

$F=1$ 旋量玻色-爱因斯坦凝聚的向列压缩

杨超楠¹, 郑任菲², 赵兴东³, 周鲁¹

(1. 华东师范大学 物理与电子科学学院, 上海 200241; 2. 合肥工业大学 物理学院, 合肥 230009;

3. 河南师范大学 物理学院, 河南 新乡 453007)

摘要:旋量玻色-爱因斯坦凝聚是量子光学领域的热点研究对象, 同时在精密测量领域也被广泛应用. 基于半经典的截断维格纳近似方法研究了 $F=1$ 旋量玻色-爱因斯坦凝聚中的自旋向列压缩. 通过数值模拟得到自旋向列压缩的动力学行为, 并在自旋向列球上展示了自旋向列压缩的物理特性. 最后研究了系统在任意初始态下的自旋向列压缩行为. 研究展现了旋量玻色-爱因斯坦凝聚在精密测量领域的潜在应用.

关键词:旋量玻色-爱因斯坦凝聚; 向列型压缩; 自旋向列球; 截断维格纳近似

中图分类号: O469

文献标志码: A

与标量玻色-爱因斯坦凝聚^[1-5](Bose-Einstein condensate, BEC)相比, 旋量 BEC 是磁性超流, 所以展现出更加丰富的物理性质, 成为近几年来实验和理论的研究热点^[6-13]. 很多有趣的物理学现象在该体系中被观测到, 比如量子纠缠^[7]、自旋压缩^[8]和自发退磁现象^[14]等. 因而, 旋量 BEC 领域的研究具有极大的价值. 自旋压缩对量子信息的研究有重要的意义, 在超高精密测量领域的作用也尤其突出. 与自旋压缩不同, 向列压缩引入了高阶的向列张量, 展现了更加丰富多元的压缩性质^[15]. CHAPMAN 等人^[16]首次在实验上实现了旋量 BEC 的向列压缩. 2013 年, 他们又发现了不稳定点与压缩之间的关系^[17]. 同年, 日本东京的一个小组将向列压缩归类为第二类压缩, 并且给出了详细的分类依据^[18]. 很快, 利用周期性微波脉冲将自旋向列压缩存储在旋量 BEC 中的方案出现. 在适当的脉冲周期和相移条件下, 压缩可以增强并保持较长时间, 从而实现最大压缩的存储^[19]. 同时, 腔场中的 BEC 也可以产生向列压缩^[20].

本文从旋量 BEC 的模型^[21-23]出发, 在理论上总结了自旋向列压缩的产生和动力学演化行为^[24], 在自旋向列球上展示了极化态为初态的自旋向列压缩的物理特性和压缩图像. 然而, 仅仅描绘极化态的压缩行为显然是不充分的, 缺乏普遍性, 因此, 还研究了在任意初始态下系统的向列压缩行为.

1 旋量 BEC 模型的介绍

考虑被冷却并囚禁于三维磁光阱中的超冷原子, 用于产生旋量 BEC. 对于 $F=1$ 的旋量 BEC, 自旋磁量子数 m_F 是 $-1, 0, 1$, 对应的 3 种塞曼态 $|F, m_F\rangle: |1, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle$, 如图 1 所示^[25-26]. 根据单模近似原理, 在有限的磁场中旋量 BEC 的哈密顿量^[27-28]

$$\begin{aligned} \hat{H}_a = & \lambda_a (a_1^\dagger a_1^\dagger a_1 a_1 + a_{-1}^\dagger a_{-1}^\dagger a_{-1} a_{-1} + 2a_0^\dagger a_0 a_1^\dagger a_1 + 2a_0^\dagger a_0 a_{-1}^\dagger a_{-1} - \\ & 2a_1^\dagger a_1 a_{-1}^\dagger a_{-1} + 2a_0^\dagger a_0 a_1 a_{-1} + 2a_1^\dagger a_{-1} a_0 a_0) + q(a_1^\dagger a_1 + a_{-1}^\dagger a_{-1}), \end{aligned}$$

其中, λ_a 是自旋依赖的相互作用系数, a_i^\dagger 和 a_i 分别对应 $m_F = i$ 的产生湮灭算符, 总粒子数 $\hat{N} = a_1^\dagger a_1 + a_0^\dagger a_0 + a_{-1}^\dagger a_{-1}$, q 是二阶塞曼能移. a_i 服从海森堡方程

$$i\hbar \frac{\partial a_i}{\partial t} = [a_i, \hat{H}_a], \quad (1)$$

收稿日期: 2022-02-25; 修回日期: 2022-03-10.

