别是非局部项 $(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x)\Delta u$ 的存在,使得方程(2)和(3)的研究更具有挑战性,近年涌现了非常多的结果,如关于方程(2)非平凡解的存在性可见文献[3-4];方程(2)多解的存在性可见文献[5-6];方程(2)解的存在和集中性质可见文献[7-8].

本文希望利用约束变分理论来研究问题(2)基态解的存在性,即探讨极小化问题(1)极小解的存在性.当 $f(|x|,u)=|u|^pu$ 时,利用约束变分理论和集中紧原理,文献[9]证明当 $p\in(0,\frac{8}{N})$ 时,存在

收稿日期:2021-02-23;**修回日期**:2021-03-28.

基金项目:国家自然科学基金(11771127);中央高校基本科研业务费专项基金资助(WUT:2020IB011;2020IB017;2020IB019).

作者简介(通信作者):张贻民(1980—),男,湖南涟源人,武汉理工大学教授,博士,博士生导师,主要从事非线性泛函分析和非线性偏微分方程的研究,E-mail:zhangym802@126.com.

$$c_* = \begin{cases} 0, 0 < p < \dfrac{4}{N}, \\ a^{\frac{4}{N}} \mid Q \mid_2, p = \dfrac{4}{N}, \\ \inf\{c \in (0, +\infty) : I(c) < 0\}, \dfrac{4}{N} < p < \dfrac{8}{N}, \end{cases}$$

其中 $Q(|x|)$ 是半线性椭圆型方程

$$-\Delta u + \frac{4+2p-Np}{Np} u = \frac{4}{Np} \mid u \mid^p u, x \in \mathbf{R}^N, 0 < p < 2^* - 2 \tag{4}$$

在平移意义下唯一的径向正解,当 $c > c_*$ 时,问题(1) 存在极小元.而当 $p \in [\frac{8}{N}, 2^* - 2)$ 时,问题(1) 不存在极小元.由于文献[9] 是利用集中紧原理去得到极小元,因此无法得到 $p \in (\frac{4}{N}, \frac{8}{N})$ 时 c_* 的具体值,文献[10] 改进了文献[9] 的方法,给出了具体的 c_* 值.文献[11] 利用细致的能量估计,避开了集中紧引理,得到了问题(1) 极小元的存在性和唯一性,并进一步得到 $p \in [\frac{8}{N}, 2^* - 2)$ 时限制在 S_c 上的山路解的存在性和唯一性.文献[12] 考虑了问题(1) 当 $c = 1$ 时极小解的存在性,并研究了含阱位势情形极小解的存在性和集中行为.文献[13] 研究了 $f(x, s)$ 是 Hartree 项情形时问题(1) 极小解的存在性,并讨论相应解的集中行为.更多其他情形关于极小化问题(1) 极小元存在性和唯一性的结果可参考文献[14-16].

本文的目的是探讨问题(1)在一般非线性情形下极小解的存在性.由于非线性项是一般的 $f(x, u)$,集中紧原理很难直接应用.如果不做特殊的假设条件,能量估计方法也失效.因此本文希望探讨问题(1)Schwarz 对称极小解的存在性.

假设函数 $F(|x|, u)$满足:

(F_1) $F(\cdot, s) : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ 对所有 $s \in \mathbf{R}$ 在$(0, \infty)$ 上可测,$F(r, \cdot) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 对所有 $r \in (0, \infty) \backslash A$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续,其中 A 是一维零测集;

(F_2) $F(r, 0) = 0$ 且对所有 $r \in (0, \infty), s \in \mathbf{R}$ 有 $F(r, s) \le F(r, |s|)$;

(F_3)对所有 $r > 0$,$\dfrac{F(r, s)}{s^2}$ 关于 s 在$(0, \infty)$ 上是单调非递减的;

(F_4)对 $0 < r \le R, 0 \le t \le s$ 有 $F(R, s) - F(R, t) \le F(r, s) - F(r, t)$;

(F_5)存在 $M > 0, q \in (0, \frac{8}{N})$,使得对所有 $r, s > 0, 0 \le F(r, s) \le M(s^2 + s^{q+2})$.

对所有的 $u \in H^1(\mathbf{R}^N)$,可知 $|u| \in H^1(\mathbf{R}^N)$ 且$\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla |u||^2 \mathrm{d}x$.结合条件(F2),有 $E(u) \ge E(|u|)$.因此,不妨将 S_c 改写成 $S_c = \{u \in H^1(\mathbf{R}^N) : u \ge 0, \int_{\mathbf{R}^N} u^2 \mathrm{d}x = c^2\}$.

在叙述本文定理之前,先介绍如下 Gagliardo-Nirenberg 不等式

$$\int_{\mathbf{R}^N} |u|^{p+2} \mathrm{d}x \le \frac{p+2}{2 |Q|_2^p} \left(\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{Np}{4}} \left(\int_{\mathbf{R}^N} |u|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{2(p+2)-Np}{4}}, \tag{5}$$

其中 Q 是方程(4)的径向正解,且满足

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla Q|^2 \mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^N} Q^2 \mathrm{d}x, \int_{\mathbf{R}^N} Q^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{p+2} \int_{\mathbf{R}^N} |Q|^{p+2} \mathrm{d}x. \tag{6}$$

设 $k(r) = \lim_{s \to 0^+} \dfrac{F(r, s)}{r^2}, k(\infty) = \lim_{r \to \infty} k(r)$, 本文的主要结果见定理 1.

定理 1 假设函数 $F(|x|, u)$满足条件(F_1)~(F_5)且 $e(c) \ne -k(\infty) c^2$.

(1)若 $0 < q < \frac{4}{N}$,对 $\forall c > 0$,极小化问题(1) 在空间 $H^1(\mathbf{R}^N)$ 存在 Schwarz 对称极小解.

