第 43 卷 第 1 期 2015 年 1 月
河南师范大学学报(自然科学版)
Journal of Henan Normal University (Natural Science Edition)
Vol. 43 No. 1 Jan. 2015

文章编号:1000-2367(2015)01-0029-06 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2015.01.006

# 非线性 Sine-Gordon 方程的一个新混合元方法

李先枝[1],李 畅[2]

(1. 郑州师范学院 数学与统计学院,郑州 450044;2. 郑州大学 数学与统计学院,郑州 450001)

**摘 要**:利用双线性元和零阶 $R$-$T$ 元,对非线性 Sine-Gordon 方程构造了一个新混合元格式. 基于积分恒等式技巧,导数转移及插值算子的特性,给出了在半离散格式下原始变量及通量的超逼近性质. 同时,使用插值后处理技术得到了相应的整体超收敛结果.

**关键词**:非线性 Sine-Gordon 方程;新混合有限元格式;超逼近和超收敛

**中图分类号**:O242.21 **文献标志码**:A

Sine-Gordon 方程是十九世纪研究微分几何表面曲率时发现的一种典型的偏微分方程,因为可应用范围很广包括非线性光学、流体力学、场论、气象学等,因此关于该方程的研究受到众多学者的关注. 例如文献[1]提出了两个隐式差分格式,并证明了格式的收敛性和稳定性. 文献[2]讨论了该方程的混沌与湍流. 文献[3]利用 Hermite 矩形元的高精度分析,得到 $H^1$ 模意义下的最优误差估计,并进行了外推. 文献[4]在低阶非协调有限元格式下,直接用差值技巧得到半离散和全离散最优误差估计. 文献[5]分析了线性三角形元的高精度模式,得到单独利用插值或 Ritz 投影无法得到的结果. 文献[6]利用 $H^1$-Galerkin 混合有限元方法,得到了一维带阻尼 Sine-Gordon 方程的半离散和全离散格式下最优误差估计. 但是这些研究却很少涉及混合有限元法.

由于标准有限元方法对逼近解的光滑性要求都很高,这会给实际计算造成很多困难. 而混合元方法对空间的光滑度要求较低,并能同时得到原始变量和中间变量的误差估计等突出优势,已成为一种常用的数值逼近方法. 如文献[7]讨论了二阶椭圆问题的一个新的非协调混合元模型,在不需要验证 BB 条件的情况下,给出了其收敛性分析,得到与协调元情形相同的最优误差估计. 文献[8]研究了平面弹性力学问题在各向异性网格下的一阶混合元格式,在不需要引入传统的投影算子的情况下,直接利用插值算子得到了与以往文献相同的误差估计. 文献[9]对广义神经传播方程建立了一个新混合元格式,在不需要引入传统椭圆投影的前提下,给出了相关未知量的 $L^2$ 模误差估计,并将其推广到任意阶格式. 文献[10-11]给出了二阶椭圆问题一类新的混合元格式,新格式具有自由度较小且当两个有限元空间满足一个简单的包含关系时自然满足 BB 条件等优势. 文献[12-13]分别研究了伪双曲方程及 Sobolev 方程的新格式,并分别得到了满意的收敛和超收敛效果.

本文的主要目的就是利用最简单的双线性元和零阶 $R$-$T$ 元对一类 Sine-Gordon 方程建立一个新的混合元格式,使得其自由度小且 $BB$ 条件自动满足. 同时,基于高精度分析,平均值,导数转移和插值后处理技术,导出了原始变量解 $u$ 及流量解 $p=\nabla u$ 的超逼近及整体超收敛结果.

## 1 混合有限元格式

考虑如下非线性 Sine-Gordon 方程

---

**收稿日期**:2014-04-17;**修回日期**:2014-11-13.

**基金项目**:国家自然科学基金(10971203;11271340)

**作者简介**:李先枝(1967-),女,河南登封人,郑州师范学院副教授,研究方向为有限元方法,E-mail:lxz66@163.com.

$$\begin{cases} u_{tt} + \alpha u_t - \gamma \Delta u + \beta \sin u = f(u), & (X,t) \in \Omega \times J, \\ u(X,t) = 0, & (X,t) \in \partial\Omega \times J, \\ u(X,0) = u_0(X), u_t(X,0) = u_1(X) & X \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 是一个有界凸区域,$\partial\Omega$ 是 $\Omega$ 的边界,$X = (x,y)$. $f(u)$ 满足 Lipschitz 连续条件,$\alpha,\beta,\gamma$ 是正常数,$u_0(X)$, $u_1(X)$ 是已知的光滑函数,$J = (0,T]$,$0 < T < \infty$.