基金项目: 国家自然科学基金(12074120); 上海市科技创新行动计划自然科学基金项目(20ZR1418500).

作者简介: 杨超楠(1995-), 女, 内蒙古卓资人, 华东师范大学硕士研究生, 研究方向为旋量玻色爱因斯坦凝聚.

通信作者: 周鲁, E-mail: lzhou@phy.ecnu.edu.cn.

其中 $i = 0, \pm 1$; \hbar 是普朗克常量. 如果将 a_1, a_0, a_{-1} 带入方程(1), 可以得到

$$i\hbar \frac{\partial a_1}{\partial t} = 2\lambda_a (a_1^\dagger a_1 a_1 - a_{-1}^\dagger a_1 a_{-1} + a_0^\dagger a_1 a_0 + a_{-1}^\dagger a_0 a_0) + q a_1,$$

$$i\hbar \frac{\partial a_0}{\partial t} = 2\lambda_a (a_1^\dagger a_1 a_0 + a_{-1}^\dagger a_0 a_{-1} + 2a_0^\dagger a_1 a_{-1}),$$

$$i\hbar \frac{\partial a_{-1}}{\partial t} = 2\lambda_a (a_{-1}^\dagger a_{-1} a_{-1} - a_1^\dagger a_{-1} a_{-1} + a_0^\dagger a_0 a_{-1} + a_1^\dagger a_0 a_0) + q a_{-1}.$$

在平均场近似下, 当粒子数趋向于无穷大的时候, 量子涨落可以忽略不计^[23]. 这样产生湮灭算符就可以写成复数的形式: $a_k \rightarrow \sqrt{N} \zeta_k$,

$a_k^\dagger \rightarrow \sqrt{N} \zeta_k^*$, $\zeta_k = |\zeta_k| e^{i\theta_k}$ 以及 $\sum_k \zeta_k^* \zeta_k = 1$.

令 $c = 2\lambda_a N$, $\rho_i = |\zeta_i|^2 = \frac{N_i}{N}$, 考虑到 $|\zeta_1|^2 + |\zeta_0|^2 + |\zeta_{-1}|^2 = 1$, $\theta_s = \theta_{+1} + \theta_{-1} - 2\theta_0$;

$\theta_m = \theta_{+1} - \theta_{-1}$, $m = (N_1 - N_{-1})/N$, 可以得到

有限磁场下的平均场方程

$$\rho_0 = \frac{2c}{\hbar} \rho_0 \sqrt{(1 - \rho_0)^2 - m^2} \sin \theta_s,$$

$$\dot{\theta}_s = -\frac{2q}{\hbar} + \frac{2c}{\hbar} \left[(1 - 2\rho_0) + \frac{(1 - \rho_0)(1 - 2\rho_0) - m^2}{\sqrt{(1 - \rho_0)^2 - m^2}} \cos \theta_s \right], \tag{2}$$

其中, $\epsilon = \frac{c}{2} m^2 + c\rho_0 [(1 - \rho_0) + \sqrt{(1 - \rho_0)^2 - m^2} \cos \theta_s] + q(1 - \rho_0)$ 是总能量, 对应哈密顿量 \hat{H}_a . 根据 c

的正负, 旋量 BEC 一般又分为铁磁的和反铁磁的: 铁磁的对应 $c < 0$, 如⁸⁷Rb; 而反铁磁的对应 $c > 0$, 如²³Na.