(2)若 $q=\frac{4}{N}$,当 $c>c_1=\dfrac{a|Q|_2^{\frac{4}{N}}}{M(2+\frac{4}{N})}$ 时,极小化问题(1) 在空间 $H^1(\mathbf{R}^N)$ 存在 Schwarz 对称极小解,且

此时 $e(c)\geq \dfrac{a}{2b}\dfrac{M(2+\frac{4}{N})}{|Q|_2^q}c^{\frac{4}{N}}-\dfrac{1}{4b}(\dfrac{M(2+\frac{4}{N})}{|Q|_2^q}c^{\frac{4}{N}})^2-\dfrac{a^2}{4b}-Mc^2$.

当 $c\leq c_1$ 时,若 $\lim\inf_{t\to 0^+}\dfrac{F(r,t)}{t^2}=M$,则极小化问题(1) 在空间 $H^1(\mathbf{R}^N)$ 上不存在非零极小解.

(3)当 $\frac{4}{N}<q<\frac{8}{N}$ 时,对 $c\geq c_2=[(\dfrac{2a}{8-Nq})^{\frac{8-Nq}{4}}(\dfrac{b}{Nq-4})^{\frac{Nq-4}{4}}\dfrac{2|Q|_2^q}{M(q+2)}]^{\frac{2}{2(q+2)-Nq}}$,极小化问题(1) 在空间 $H^1(\mathbf{R}^N)$ 上存在 Schwarz 对称极小解,且此时

$$e(c)\geq\left[(\frac{2a}{8-Nq})^{\frac{8-Nq}{4}}(\frac{b}{Nq-4})^{\frac{Nq-4}{4}}-\frac{M(q+2)c^{\frac{2(q+2)-Nq}{2}}}{2|Q|_2^q}\right]\left(\frac{2a(Nq-4)}{(8-Nq)b}\right)^{\frac{Nq}{4}}-Mc^2.$$

当 $c<c_2$ 时,若 $\lim\inf_{t\to 0^+}\dfrac{F(r,t)}{t^2}=M$,则极小化问题(1) 在空间 $H^1(\mathbf{R}^N)$ 上不存在非零极小解.

(4)当 $q=\frac{8}{N}$ 时,若 $c>c_3=(\dfrac{Nb|Q|_2^{\frac{8}{N}}}{4M(N+4)})^{\frac{N}{8-2N}}$ 且 $\liminf\limits_{t\to\infty}\dfrac{F(r,t)}{t^{\frac{8}{N}+2}}=M>0$ 或 $c\leq c_3$ 且 $\lim\inf_{t\to 0^+}\dfrac{F(r,t)}{t^2}=M$,极小化问题(1) 在空间 $H^1(\mathbf{R}^N)$ 上不存在 Schwarz 对称极小解.

注 1　当 $q>\frac{8}{N}$ 时,令 $u_\lambda(x)=\lambda^{\frac{N}{2}}u(\lambda x)$,其中 $\lambda>0$ 且 $u\in S_c$.若假设对任意的 $B>0$,成立 $\lim\inf_{t\to\infty}\dfrac{F(r,t)}{t^{q+2}}=B$,则 $\forall\varepsilon_1>0$, $\exists t_0>0$,当 $|t|>t_0$ 时,$F(r,t)>(B-\varepsilon_1)|t|^{q+2}$,故当 $q>\frac{8}{N}$,即$\frac{Nq}{2}>4$ 时可得当 $\lambda\to+\infty$ 时有 $E(u_\lambda)<\dfrac{a\lambda^2}{2}\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\dfrac{b\lambda^4}{4}(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x)^2-(B-\varepsilon_1)\lambda^{\frac{Nq}{2}}\int_{\mathbf{R}^N}|u|^{q+2}\mathrm{d}x\to-\infty$.这意味着对所有的 c,$e(c)=-\infty$,因此当 $q>\frac{8}{N}$ 时极小化问题(1) 在空间 $H^1(\mathbf{R}^N)$ 上不存在 Schwarz 对称极小解.

注 2　对于定理 1 中非线性项的条件$(F_1)\sim(F_5)$,如果 $b=0$,即问题(1)不含非局部项,是半线性椭圆型极小化问题时,相似的问题由文献[17]讨论过,但是由于问题(1)含非局部项,相应的情况变得更复杂,因此定理 1 的结论也更丰富.同时,本文进一步讨论了一些非存在性的结果,这是与文献[17]完全不同的.

本文中,若不加说明,$C,C_1,C_2,\cdots$ 表示常数,空间 $H^1(\mathbf{R}^N)$ 中的范数为 $\|u\|=\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}^N}u^2\mathrm{d}x$,$|u|_p$ 表示函数 u 在空间 $L^p(\mathbf{R}^N)$ 中的范数.

1　预备引理

对任意的 $u\in S(c)$,由(F_5)及 Gagliardo-Nirenberg 不等式(5)有

$$E(u)\geq\frac{a}{2}\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{b}{4}(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x)^2-M\int_{\mathbf{R}^N}|u|^2\mathrm{d}x-M\int_{\mathbf{R}^N}|u|^{q+2}\mathrm{d}x\geq$$

$$\frac{a}{2}\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{b}{4}(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x)^2-Mc^2-\frac{M(q+2)c^{\frac{2(q+2)-Nq}{2}}}{2|Q|_2^q}(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x)^{\frac{Nq}{4}}\triangleq$$

$$g_q(t),其中\ t=\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x.\tag{7}$$

引理1 假设函数 F 满足条件$(F_1)\sim(F_5)$,函数 $g_q(t)=\frac{a}{2}t+\frac{b}{4}t^2-Mc^2-\frac{M(q+2)c^{\frac{2(q+2)-Nq}{2}}}{2|Q|_2^q}t^{\frac{Nq}{4}}(t>0)$,则

(i)若 $0<q<\frac{4}{N}$,$\exists t_1>0$,使得 $e(c)\geq g_q(t_1)$ 或 $e(c)\geq(\frac{a}{2}-\varepsilon)\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{b}{4}(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x)^2-Mc^2-\frac{4-Nq}{4}(\frac{4\varepsilon}{Nq})^{-\frac{Nq}{4-Nq}}(\frac{M(q+2)c^{\frac{2(q+2)-Nq}{2}}}{2|Q|_2^q})^{\frac{4}{4-Nq}}$.