令 $H = (L^2(\Omega))^2$, $M = H_0{}^1(\Omega)$,并且引入变量 $p = \nabla u$,则(1) 的混合变分形式为,求$(\mathrm{p},u) \in H \times M$,使得

$$\begin{cases} (\mathrm{p},q) - (\nabla u,q) = 0, \forall\, \mathrm{q} \in H, \\ (u_{tt},v) + (\alpha u_t,v) + (\gamma p, \nabla v) = (f(u) - \beta \sin u, v), \forall\, v \in M, \\ u(X,0) = u_0(X), u_t(X,0) = u_1(X), X \in \Omega. \end{cases}$$

设 $\Omega$ 是平面上一个边界平行于坐标轴的矩形区域,$\Gamma_h$ 是 $\Omega$ 的矩形剖分族,对给定的 $K \in \Gamma_h$,4 个顶点分别为 $d_1$, $d_2$, $d_3$ 及 $d_4$,其 4 条边为 $l_i = \overline{d_i d_{i+1}}(\mathrm{mod}4)$, $i = 1,2,3,4$, $h_K$ 是单元$K$ 的最大直径,$h = \max\limits_{K \in \Gamma_h} h_K$. $Q_{i,j}(K)$ 表示 $K$ 上 $x$ 次数不超过 $i$,$y$ 次数不超过 $j$ 的关于 $x,y$ 多项式的全体. 定义有限元空间 $H^h$ 及 $M^h$ 为

$$\begin{cases} H^h = \{p = (p^1,p^2); \mathrm{p}\,|_K \in Q_0,1(K) \times Q_1,0(K), \forall\, K \in \Gamma_h\}, \\ M^h = \{v \in C^0(\Omega); v\,|_K \in Q_{1,1}(K), \forall\, K \in \Gamma_h, v\,|_{\partial\Omega} = 0\}. \end{cases} \tag{3}$$

设 $\Pi_h$ 和 $I_h$ 分别是 $H^h$ 及 $M^h$ 上诱导的插值算子,$\Pi_h\,|_K = \Pi_K$,$\Pi_{K\mathrm{p}} = (\Pi^1_{Kp^1}, \Pi^2_{Kp^2})$, $I_h\,|_K = I_K$. 满足

$$\int_{l_i} (p - \Pi_{K\mathrm{p}})\tau \mathrm{d}s = 0,\ i = 1,2,3,4, \forall\, \mathrm{p} \in (L^2(\Omega))^2,$$

$$I_{Kv}(d_i) = v(d_i),\ i = 1,2,3,4, \forall\, v \in H^2(\Omega).$$

由文献[14] 知下面引理成立.

**引理 1** 假设 $\mathrm{p} \in (H^2(\Omega))^2$,$u \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$,则对 $\forall\, v \in M^h$ 及 $p \in H^h$ 有

$$(\nabla(u - I_h u), \nabla v) = O(h^2)\,|\,u\,|_3\,\|\,v\,\|_1, \tag{4}$$

$$(p - \Pi_h p, v) = O(h^2)\,|\,p\,|_2\,\|\,v\,\|_0. \tag{5}$$

利用文献[14] 中关于(4) 的证明不难得证下列估计成立.

$$(\nabla(u - I_h u), p) = O(h^2)\,|\,u\,|_3\,\|\,p\,\|_0. \tag{6}$$

## 2 离散格式及超逼近性

考虑问题(2) 的半离散格式,求$(p^h,u^h) \in H^h \times M^h$,使得

$$\begin{cases} (p^h,q^h) - (\nabla u^h,q^h) = 0, \forall\, q^h \in H^h, \\ (u^h_{tt},v^h) + (\alpha u^h_t,v^h) + (p^h, \nabla v^h) = (f(u^h) - \beta \sin u^h, v^h), \forall\, v^h \in M^h, \\ u^h(X,0) = I_h u(X,0), u^h_t(X,0) = I_h u_t(X,0). \end{cases} \tag{7}$$