利用平均场方程(2), 可以绘制出 ρ_0 和 θ_s 的等能线相图(图 2), 其中 $m = 0$. 图 2 中闭合曲线代表能量相等的点的集合, 可以发现, 有两个明显不同的区域: 振动区(A 区和 C 区)和转动区(B 区和 D 区)^[29]. 图 2(a)和图 2(d)只存在振动区, 而图 2(c)和图 2(f)中只存在转动区.

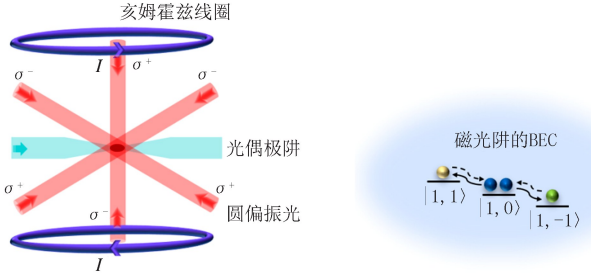


图1 旋量 BEC 的自旋混合动力学(在线彩图)
Fig.1 Spin mixing dynamics of spinor BEC (colour online)

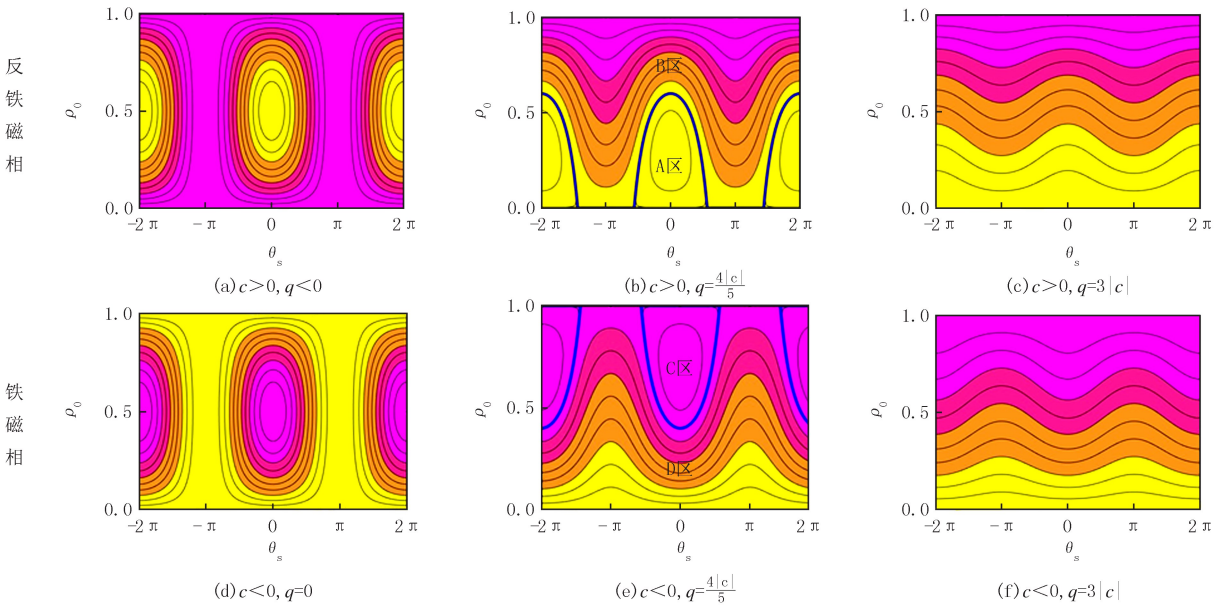


图2 旋量 BEC 中 ρ_0 和 θ_s 的等能线相图(在线彩图)
Fig.2 Phase diagram of ρ_0 and θ_s in spinor BEC (colour online)

当 2 个区域都存在的时候,就会有分离线的存在. $c < 0, q > 0$ 时,分离线对应 $\epsilon = 0$ 的等能线, $\rho_0 = 1$ 对应系统的不稳定点; $c > 0, q > 0$ 时,分离线对应 $\epsilon = q$ 的等能线, $\rho_0 = 0$ 对应系统的不稳定点. 等能线的相图可以用于预测初态未来的演化趋势^[23].