(ii)若 $q=\frac{4}{N}$,存在 $c_1\triangleq(\frac{a|Q|_2^{\frac{4}{N}}}{M(2+\frac{4}{N})})^{\frac{N}{4}}$.当 $c>c_1$ 时,$\exists t_2=\frac{M(2+\frac{4}{N})}{b|Q|_2^{\frac{4}{N}}}c^{\frac{4}{N}}-\frac{a}{b}$,使得 $e(c)\geq\frac{a}{2b}\frac{M(2+\frac{4}{N})}{|Q|_2^{\frac{4}{N}}}c^{\frac{4}{N}}-\frac{1}{4b}(\frac{M(2+\frac{4}{N})}{|Q|_2^{\frac{4}{N}}}c^{\frac{4}{N}})^2-\frac{a^2}{4b}-Mc^2$.当 $c\leq c_1$ 时,则 $e(c)\geq-Mc^2$.

(iii)若 $\frac{4}{N}<q<\frac{8}{N}$,存在 $c_2\triangleq[(\frac{2a}{8-Nq})^{\frac{8-Nq}{4}}(\frac{b}{Nq-4})^{\frac{Nq-4}{4}}\frac{2|Q|_2^q}{M(q+2)}]^{\frac{2}{2(q+2)-Nq}}$.当 $c<c_2$ 时,$e(c)\geq-Mc^2$.当 $c\geq c_2$ 时,存在 $t_3=\frac{2(Nq-4)a}{(8-Nq)b}$,使得 $e(c)\geq[(\frac{2a}{8-Nq})^{\frac{8-Nq}{4}}(\frac{b}{Nq-4})^{\frac{Nq-4}{4}}-\frac{M(q+2)c^{\frac{2(q+2)-Nq}{2}}}{2|Q|_2^q}]\cdot\left(\frac{2a(Nq-4)}{(8-Nq)b}\right)^{\frac{Nq}{4}}-Mc^2$.

(iv)若 $q=\frac{8}{N}$,存在 $c_3\triangleq(\frac{Nb|Q|_2^{\frac{8}{N}}}{4M(N+4)})^{\frac{N}{8-2N}}$.当 $c\leq c_3$ 时,$e(c)\geq-Mc^2$.当 $c>c_3$ 时,$e(c)\geq-\infty$.

证明 (i)若 $0<\frac{Nq}{4}<1$,即 $0<q<\frac{4}{N}$,可知函数 $g_q(t)=\frac{a}{2}t+\frac{b}{4}t^2-Mc^2-\frac{M(q+2)c^{\frac{2(q+2)-Nq}{2}}}{2|Q|_2^q}t^{\frac{Nq}{4}}$ 存在一个极小值点,设为 t_1,则 $e(c)\geq g_q(t_1)$.特别的,利用 Young 不等式,有 $g_q(t)\geq(\frac{a}{2}-\varepsilon)t+\frac{b}{4}t^2-Mc^2-(\frac{4\varepsilon}{Nq})^{-\frac{Nq}{4-Nq}}(\frac{4-Nq}{4})(\frac{M(q+2)c^{\frac{2(q+2)-Nq}{2}}}{2|Q|_2^q})^{\frac{4}{4-Nq}}$,即 $e(c)\geq(\frac{a}{2}-\varepsilon)\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{b}{4}(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x)^2-Mc^2-\frac{4-Nq}{4}(\frac{4\varepsilon}{Nq})^{-\frac{Nq}{4-Nq}}(\frac{M(q+2)c^{\frac{2(q+2)-Nq}{2}}}{2|Q|_2^q})^{\frac{4}{4-Nq}}$.

(ii)若 $\frac{Nq}{4}=1$,即 $q=\frac{4}{N}$,由(7)式有 $g_q(t)=(\frac{a}{2}-\frac{M(2+\frac{4}{N})}{2|Q|_2^{\frac{4}{N}}}c^{\frac{4}{N}})t+\frac{b}{4}t^2-Mc^2$.若$\frac{a}{2}-\frac{M(2+\frac{4}{N})}{2|Q|_2^{\frac{4}{N}}}c^{\frac{4}{N}}\geq 0$,即 $c\leq c_1\triangleq\left(\frac{a|Q|_2^{\frac{4}{N}}}{M(2+\frac{4}{N})}\right)^{\frac{N}{4}}$ 时,可知函数 $g_q(t)\geq-Mc^2$ 显然成立,且 $g_q(t)$ 无极小值点.若 $c>c_1$,存在 $t_2=\frac{M(2+\frac{4}{N})}{b|Q|_2^{\frac{4}{N}}}c^{\frac{4}{N}}-\frac{a}{b}$,使得 $g_q(t)\geq g_q(t_2)=\frac{a}{2b}\frac{M(2+\frac{4}{N})}{|Q|_2^{\frac{4}{N}}}c^{\frac{4}{N}}-\frac{1}{4b}(\frac{M(2+\frac{4}{N})}{|Q|_2^{\frac{4}{N}}}c^{\frac{4}{N}})^2-\frac{a^2}{4b}-Mc^2$,即 $e(c)\geq g_q(t_2)$.