**定理 1** 上述问题(7) 的解存在唯一.

**证明** 设 $H^h$ 的维数为$N_1$,$\{\varphi_i(X)\}_{i=1}^{N_1}$ 是 $H^h$ 的一组基. 设$M^h$ 的维数$N_2$,$\{\psi_i(X)\}_{i=1}^{N_2}$ 是$M^h$ 的一组基.

$$p^h = \sum_{i=1}^{N_1} p_i(t)\varphi_i(X),\ u^h = \sum_{i=1}^{N_2} u_i(t)\psi_i(X),\ u^h_t = \sum_{i=1}^{N_2} u_{it}(t)\psi_i(X),$$

$$u^h_{tt} = \sum_{i=1}^{N_2} u_{itt}(t)\psi_i(X),\ u^h(X,0) = \sum_{i=1}^{N_2} \bar{u}_i\psi_i(X),\ u^h_t(X,0) = \sum_{i=1}^{N_2} \bar{u}_{it}\varphi_i(X),$$

$$p^h(X,0) = \sum_{i=1}^{N_1} \bar{p}_i\varphi_i(x),$$

取 $q^h = \varphi_m$,$m = 1,2,3,\cdots,N_1$; $v^h = \varphi_l$,$l = 1,2,3,\cdots,N_2$,把这些表达式代入,则(7) 式可变为

$$\begin{cases}(\sum_{i=1}^{N_1}(p_i\psi_i),\varphi_m)-(\sum_{i=1}^{N_2}u_i\psi_i),\varphi_m)=0,\ m=1,2,\cdots,\ N_1,\\(\sum_{i=1}^{N_2}u_{itt}\psi_i,\varphi_l)+(\alpha\sum_{i=1}^{N_2}u_{it}\psi_i,\varphi_l)+(\gamma\sum_{i=1}^{N_1}p_i\psi_i,\nabla\varphi_l)=\\(f(\sum_{i=1}^{N_2}u_i\psi_i)-\beta\sin(\sum_{i=1}^{N_2}u_i\psi_i),\psi_l),l=1,2,\cdots,N_2,\end{cases}\tag{8}$$

经化简，可改写成矩阵形式，求$\{P(t),U(t)\}$使得$\forall t\in(0,T]$，有

$$\begin{cases}(\mathrm{a})\ AP(t)-BU=0,\\(\mathrm{b})CU_{tt}+\alpha DU_t+\gamma EP(t)=F,\\(\mathrm{c})\ U(0)=\overline{U},P(0)=\overline{P},\ U_t(0)=\overline{U}_t.\end{cases}\tag{9}$$

其中

$$A=(a_{i,j})_{N_1\times N_1},\ B=(b_{i,j})_{N_1\times N_2},\ C=(c_{i,j})_{N_2\times N_2},\ D=(d_{i,j})_{N_2\times N_2},$$
$$P(t)=(p_1,p_2,\cdots,p_{N_1})^{\mathrm{T}},\ U=(u_1,u_2,\cdots,u_{N_2})^{\mathrm{T}},\ U_t=(u_{1t},u_{2t},\cdots,u_{N_2t})^{\mathrm{T}},$$
$$U_{tt}=(u_{1tt},u_{2tt},\cdots,u_{N_2tt})^{\mathrm{T}},\ F=(f_1,f_2,\cdots,\ f_{N_2})^{\mathrm{T}},\overline{U}=(\overline{u}_1,\overline{u}_2,\cdots,\overline{u}_{N_2})^{\mathrm{T}},$$
$$\overline{P}=(\overline{p}_1,\overline{p}_2,\cdots,\overline{p}_{N_1})^{\mathrm{T}},\ a_{i,j}=(\varphi_i,\varphi_j),\ b_{i,j}=(\nabla\psi_i,\varphi_j),\ E=(e_{i,j})_{N_2\times N_1},$$
$$c_{i,j}=(\psi_i,\psi_j),\ d_{i,j}=(\psi_i,\psi_j),\ e_{i,j}=(\varphi_i,\nabla\psi_j),$$
$$f_j=(f(\sum_{i=1}^{N_2}u_i\psi_i)-\beta\sin(\sum_{i=1}^{N_2}u_i\psi_i),\psi_j).$$