然而,平均场方法是在粒子数趋向于无穷大并忽略量子起伏的情况下得到的. 显然,在粒子数有限的情况下,与量子相关的性质,如压缩、涨落等无法通过平均场方法体现. 虽然全量子方法可以很好地描述量子性质,但是其计算效率较低. 当原子数目比较多时,全量子方法可能会达到计算机极限. 而半经典的截断维格纳近似方法^[30]结合了平均场方法的思路和全量子中的涨落特点,用一个维格纳分布代替一个点来描述初态. 这在解决压缩这类问题中展现出巨大的优势. 既能保证计算速度,又可以准确地描述系统的量子特性^[31-32].

2 向列压缩

在研究自旋压缩的时候,通常会定义自旋算符

$$\hat{S}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_0 + \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_{-1} + \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_{-1}^\dagger \hat{a}_0),$$

$$\hat{S}_y = \frac{i}{\sqrt{2}}(-\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_0 - \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_{-1} + \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_{-1}^\dagger \hat{a}_0), \hat{S}_z = (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_{-1}^\dagger \hat{a}_{-1}).$$

基于上式可以考虑自旋之间的压缩关系. 向列压缩与自旋压缩最大的不同就是引入了向列张量 $\hat{N}_{jk} = \hat{S}_j \hat{S}_k + \hat{S}_k \hat{S}_j - (4/3)\delta_{jk}$, 其中, $j, k \in \{x, y, z\}$, 这里的 δ_{jk} 是狄拉克符号. 当 $j = k$ 时, 对应一个单位矩阵, 此时

$$\hat{N}_{zz} = \frac{2}{3}\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \frac{4}{3}\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 + \frac{2}{3}\hat{a}_{-1}^\dagger \hat{a}_{-1}.$$

当 $j \neq k$ 时, $\delta_{jk} = 0$. 这种情况下^[16] $\hat{N}_{xy} = \hat{S}_x \hat{S}_y + \hat{S}_y \hat{S}_x - (4/3)\delta_{xy} = \hat{S}_x \hat{S}_y + \hat{S}_y \hat{S}_x$. 类似地, 可以给出部分自旋算符和向列张量的矩阵和算符表示^[23,33]:

$$\hat{N}_{yz} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1, \hat{a}_0, \hat{a}_{-1}) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1^\dagger \\ \hat{a}_0^\dagger \\ \hat{a}_{-1}^\dagger \end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}}(-\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_0 + \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_{-1} + \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_{-1}^\dagger \hat{a}_0),$$

$$\hat{N}_{xz} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_0 - \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_{-1} + \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_{-1}^\dagger \hat{a}_0), \hat{S}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_0 + \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_{-1} + \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_{-1}^\dagger \hat{a}_0),$$

$$\hat{S}_y = \frac{i}{\sqrt{2}}(-\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_0 - \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_{-1} + \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_{-1}^\dagger \hat{a}_0).$$

并非所有的向列张量与自旋算符都可以构成压缩. 根据海森堡不确定原理, 算符的对易子不为 0, 它们才可以构成压缩对. 为了方便观测向列压缩, 将系统初态制备在临界相变点对应的态^[17]. 对于 $c < 0, q > 0$ 的铁磁旋量 BEC, $\rho_0 = 1$ 对应的极化态就是一个不稳定点对应的态 $|N_1 = 0, N_0 = N, N_{-1} = 0\rangle$. 自旋为 1 的旋量 BEC 的所有自旋算符和向列张量中, 只有 \hat{S}_x, \hat{N}_{yz} 和 \hat{S}_y, \hat{N}_{xz} 这两对算符的对易子的期望在 $|0, N, 0\rangle$ 下不为 0, 即 $\langle 0, N, 0 | [\hat{S}_x, \hat{N}_{yz}] | 0, N, 0 \rangle = -2iN$ 和 $\langle 0, N, 0 | [\hat{S}_y, \hat{N}_{xz}] | 0, N, 0 \rangle = 2iN$. 它们的压缩参数 $\xi_{x(y)}^\theta = \langle (\Delta(\hat{S}_{y(x)} \cos \theta + \hat{N}_{xz(yz)} \sin \theta))^2 \rangle / N$ ^[16], 其中, $\theta \in [0, 2\pi]$ 是正交角, Δ 代表方差. 随着 θ 的变化, 任意时刻 ξ 都将有一系列的取值, 将最大的 ξ 叫作最大正交方差, 最小的 ξ 称为最小正交方差. 衡量发生了向列压缩的一个重要的物理量就是最小正交方差 ξ_{\min} , 如果 $\xi_{\min} \geq 1$, 代表没有发生压缩; $\xi_{\min} < 1$, 代表发生了压缩.