(iii)若 $1<\frac{Nq}{4}<2$,即$\frac{4}{N}<q<\frac{8}{N}$,取 $\alpha=\frac{8-Nq}{4}$,$\beta=1-\alpha=\frac{Nq-4}{4}$,由 Young 不等式,对任意的$t>$

0,有 $\frac{a}{2}t+\frac{b}{4}t^2 \geq \left(\frac{a}{2\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{b}{4\beta}\right)^{\beta} t^{\alpha+2\beta}=\left(\frac{2a}{8-Nq}\right)^{\frac{8-Nq}{4}}\left(\frac{b}{Nq-4}\right)^{\frac{Nq-4}{4}} t^{\frac{Nq}{4}}$,上式等号成立的条件是 $\frac{at}{2\alpha}=\frac{bt^2}{4\beta}$,即 $t_3=\frac{2(Nq-4)a}{(8-Nq)b}$. 代入(7)式有

$$E(u)\geq\left[\left(\frac{2a}{8-Nq}\right)^{\frac{8-Nq}{4}}\left(\frac{b}{Nq-4}\right)^{\frac{Nq-4}{4}}-\frac{M(q+2)c^{\frac{2(q+2)-Nq}{2}}}{2|Q|_2^q}\right]\left(\frac{2a(Nq-4)}{(8-Nq)b}\right)^{\frac{Nq}{4}}-Mc^2.$$

若 $c<c_2\triangleq\left[\left(\frac{2a}{8-Nq}\right)^{\frac{8-Nq}{4}}\left(\frac{b}{Nq-4}\right)^{\frac{Nq-4}{4}}\frac{2|Q|_2^q}{M(q+2)}\right]^{\frac{2}{2(q+2)-Nq}}$,此时函数 $g_q(t)\geq -Mc^2$,且 $g_q(t)$ 无极小值.若 $c\geq c_2$,此时函数 $g_q(t)$ 在点 $t=t_3$ 取到极小值,即

$$e(c)\geq\left[\left(\frac{2a}{8-Nq}\right)^{\frac{8-Nq}{4}}\left(\frac{b}{Nq-4}\right)^{\frac{Nq-4}{4}}-\frac{M(q+2)c^{\frac{2(q+2)-Nq}{2}}}{2|Q|_2^q}\right]\left(\frac{2a(Nq-4)}{(8-Nq)b}\right)^{\frac{Nq}{4}}-Mc^2.$$

(iv)若 $\frac{Nq}{4}=2$,即 $q=\frac{8}{N}$,此时(7)式为 $E(u)\geq\frac{a}{2}\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\left(\frac{b}{4}-\frac{M(2+\frac{8}{N})}{2|Q|_2^{\frac{8}{N}}}c^{\frac{8}{N}-2}\right)\left(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2-Mc^2$.如果 $c\leq c_3\triangleq\left(\frac{Nb|Q|_2^{\frac{8}{N}}}{4M(N+4)}\right)^{\frac{N}{8-2N}}$,可知 $g_q(t)$ 关于 t 单调递增,且 $g_q(t)\geq -Mc^2$.如果 $c>c_3$,可知 $g_q(t)$ 在 $t=t_4=\frac{a|Q|_2^{\frac{8}{N}}}{2M(2+\frac{8}{N})c^{\frac{8}{N}-2}-b|Q|_2^{\frac{8}{N}}}$ 取得极大值.进一步可知当 $t\to\infty$ 时有 $g_q(t)\to-\infty$.因此 $e(c)\geq-\infty$.

引理 2　假设函数 F 满足条件$(F_3)\sim(F_5)$,则对任意的 $c>0$ 有 $e(c)\leq -k(\infty)c^2$ 成立.

证明　在(F_4)中令 $t=0$,结合(F_2),对任意的 $s\geq 0$,$0<r<R$,有

$$F(R,s)\leq F(r,s).\tag{8}$$

即 $F(r,s)$ 关于 r 是单调非增的.同样 $F(r,s)/s^2$ 关于 r 也是单调非增的.

由(F_5),设 $k(r)=\lim_{s\to0^+}F(r,s)/s^2$,可知 $k(r)\geq 0$.结合(8) 可得,对 $\forall\, 0\leq r\leq R$,有 $0\leq k(R)\leq k(r)\leq M$.不妨设 $\lim_{r\to\infty}k(r)=k(\infty)$.由$(F_3)$ 可知,对任意的 $s\leq t$,有 $F(r,s)/s^2\leq F(r,t)/t^2$.由 $k(r)$ 的定义可知,对任意的 r,s 有

$$F(r,s)/s^2\geq k(r)\geq k(\infty)\geq 0.\tag{9}$$

从 $k(\infty)$ 的定义可知,存在 $r_0>0$,使得

$$k(r_0)\leq k(\infty)+\varepsilon,\tag{10}$$

从 $k(r)$ 的定义知,对任意 $r>0$,存在 $s_0>0$ 足够小,使得

$$F(r,s_0)/s_0^2\leq k(r)+\varepsilon,\tag{11}$$

结合(10)和(11)式有

$$F(r_0,s_0)/s_0^2\leq k(\infty)+2\varepsilon.\tag{12}$$

这意味着 $\inf\{F(r,s)/s^2: r>0,s>0\}\leq k(\infty)$. 结合(9)式可得

$$k(\infty)=\inf\{F(r,s)/s^2: r>0,s>0\}.\tag{13}$$

另一方面,对任意 $r\geq r_0$ 和 $0<s\leq s_0$. 有

$$0\leq F(r,s)/s^2-k(r)\leq F(r_0,s_0)/s_0^2-k(r)\leq F(r_0,s_0)/s_0^2-k(\infty)\leq\varepsilon.\tag{14}$$

对任意 $u\in H^1(\mathbf{R}^N)$ 且 $u\geq 0$, 由(13)式,有

$$\int_{\mathbf{R}^N}F(|x|,u(x))\mathrm{d}x=\int_{\{x:u(x)>0\}}\frac{F(x,u(x))}{u^2(x)}u^2(x)\mathrm{d}x\geq k(\infty)\int_{\mathbf{R}^N}u^2(x)\mathrm{d}x.$$

因此对任意的 $u\in S_c$ 可得

$$E(u)\leq\frac{a}{2}\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{b}{4}(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x)^2-k(\infty)c^2. \tag{15}$$

假设 $\mu=\inf_{u\in S_c}\{\frac{a}{2}\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{b}{4}(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x)^2\}$,则 $\mu=0$.