易知 $A,C,D$ 正定对称，则(9) 式可变形为

$$\begin{cases}(\mathrm{a})\ P(t)=A^-1BU,\\(\mathrm{b})\ CU_{tt}+\alpha DU_t+\gamma EA^{-1}BU=F,\\(\mathrm{c})\ U(0)=\overline{U},P(0)=\overline{P},\ U_t(0)=\overline{U}_t.\end{cases}\tag{10}$$

可以看出(10) 中(b) 式是关于向量 $U$ 的微分方程，于是根据常微分方程理论知微分方程的解 $U$ 存在唯一，从而 $P(t)$ 存在唯一，进而可知离散解 $p^h$ 和 $u^h$ 存在唯一.

由文献[12] 知下面结论成立.

**引理 2**　设 $\psi(t)$ 是$[0,t]$上的可积函数，则有下述积分不等式成立$\int_0^t\int_0^\tau|\psi(s)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\le c\int_0^{t\,t}|\psi(s)|^2\mathrm{d}s$ 成立. 这里及以往出现的 $c$ 表示与 $h$ 无关的常数且在不同地方取值不同. 有以下的超逼近结果.

**定理 2**　设$(p,u)$，$(p^h,u^h)$ 分别是问题(2) 和(7) 的解，$p\in(H^2(\Omega))^2$，$u\in H^3(\Omega)\cap H_0{}^1(\Omega)$，$u_t$，$u_{tt}\in H^3(\Omega)$ 则有下述估计式成立

$$\|u^h-I_hu\|_1\le ch^2\left\{\int_0^tR\mathrm{d}s+|u_t|_3^2\right\}^{\frac{1}{2}}.\tag{11}$$

$$\|p^h-\Pi_hp\|_0\le ch^2\left\{\int_0^tR\mathrm{d}s+|u_t|_3^2)^{\frac{1}{2}}+|p|_2+|u|_3\right\}.\tag{12}$$

其中 $R=|u_{tt}|_3^2+|u_{tt}|_2^2+|u_t|_3^2+|u_t|_2^2+|u|_2^2$.

**证明**　由(7)－(2) 得误差方程

$$\begin{cases}(p^h-p,q^h)-(\nabla u^h-\nabla u,q^h)=0,\forall q^h\in H^h,\\(u_{tt}^h-u_{tt},v^h)+\gamma(u_t^h-u_t,v^h)+\gamma(p^h-p,\nabla v^h)=\beta(\sin u-\sin u^h,v^h)+(f(u^h)-f(u),v^h),\\\forall v^h\in M^h.\end{cases}\tag{13}$$

令

$$\begin{cases}p^h-p=(p^h-\Pi_hp)+(\Pi_hp-p)=\eta+\xi,\\u^h-u=(u^h-I_hu)+(I_hu-u)=\theta+\rho.\end{cases}\tag{14}$$

则(13) 式可改写为如下形式

$$\begin{cases}(\mathrm{a})\ (\eta+\xi,q^h)-(\nabla(\theta+\rho),q^h)=0,\ \forall q^h\in H^h,\\(\mathrm{b})\ ((\theta_{tt}+\rho_{tt}),v^h)+\alpha(\theta_t+\rho_t,v^h)+\gamma(\eta+\xi,\nabla v^h)=\\\beta(\sin u-\sin u^h,v^h)+(f(u^h)-f(u),v^h),\ \forall v^h\in M^h.\end{cases}\tag{15}$$

又知 $\nabla M^h\subseteq H^h$,可在(15a)及(15b)式中分别取 $q^h=\nabla\theta_t$ 及 $v^h=\theta_t$,并由(15b)$-\gamma$(15a),可得

$$((\theta_{tt}+\rho_{tt}),\theta_t+\alpha(\theta_t+\rho_t),\theta_t)+\gamma(\nabla(\theta+\rho),\nabla\theta_t)=\beta(\sin u-\sin u^h,\theta_t)+(f(u^h)-f(u),\theta_t).$$