选择 \hat{S}_x 和 \hat{N}_{yz} 算符, 将系统的初态制备在 $|0, N, 0\rangle$ 上. 采用 TWA 方法, 可以得到压缩最小方差 ξ_{\min} 和最大正交方差 ξ_{\max} 随时间 t 变化的图像(图 3).

应用变换 $\xi \rightarrow 10 \lg \xi$, 相应地, $\xi_{\min} \geq 0$ dB 代表没有压缩; $\xi_{\min} < 0$ dB 代表发生了压缩, 且 ξ_{\min} 的值越小, 代表压缩越明显. 可以看出, 初始的时候 $\xi_{\min} = 0$ dB, 代表没有压缩, 随着时间演化, 最小正交方差不断变小, 直至 $t = 43$ ms, 最小正交方差达到最小值, 随后压缩仍然持续一段时间, 但是压缩强度逐渐变小.

事实上, 除了压缩参数, 还可以使用自旋向列球来更加直观地演示这种压缩效果. 这里选用 S_x, N_{yz} 和

$2\rho_0 - 1$ 作为三维坐标轴^[34], 在图 2 中, ρ_0 和 θ_s 的相图存在明显的分离线, 所以如果在自旋向列球上绘制相图, 也必然存在分界线. 根据平均场理论, 得到 \hat{S}_x 和 \hat{N}_{yz} 的期望值分别是

$$\langle \hat{S}_x \rangle = 2 \sqrt{\rho_0(1-\rho_0)} \cos \frac{\theta_s}{2} \sin \frac{\theta_m}{2},$$

$$\langle \hat{N}_{yz} \rangle = 2 \sqrt{\rho_0(1-\rho_0)} \sin \frac{\theta_s}{2} \sin \frac{\theta_m}{2}.$$

在自旋向列球上, 等能线的方程 $\epsilon =$

$$\frac{c}{2} \langle \hat{S}_x^2 \rangle + q(1-\rho_0)^{[35]}.$$

系统的量子涨落在平均场描述中无法体现. 在图 4 采用维格纳分布来模拟初态.

如图 4(a), 初始时刻态是一个在球体北极的圆形分布. 图中白色的线是等能线, 其中穿过上顶点(不稳定点)(0, 0, 1)的等能线对应相图的分离线. 将初态制备在不稳定点, 随着时间变化态会沿着分离线压缩, 成为一条细长的曲线. 然后散点会沿着分离线散开(图 4(c)). 在 180 ms 时, 散点开始沿着分离线的另一支压缩, 在北极处形成交叉的图像. 随着压缩的减弱, 散点最终散开, 但是并非完全散开, 而是集中在分离线所在的曲面上(图 4(f)). 将图 4 中的一系列图像进行投影, 使用颜色标记散点的密度, 得到图 5.

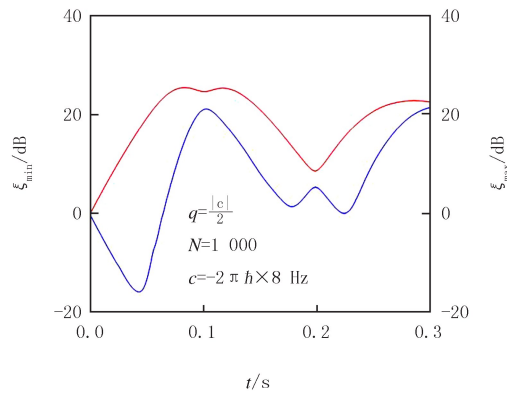


图3 铁磁旋量BEC压缩最小正交方差 ξ_{\min} 和最大正交方差 ξ_{\max} 和随时间 t 变化(在线彩图)