实际上,对任意 $0<\lambda<1$,$u\in S_c$,设 $u_\lambda(x)=\lambda^{\frac{N}{2}}u(\lambda x)$,则 $u_\lambda\in S_c$ 且

$$\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u_\lambda|^2\mathrm{d}x=\lambda^2\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x,(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u_\lambda|^2\mathrm{d}x)^2=\lambda^4(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x)^2.$$

因此,当 $\lambda\to0$ 时,$0\leq\mu\leq\frac{a}{2}\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u_\lambda|^2\mathrm{d}x+\frac{b}{4}(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u_\lambda|^2\mathrm{d}x)^2=\frac{a\lambda^2}{2}\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{b\lambda^4}{4}(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x)^2\to0$. 这意味着 $\mu=0$.

对(15)式两边关于 $u\in S_c$ 取极小,可得 $e(c)\leq-k(\infty)c^2$.

2 定理的证明

由引理(1)可知问题(1)存在一个极小化序列,设为 $\{u_n\}$,满足$\int_{\mathbf{R}^N}u_n^2\mathrm{d}x=c^2$.可知 $|u_n|\in H^1(\mathbf{R}^N)$ 且 $\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla|u_n||^2\mathrm{d}x$.设 u_n^* 表示 $|u_n|$ 的 Schwarz 对称递减重排,则 $u_n^*\in H^1(\mathbf{R}^N)$ 且 $\|u_n^*\|_2^2=\|u_n\|_2^2=c^2$.另一方面,由文献[18]知对所有 $u_n\in H^1(\mathbf{R}^N)$

$$\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u_n^*(x)|^2\mathrm{d}x\leq\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u_n(x)|^2\mathrm{d}x. \tag{16}$$

由文献[19-20]知若 Carathéodory 函数 $F(|x|,u)$满足$(F_2)\sim(F_4)$,则对所有 $u\in H^1(\mathbf{R}^N)$ 有如下不等式:

$$\int_{\mathbf{R}^N}F(|x|,u)\mathrm{d}x\leq\int_{\mathbf{R}^N}F(|x|,u^*(x))\mathrm{d}x. \tag{17}$$

结合(16)和(17)式,可知对所有 $u\in H^1(\mathbf{R}^N)$ 有

$$e(c)\leq E(u_n^*)\leq E(u_n)=e(c). \tag{18}$$

即序列 $\{u_n^*\}$ 也是问题(1)的极小化序列.

当 $0<q<\frac{4}{N}$时:相似(7)式,由(F_5)及 Gagliardo-Nirenberg 不等式(5)有

$$E(u_n^*)\geq\frac{a}{2}\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u_n^*|^2\mathrm{d}x-Mc^2-\frac{M(q+2)c^{\frac{2(q+2)-Nq}{2}}}{2|Q|_2^q}(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u_n^*|^2\mathrm{d}x)^{\frac{Nq}{4}}. \tag{19}$$

由于 $e(c)=\lim_{n\to\infty}E(u_n^*)$ 且$\frac{Nq}{4}<1$,(19)式显示序列$\{u_n^*\}$在空间 $H^1(\mathbf{R}^N)$ 中有界.存在$\{u_n^*\}$的子序列,仍记作$\{u_n^*\}$,存在 $\omega\in H^1(\mathbf{R}^N)$,使得在空间 $H^1(\mathbf{R}^N)$ 中 $u_n^*\rightharpoonup\omega$,$\int_{\mathbf{R}^N}\omega^2\mathrm{d}x\leq\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^N}|u_n^*|^2\mathrm{d}x=c^2$.

定义 $\bar{E}(u)=E(u)+k(\infty)\int_{\mathbf{R}^N}u^2\mathrm{d}x$.由 $H^1(\mathbf{R}^N)$ 中范数的弱下半连续性,有

$$\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla\omega|^2\mathrm{d}x\leq\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u_n^*|^2\mathrm{d}x,\left(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla\omega|^2\mathrm{d}x\right)^2\leq\liminf_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u_n^*|^2\right)^2. \tag{20}$$

对任意的常数 $R>0$,记 $B_R(0)=\{x\in\mathbf{R}^N:|x|\leq R\}$.因此,在空间 $L^{p+2}(\mathbf{R}^N)$,$p\in[0,2^*-2)$ 中有 $u_n^*\to\omega$. 因此

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbf{R}^N}(k(r)-k(\infty))|u_n^*|^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^N}(k(r)-k(\infty))\omega^2\mathrm{d}x\right|\leq\int_{B_R(0)}(k(r)-k(\infty))|(u_n^*)^2-\\&\omega^2|\mathrm{d}x+\int_{|x|\geq R}(k(r)-k(\infty))((u_n^*)^2+\omega^2)\mathrm{d}x\leq M\int_{B_R(0)}|(u_n^*)^2-\\&\omega^2|\mathrm{d}x+\sup_{r\geq R}(k(r)-k(\infty))\int_{|x|\geq R}((u_n^*)^2+\omega^2)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

两边关于 n 取极限,对所有 $R>0$,有

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbf{R}^N}(k(r)-k(\infty))(u_n^*)^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^N}(k(r)-k(\infty))\omega^2\mathrm{d}x\right|\leq 2c^2\sup_{r\geq R}(k(r)-k(\infty)).$$

由 $k(\infty)$的定义知,当 R 足够大时,有

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbf{R}^N}(k(r)-k(\infty))(u_n^*)^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^N}(k(r)-k(\infty))\omega^2\mathrm{d}x\right|=0. \tag{21}$$