进一步整理可得

$$(\theta_{tt},\theta_t)+\gamma(\nabla\theta,\nabla\theta_t)=\beta(\sin u-\sin u^h,\theta_t)+(f(u^h)-f(u),\theta_t)-(\rho_{tt},\theta_t)-\alpha(\rho_t,\theta_t)-\gamma(\nabla_\rho,\nabla\theta_t)-\alpha(\theta_t,\theta_t).$$

从而有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\theta_t\|_0^2+\gamma\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\theta|_1^2\le\beta(\sin u-\sin u^h,\theta_t)+(f(u^h)-f(u),\theta_t)-(\rho_{tt},\theta_t)-\alpha(\rho_t,\theta_t)-\gamma(\nabla\rho,\nabla\theta_t)+\alpha\|\theta_t\|_0^2.\tag{16}$$

下面估计(16)式右端前4项.

首先,由于 $\sin u$ 和 $f(u)$ 均满足 Lipschitz 连续,利用插值理论得

$$\beta(\sin u-\sin u^h,\theta_t)+(f(u^h)-f(u),\theta_t)\le c\|u^h-u\|_0\|\theta_t\|_0\le c(\|\theta\|_0+\|\rho\|_0)\|\theta_t\|_0\le ch^4|u|_2^2+c\|\theta\|_0^2+c\|\theta_t\|_0^2,$$

$$(\rho_{tt},\theta_t)\le c\|\rho_{tt}\|_0\|\theta_t\|_0\le ch^4|u_{tt}|_2^2+c\|\theta_t\|_0^2,$$

$$\alpha(\rho_t,\theta_t)\le c\|\rho_t\|_0\|\theta_t\|_0\le ch^4|u_t|_2^2+c\|\theta_t\|_0^2.$$

其次,由导数转移及引理1知

$$\gamma(\nabla\rho,\nabla\theta_t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\nabla\rho_t,\nabla\theta)-\gamma(\nabla\rho_{tt},\nabla\theta)\le ch^2|u_{tt}|_3|\theta|_1+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\nabla\rho_t,\nabla\theta)\le ch^4|u_{tt}|_3{}^2+c|\theta|_1^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\nabla\rho_t,\nabla\theta).$$

最后,把上面的估计代入(16)式可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\theta_t\|_0{}^2+\gamma\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\theta|_1^2\le ch^4(|u_{tt}|_2^2+|u_t|_2^2+|u|_2^2+|u_{tt}|_3^2)+c\|\theta_t\|_0^2+c|\theta t|_1^2+c\|\theta\|_0^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\nabla\rho_t,\nabla\theta).$$

在上式中,让两边同时从0到 $t$ 积分,并注意到 $\theta_t(0)=0,\theta(0)=0$,有

$$\|\theta_t\|_0^2+\gamma|\theta|_1^2\le ch^4\int_0^t u_d s+\int_0^t\|\theta_t\|_0^2\mathrm{d}s+c\int_0^t\|\theta\|_1^2\mathrm{d}s+c\int_0^t\|\theta\|_0^2\mathrm{d}s+c(\nabla\rho_t,\nabla\theta)\le ch^4\int_0^t u_*\,\mathrm{d}s+c\int_0^t\|\theta\|_0^2\mathrm{d}s+ch^4|u_t|_3^2+\frac{\gamma}{2}|\theta|_1^2+c\int_0^t(\|\theta_t\|_0^2+|\theta|_1^2)\mathrm{d}s,$$

其中 $u_*=|u_{tt}|_2^2+|u_t|_2^2+|u|_2^2+|u_{tt}|_3^2$.

由 Gronwall 引理得 $\|\theta_t\|_0^2+\gamma|\theta|_1^2\le ch^4\int_0^t u_*\,\mathrm{d}s+c\int_0^t|\theta|_0^2\mathrm{d}s+ch^4|u_t|_3^2$.

由于 $\|\theta\|_0^2\le c|\theta|_1^2$,从而有

$$\|\theta\|_0^2\le ch^4\int_0^t u_*\,\mathrm{d}s+ch^4|u_t|_3^2+c\int_0^t|\theta|_0^2\mathrm{d}s.\tag{17}$$

再次应用 Gronwall 引理可得

$$\|\theta\|_0^2\le ch^4\int_0^t u_*\,\mathrm{d}s+ch^4|u_t|_3^2\mathrm{d}s.\tag{18}$$

于是

$$|\theta|_1^2\le ch^4\int_0^t u_*\,\mathrm{d}s+ch^4\int_0^t|u_t|_3^2\mathrm{d}s+ch^4|u_t|_3^2.\tag{19}$$

即定理2中(11)式得证.