Fig. 3 Ferromagnetic squeezing minimum and maximum quadrature variance as a function of time (colour online)

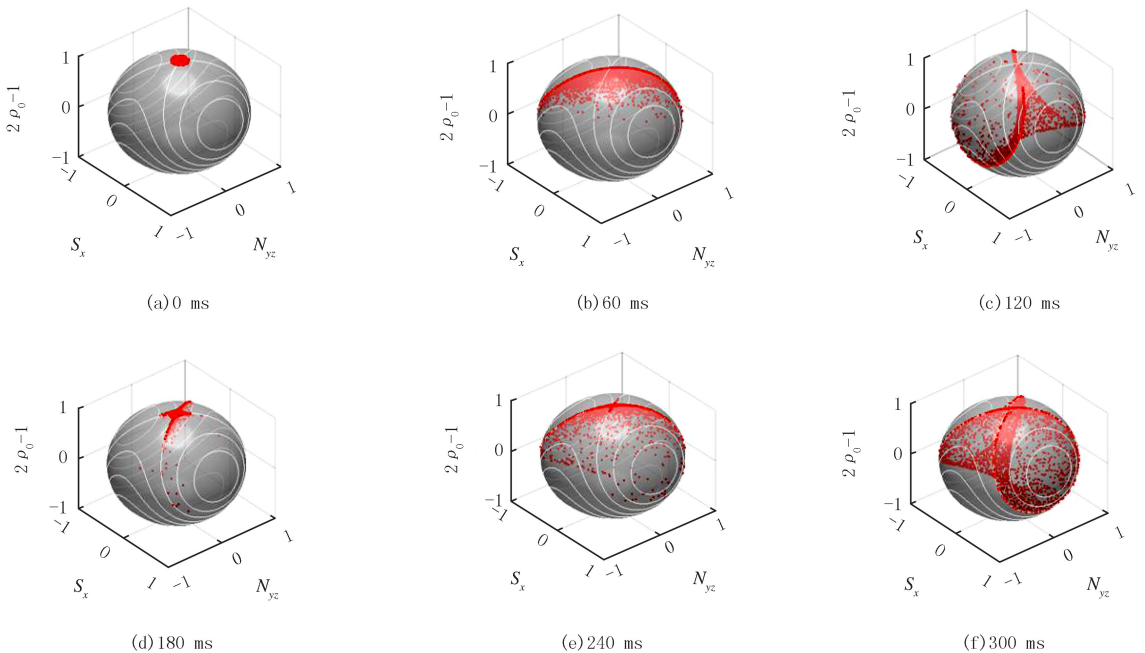


图4 系统的态在自旋向列球的演化(在线彩图)

Fig. 4 Evolution of the state of the system in spin-nematic sphere (colour online)

在图 5 中, 黄色代表散点的密度较大, 其次是绿色和蓝色. 从投影图可以更加直接观测到 S_x 和 N_{yz} . 初始时刻, S_x 和 N_{yz} 的分布近似是一个圆, 说明此时没有发生压缩. 随着时间的演化, 在 60 ms 时, S_x 和 N_{yz} 的分布集中在一条线上, 且这条线是与分离线重合的, 说明此时沿着分离线发生了压缩, 并且压缩越强, 散点构成的区域面积越小, 几乎完全分布在分离线上; 相反, 压缩越弱, 散点逐渐分散(图 5(c)). S_x 的涨落小于 N_{yz} 的涨落, 说明对 S_x 有更加准确的测量. 在 180 ms 时, 在图 5(d) 中散点开始沿着分离线的另一支压缩. 图 5(f) 和图 5(c) 的形状相似, 但是颜色分布有较大的差别, 图 5(c) 中黄色区域集中在中心和分离线上, 而图 5(f) 中黄色区域较少且只集中在中心, 蓝色区域散布在分离线围成的闭合图形中, 此时压缩强度较弱. 由此可见, 制备

在不稳点的初态总是沿着分离线压缩的.