由(F_5),L^p 空间的完备性和 Lebesgue 控制收敛定理,有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{B_R(0)}F(|x|,u_n^*)\mathrm{d}x=\int_{B_R(0)}F(|x|,\omega)\mathrm{d}x$.相似的有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{B_R(0)}F(|x|,u_n^*)-k(r)(u_n^*)^2\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{B_R(0)}[F(|x|,u_n^*)-k(\infty)(u_n^*)^2-(k(r)-k(\infty))(u_n^*)^2]\mathrm{d}x=\int_{B_R(0)}[F(|x|,\omega)-k(r)\omega^2]\mathrm{d}x. \tag{22}$$

另一方面,

$$\int_{|x|\geq R}F(|x|,u_n^*)-k(r)(u_n^*)^2\mathrm{d}x=\int_{|x|\geq R}\left[\frac{F(|x|,u_n^*)}{(u_n^*)^2}-k(r)\right](u_n^*)^2\mathrm{d}x\leq c^2\sup_{|x|\geq R}\left\{\frac{F(|x|,u_n^*)}{(u_n^*)^2}-k(r)\right\}.$$

由于 u_n^* 是 Schwarz 对称的,因此对任意的 $R>0$ 和任意的 $n\in N$,存在 $|\xi|=1$, 使得

$$c^2\geq\int_{B_R(0)}(u_n^*)^2\mathrm{d}x\geq(u_n^*)^2(R\xi)\,|B_R(0)|.$$

其中,$|B_R(0)|$ 表示 $B_R(0)$ 的测度.因此,利用 u_n 是单调递减的,存在 R_0,当 $|x|>R_0$ 时

$$0\leq(u_n^*)^2(x)\leq(u_n^*)^2(R_0\xi)\leq\frac{c^2}{|B_R(0)|}.$$

因此可知,当 $|x|>R_0$ 时,有 $u_n(x)^*\leq s_0$, 结合(14)式可得 $\int_{|x|\geq R}F(|x|,u_n^*)-k(r)(u_n^*)^2\mathrm{d}x\leq C\varepsilon$.即 $\lim\limits_{R\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\int_{|x|\geq R}[F(|x|,u_n^*)-k(r)(u_n^*)^2]\mathrm{d}x=0$,相似可得 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{|x|\geq R}[F(|x|,\omega)-k(r)\omega^2]\mathrm{d}x=0$.结合(22)式有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^N}F(|x|,u_n^*)-k(r)(u_n^*)^2\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^N}F(x,\omega)-k(r)\omega^2\mathrm{d}x. \tag{23}$$

结合(20)、(21)和(23)式可得

$$\bar{E}(\omega)\leq\liminf_{n\to\infty}\left[\frac{a}{2}\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u_n^*|^2\mathrm{d}x+\frac{b}{4}\left(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u_n^*|^2\mathrm{d}x\right)^2\right]-\int_{\mathbf{R}^N}F(|x|,\omega)-k(r)\omega^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^N}(k(r)-k(\infty))\omega^2\mathrm{d}x=\liminf_{n\to\infty}\left[\frac{a}{2}\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u_n^*|^2\mathrm{d}x+\frac{b}{4}\left(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u_n^*|^2\mathrm{d}x\right)^2-\int_{\mathbf{R}^N}F(|x|,u_n^*)\mathrm{d}x+k(\infty)\int_{\mathbf{R}^N}(u_n^*)^2\mathrm{d}x\right]=\liminf_{n\to\infty}\bar{E}(u_n^*).$$

结合引理 2 可得

$$\bar{E}(\omega)\leq\liminf_{n\to\infty}\bar{E}(u_n^*)=\liminf_{n\to\infty}E(u_n^*)+k(\infty)c^2=e(c)+k(\infty)c^2<0. \tag{24}$$

设 $d>0$ 且 $d^2=\int_{\mathbf{R}^N}\omega^2\mathrm{d}x$,则 $v=\dfrac{c\omega}{d}$ 满足 $\int_{\mathbf{R}^N}v^2\mathrm{d}x=c^2$ 且

$$e(c)+k(\infty)c^2\leq E(v)+k(\infty)c^2=\bar{E}(v)=\frac{ac^2}{2d^2}\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla\omega|^2\mathrm{d}x+\frac{bc^4}{4d^4}\left(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla\omega|^2\mathrm{d}x\right)^2-\int_{\mathbf{R}^N}F\left(|x|,\frac{c\omega}{d}\right)\mathrm{d}x+\frac{c^2}{d^2}k(\infty)\int_{\mathbf{R}^N}\omega^2\mathrm{d}x\leq\frac{c^4}{d^4}\left[\frac{a}{2}\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla\omega|^2\mathrm{d}x+\frac{b}{4}\left(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla\omega|^2\mathrm{d}x\right)^2-\int_{\mathbf{R}^N}\frac{F(|x|,\omega)}{\omega^4}\omega^4\mathrm{d}x+k(\infty)\int_{\mathbf{R}^N}\omega^2\mathrm{d}x\right]=\frac{c^4}{d^4}\bar{E}(\omega)\leq\frac{c^4}{d^4}\{e(c)+k(\infty)c^2\},$$

上述倒数第二个不等式用到 $\frac{c}{d}>1$ 和条件(F_3).由此可得 $\left(\frac{c^4}{d^4}-1\right)\{e(c)+k(\infty)c^2\}\geq 0$.结合(24)式可得 $\frac{c^4}{d^4}-1\leq 0$,由此可得 $\frac{c^4}{d^4}=1$,即 $d^2=c^2$,$\int_{\mathbf{R}^N}\omega^2\mathrm{d}x=c^2$. 进一步由此可知 $e(c)+k(\infty)c^2\leq E(\omega)+k(\infty)c^2\leq r(c)+k(\infty)c^2$.这意味着 $E(\omega)=e(c)$ 成立.另一方面,令 ω^* 表示 ω 的对称递减重排,则 $\omega^*\in S_c$ 且 $e(c)\leq E(\omega^*)$.相似可得 $E(\omega^*)\leq E(\omega)=e(c)$.因此有 $E(\omega^*)=e(c)$. 即问题(1)存在一个 Schwarz 对称极小解.