下面来证明(12)式.

在(15a) 式中取 $q^h=\eta$，可得 $(\eta+\xi,\eta)-(\nabla(\theta+\rho),\eta)=0$. 即 $(\eta,\eta)=-(\xi,\eta)+(\nabla\theta,\eta)+(\nabla\rho,\eta)$.
利用插值理论及引理 1，整理上式可得 $\|\eta\|_0^2\le ch^2(|p|_2+|\theta|_1+|u|_3)\|\eta\|_0$.

把(19) 式代入，所以有 $\|\eta\|_0\le ch^2|p|_2+ch^2|u|_3+ch^2(\int_0^t u_*\,\mathrm{d}s+\int_0^t|u_t|_3^2\mathrm{d}s+|u_t|_3^2)^{\frac12}$.

至此定理证毕.

## 3　整体超收敛结果

把相邻的 4 个小单元 $K_i\in\Gamma_h,i=1,2,3,4$ 合并成一个大单元 $\widetilde{K}$，形成剖分 $\Gamma_{2h}$，由文献[14] 知存在插值算子 $\Pi_2h$ 和 $I_{2h}$

$$\begin{cases}\Pi_{2h}p\,|_{\widetilde{K}}\in Q_{1,1}(\widetilde{K})\times Q_{1,1}(\widetilde{K}),\\ \int_{l_i}(p^1-\Pi_{2h}^2p^1)=0,i=1,3,4,6,\\ \int_{i_i}(p^2-\Pi_{2h}^2p^2)=0,i=7,9,10,12.\end{cases}\tag{20}$$

$$\begin{cases}I_{2h}v\,|_{\widetilde{K}}\in Q_{2,2}(\widetilde{K}),\\ I_{2h}v(a_i)=v(a_i),i=1,2,3,\cdots,9.\end{cases}\tag{21}$$

且满足下面性质：

$$\begin{cases}\Pi_{2h}\Pi_hp=\Pi_{2h}p,\ \forall p\in(H^2(\Omega))^2,\\ \|\Pi_{2h}q\|_0\le c\|q\|_0,\forall q\in H^h,\\ \|\Pi_{2h}p-p\|_0\le ch^2|p|_2,\forall p\in(H^2(\Omega))^2.\end{cases}\tag{22}$$

$$\begin{cases}I_{2h}I_hu=I_{2h}u,\ \forall u\in H^3(\Omega),\\ \|I_{2h}v\|_1\le c|v|_1,\forall v\in M^h,\\ \|I_{2h}u-u\|_1\le ch^2|u|_3,\forall u\in H^3(\Omega).\end{cases}\tag{23}$$

**定理 3**　在定理 2 的假设下，有如下的整体超收敛结果

$$\|I_{2h}u^h-u\|_1\le ch^2\{(\int_0^t R\mathrm{d}s+|u_t|_3^2)^{\frac12}+|u|_3\},\tag{24}$$

$$\|\Pi_{2h}p^h-p|_0\le ch^2\{(\int_0^t R\mathrm{d}s+|u_t|_3^2)^{\frac12}+|p|_2+|u|_3\}.\tag{25}$$

其中 $R=|u_u|_3^2+|u_u|_2^2+|u_t|_3^2+|u_t|_2^2+|u|_2^2$.

**证明**　由插值算子 $\Pi_{2h}$ 和 $I_{2h}$ 的定义及定理 2 可知

$$\|\Pi_{2h}p^h-p\|_0\le\|\Pi_{2h}p^h-\Pi_{2h}\Pi_hp\|_0+\|\Pi_{2h}\Pi_hp-p\|_0\le c\|p^h-\Pi_hp\|_0+\|\Pi_{2h}p-p\|_0\le$$
$$ch^2\{(\int_0^t R\mathrm{d}s+|u_t|_3^2)^{\frac12}+|p|_2+|u|_3\}+ch^2|p|_2\le ch^2\{(\int_0^t R\mathrm{d}s+|u_t|_3^2)^{\frac12}+|p|_2+|u|_3\}.$$

所以(25) 式成立. 同理，可得(24) 式，从而定理 3 证毕.