当 $q=\frac{4}{N}$ 时:由引理1中(ii)知,若 $c>c_1$,相似 $q<\frac{4}{N}$ 的证明,可得问题(1)存在一个 Schwarz 对称极小解,进一步由引理1中(ii)可得 $e(c)\geq g_q(t_2)$.

若 $c\leq c_1$,由引理1中(ii)知 $e(c)\geq -Mc^2$.设 $u_\lambda(x)=\frac{c\lambda^{\frac{N}{2}}}{|Q|_2}Q(\lambda x)$,其中 λ 是常数,$Q(x)$ 是(4)式的非负径向解,因此 $u_\lambda(x)\in S_c$. 利用(6)式,通过计算可得

$$\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u_\lambda|^2\mathrm{d}x=c^2\lambda^2,\int_{\mathbf{R}^N}|u_\lambda|^{q+2}\mathrm{d}x=\frac{(q+2)c^{q+2}\lambda^{\frac{Nq}{2}}}{2|Q|_2^q}.$$

由 $\liminf_{t\to 0^+}\frac{F(r,t)}{t^2}=M$ 知,对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $|t|\leq\delta$ 时,$F(r,t)>(M-\varepsilon)|t|^2$,故当 $\lambda\to 0^+$ 时,$E(u_\lambda)<\frac{a}{2}\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u_\lambda|^2\mathrm{d}x+\frac{b}{4}(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u_\lambda|^2\mathrm{d}x)^2-(M-\varepsilon)\int_{\mathbf{R}^N}|u_\lambda|^2\mathrm{d}x=\frac{ac^2\lambda^2}{2}+\frac{bc^4\lambda^4}{4}-(M-\varepsilon)c^2\to -(M-\varepsilon)c^2$.
令 $\varepsilon\to 0$ 可得 $e(c)<-Mc^2$ 矛盾,因此当 $c\leq c_1$ 时极小化问题(1)不存在非零 Schwarz 对称极小解.

当 $\frac{4}{N}<q<\frac{8}{N}$ 时:由引理1中(iii)知,若 $c\geq c_2$,相似 $q<\frac{4}{N}$ 的证明,可得问题(1)存在一个 Schwarz 对称极小解,进一步由引理1中(iii)可得 $e(c)\geq g_q(t_3)$.

若 $c<c_2$,结合引理1(iii),相似情形 $q=\frac{4}{N}$ 且 $c\leq c_1$ 时的证明可得此时极小化问题(1)不存在非零 Schwarz 对称极小解.

当 $q=\frac{8}{N}$ 时:若 $c\leq c_3$,由引理1中(iv)知,$e(c)\geq -Mc^2$,相似情形 $q=\frac{4}{N}$ 中 $c\leq c_1$ 的证明可得当 $\lambda\to 0^+$ 时 $E(u_\lambda)<-Mc^2$.因此当 $q=8/N$ 且 $c\leq c_3$ 时极小化问题(1)不存在非零 Schwarz 对称极小解.

当 $c>c_3$ 时,由引理1中(iv)知 $E(u)\geq -\infty$.同上设 $u_\lambda(x)=\frac{c\lambda^{\frac{N}{2}}}{|Q|_2}Q(\lambda x)$.由 $\liminf_{t\to\infty}\frac{F(r,t)}{t^{\frac{8}{N}+2}}=M>0$,对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $|t|>\delta$ 时,$F(r,t)>(M-\varepsilon)|t|^{p+2}$,因此当 $\lambda\to+\infty$ 时有

$$E(u_\lambda)<\frac{a}{2}\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u_\lambda|^2\mathrm{d}x+\frac{b}{4}(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u_\lambda|^2\mathrm{d}x)^2-(M-\varepsilon)\int_{\mathbf{R}^N}|u_\lambda|^{p+2}\mathrm{d}x=$$

$$\frac{ac^2\lambda^2}{2}+\frac{bc^4\lambda^4}{4}\left[1-\frac{M-\varepsilon}{M}\left(\frac{c}{c_3}\right)^{\frac{8-2N}{N}}\right]\to-\infty.$$

因此对所有的 $c>c_3$,极小化问题(1)不存在极小解.

参 考 文 献

[1] KIRCHHOFF G.Mechanik[M].Leipzig:Teubner,1883:28-35.

[2] LIONS J L.On some equations in boundary value problems of mathematical physics[J].North-Holland Math Stud,1978,30:284-346.

[3] HE Y,LI G B.Standing waves for a class of Kirchhoff type problems in $\mathbf{R}^3$ involving critical Sobolev exponents[J].Cal Var Partial Differ Equ,2015,54(3):3067-3106.

[4] LI G B,YE H Y.Existence of positive solutions for nonlinear Kirchhoff type problems in $\mathbf{R}^3$ with critical Sobolev exponent[J].Math

Methods Appl Sci,2014,37(16):2570-2584.

[5] MAO A M,ZHANG Z T.Sign-changing and multiple solutions of Kirchhoff type problems without P.S.condition[J].Nonlinear Anal,2009,70(3):1275-1287.

[6] WANG Z Z,ZENG X Y,ZHANG Y M.Multi-peak solutions of Kirchhoff equations involving subcritical or critical Sobolev exponents[J].Math Methods Appl Sci,2020,43:5151-5161.

[7] DENG Y B,PENG S J,SHUAI W.Existence and asymptotic behavior of nodal solutions for the Kirchhoff-type problems in $\mathbf{R}^3$[J].J Funct Anal,2015,269:3500-3527.

[8] HE X M,ZOU W M.Existence and concentration behavior of positive solutions for a Kirchhoff equation in $\mathbf{R}^3$[J].J Differ Equ,2012,2:1813-1834.

[9] YE H Y.The sharp existence of constrained minimizers for a class of nonlinear Kirchhoff equations[J].Math Methods Appl Sci,2015,38(13):2663-2679.

[10] 郭合林,王云波.关于一个约束变分问题的注记[J].数学物理学报,2017,37A(6):1125-1128.
GUO H L,WANG Y B.A remark on a constrained variational problem[J].Acta Math Sci,2017,37A(6):1125-1128.

[11] ZENG X Y,ZHANG Y M.Existence and uniqueness of normalized solutions for the Kirchhoff equation[J].Appl Math Lett,2017,74:52-59.

[12] GUO H L,ZHANG Y M,ZHOU H S.Blow-up solutions for a Kirchhoff type elliptic equation with trapping potential[J].Commun Pure Appl Anal,2018,17(5):1875-1897.

[13] LIU Z.Multiple normalized solutions for Choquard equations involving Kirchhoff type perturbation[J].Top Meth Nonlinear Anal,2019,54(1):297-319.

[14] HUANG X M,ZHANG Y M.Existence and uniqueness of minimizers for L^2 constrained problems related to fractional Kirchhoff equation[J]. Math Meth Appl Sci 2020,43(15):8763-8775.

[15] YE H Y.The existence of normalized solutions for L^2-critical constrained problems related to Kirchhoff equations[J].Zeit Ange Math Phy,2015,66:1483-1497.

[16] YE H Y.The mass concentration phenomenon for L^2-critical constrained problems related to Kirchhoff equations[J].Zeit Ange Math Phy,2016,67(2):29.

[17] HAJAIEJ H,STUART C A.Existence and non-existence of Schwarz symmetric ground states for elliptic eigenvalue problems[J].Ann Mate Pura Appl,2005,184:297-314.

[18] BROTHERS J E,ZIEMER W P.Minimal rearrangements of Sobolev functions[J].Reine Angew Math,1988,384:153-179.

[19] HAJAIEJ H,STUART C A.Symmetrization inequalities for composition operators of Carathéodory type[J].Proc London Math Soc,2003,87(2):396-418.

[20] HAJAIEJ H,STUART C A.Extensions of the Hardy-Littlewood inequalities for Schwarz symmetrization[J].Inter J Mathe Math Sci,2004,(57/58/59/60):3129-3150.

Existence of Schwarz symmetric minimizers for a Kirchhoff constrained variational problem with general nonlinear term

Zhang Yimin, Yang Huahua

(Center for Mathematical Sciences, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, China)

Abstract: In this paper, by using the theory of constrained variational and symmetric decreasing rearrangement technique, the existence and nonexistence of Schwarz symmetric minimizers of a class of Kirchhoff constrained variational problem with a general nonlinear term were considered. Especially, a complete classification of the existence and nonexistence for Schwarz symmetric minimizers with respect to the exponent in nonlinear term and c in manifold $\int_{\mathbf{R}^N} |u|^2 \mathrm{d}x = c^2$ was obtained.

Keywords: Schwarz symmetric minimizers; decreasing rearrangement; Kirchhoff constrained variational

[责任编校 陈留院 赵晓华]

本 期 专 家 介 绍

吴奕飞，天津大学应用数学中心教授，博士，博士生导师，国家“万人计划”青年拔尖人才.主要从事偏微分方程、理论和数值计算方面的研究工作，研究的模型包括非线性色散波方程和流体力学方程.在 *J Eur Math Soc*（*JEMS*），*Com Math Phy*，*Adv Math*，*Analysis & PDE*，*Inter Math Res Notice* 等学术期刊上发表论文，成果被十几位 ICM 报告人关注和引用，受邀在法国图卢兹三大、澳大利亚 Monash 大学等机构担任高级访问教授.曾主持国家自然科学基金面上项目等项目，获全国优秀博士论文提名奖，担任 JAMS 等杂志的论文审稿专家，担任 *Annals of Applied Math* 等杂志的编委.

张贻民，武汉理工大学数学科学研究中心教授，博士，博士生导师.主要从事非线性泛函分析与非线性偏微分方程的研究工作，涉及的方程有半线性薛定谔方程(组)、拟线性薛定谔方程(组)、基尔霍夫方程等，研究内容包括这些方程解的存在性、唯一性以及解的集中行为等性质.在国内外重要学术刊物上发表论文 30 余篇，其中 SCI 收录 32 篇.主持国家自然科学基金项目 2 项，作为主要参与人参与国家自然科学基金项目 3 项.2018 年获湖北省自然科学二等奖.

聂国兴，河南师范大学教授，博士，博士生导师.系教育部高等学校水产类专业教学指导委员会委员，中原千人计划-科技创新领军人才、河南省现代农业产业技术体系岗位专家、河南省优秀青年科技专家、河南省科技创新杰出青年、河南省高校科技创新人才、河南省科技创新团队带头人、河南省创新型科技团队带头人、河南省教学标兵，兼任中国水产学会常务理事、中国水产学会渔文化分会副主任委员、中国水产学会水产动物营养与饲料专业委员会委员、中国水产学会期刊分会委员、河南省水产学会理事长、《水产学报》第十一届编辑委员会委员等.主持完成(在研)国家自然科学基金 4 项，河南省重大项目等省部级项目 6 项.近 5 年来，在 *Fish & shellfish immunology*，*Aquaculture*，*BMC Genomics*，*Ecotoxicology and Environmental Safety* 等国际 SCI 源期刊上发表学术论文 80 余篇，出版著作 3 部；主编的《生物制品学》入选“十二五”国家高等教育统编教材，《酶工程》入选河南省高等教育“十二五”规划教材；获河南省科技进步奖二等奖 1 项、河南省科技进步奖三等奖 2 项、河南省高等教育教学成果奖二等奖 2 项.