## 4　结　　论

本文将新的混合元方法应用于非线性 Sine-Gordon 方程，在半离散格式下，得到了关于原始变量及通量的超逼近和超收敛结果. 和传统混合元格式相比，新格式具有以下 3 个优势：一是当原始变量与通量的逼近空间 $M^h$ 和 $H^h$ 满足 $\nabla M^h\subseteq H^h$，$BB$ 条件就成立，这使得稳定的有限元空间的构造极为简便；二是容易使所选取的格式具有较小自由度；三新格式容易推广到三维空间. 另一方面，文献[6] 及文献[15] 所研究的方程分别对应于本文中的当 $f=0,\beta=1,\gamma=1$ 及 $f=(X,t)$ 时的情形. 但是文献[6] 只给出了收敛性结果.

**参　考　文　献：**

[1]　许秋滨，常谦顺. 广义线性 Sine-Gordon 方程的两个隐式格式[J]. 应用数学学报，2007，30(2)：263-271.

[2]　盛平兴. 广义 Sine-Gordon 方程的混沌与湍流[J]. 应用数学学报，2005，28(3)：453-457.

[3] 王芬玲,石东洋. 非线性 Sine-Gordon 方程 Hermite 型有限元新的超收敛分析[J]. 应用数学学报,2012,35(5):777-787.

[4] 石东洋,张斐然. Sine-Gordon 方程的一类低阶非协调有限元分析[J]. 计算数学,2011,33(3):289-297.

[5] 石东洋,王芬玲,赵艳敏. 非线性 Sine-Gordon 方程的各向异性线性元高精度分析新模式[J]. 计算数学,2014,36(3):246-256.

[6] Liu Yang, Li Hong. Numerical solutions of $H^1$-Galerkin mixed finite element method for a damped Sine-Gordon Equation[J]. Applied Mathematics, 2009, 22(3): 579-588.

[7] 石东洋,李志燕. 二阶椭圆问题的非协调混合元收敛性分析[J]. 河南师范大学学报:自然科学版,2008,36(4):1-3.

[8] 马 戈,刘玉晓. 平面弹性力学问题各向异性一阶混合元格式[J]. 河南师范大学学报:自然科学版,2010,38(1):38-40.

[9] 石东洋,陈金环,林红玲. 广义神经传播方程新的混合三角形元格式[J]. 河南师范大学学报:自然科学版,2011,39(5):1-5.

[10] 陈绍春,陈红如. 二阶椭圆问题新的混合元格式[J]. 计算数学,2010,32(2):213-218.

[11] 史 峰,于佳平,李开泰. 椭圆型方程的一种新型混合有限元格式[J]. 工程数学学报,2011,28(2):231-236.

[12] Liu Yang, Li Hong. A new mixed finite element methods for pseudo-hyperbolic equations[J]. Applied Mathematics Computation, 2010, 23(1):150-157.

[13] Shi Dongyang, Zhang Yadong. High accuracy analysis of a new nonconforming mixed finite element scheme for Sobolev equation[J]. Applied Mathematics Computation, 2011, 218(7):3176-3186.

[14] 林 群,严宁宁. 高效有限元构造与分析[M]. 保定:河北大学出版社,1996.

[15] 樊明智,王芬玲,石东洋. 非线性 sine-Gordon 方程的双线性元分析及外推[J]. 数学的实践与认识,2012,42(11):205-213.


# A New Mixed Finite Element Method for Nonlinear Sine-Gordon Equation


LI Xianzhi[1], LI Chang[2]

(1. School of Mathematics and Statistics, Zhengzhou Normal University, Zhengzhou 450044, China;
2. School of Mathematics and Statistics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China)



**Abstract**: In this paper, a new mixed finite element scheme is constructed for sine-Gordon equations with the bilinear element and zero order *R-T* element. By using integral identity techniques, derivative transfer and interpolation operator's characteristics, the superclose properties of the orginal and flux variables are given in semi-discrete form. At the same time, by virtue of the interpolation post-processing approach, the corresponding global superconvergence results are derived.



**Keywords**: nonlinear Sine-Gordon equation; new mixed finite element scheme; supercloseness and superconvergence