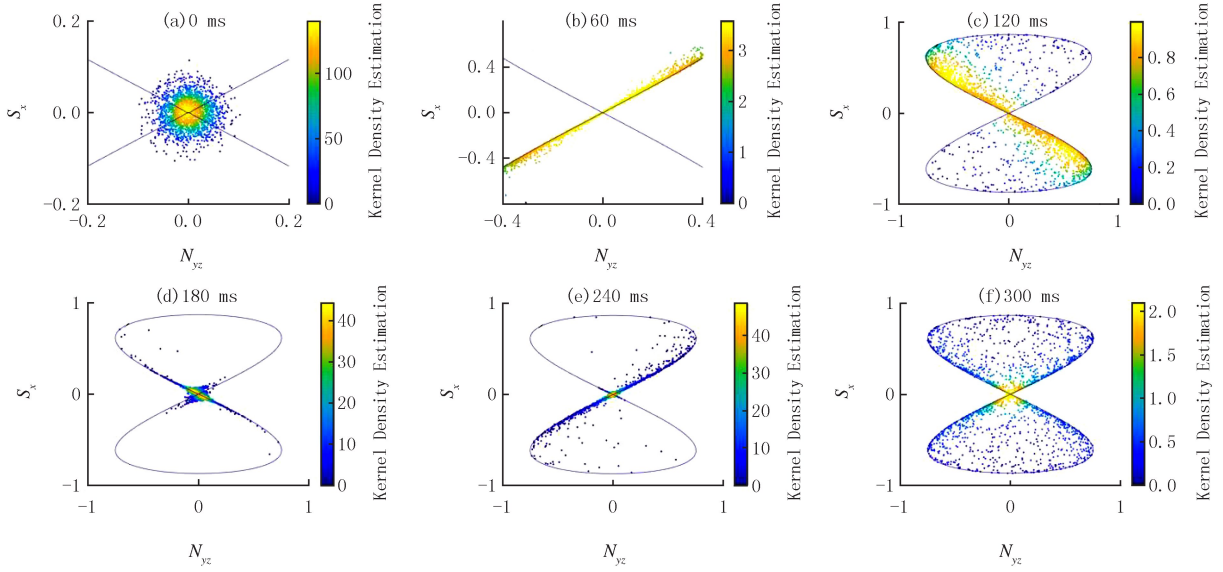


图5 S_x 和 N_{yz} 平面的自旋向列压缩 (在线彩图)

Fig.5 Spin-nematic squeezing on the plane of S_x and N_{yz} (colour online)

以上展示了初态制备在 $|0, N, 0\rangle$ 这一个极化态的铁磁旋量 BEC 的压缩特性, 下面来研究当系统的初态处于自旋相干态的情况. 事实上, 通常自旋相干态可以表示成 $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}}(\xi_1 a_1^\dagger + \xi_0 a_0^\dagger + \xi_{-1} a_{-1}^\dagger)^N |0\rangle$, 其

中, $|\xi_1|^2 + |\xi_0|^2 + |\xi_{-1}|^2 = 1$. 这样的态可以通过 $|0, N, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}}(a_0^\dagger)^N |0\rangle$ 旋转得到^[18]. 例如, 如果想

要得到一个自旋相干态 $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}}\left(\frac{1}{2}(\cos\varphi - \sin\varphi)(a_1^\dagger + a_{-1}^\dagger) + \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\varphi + \sin\varphi)a_0^\dagger\right)^N |0\rangle$, 可以使用

\hat{N}_{yz} 旋转算符对 $|0, N, 0\rangle$ 进行 2 次么正变换, 得到 $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}}(e^{-igN_{yz}} e^{i\frac{\pi}{4}N_{yz}} a_0^\dagger e^{i\frac{\pi}{4}N_{yz}} e^{igN_{yz}})^N |0\rangle$.

在旋量 BEC 的铁磁相 ($c < 0, q > 0$) 中, 不稳定点往往对应 $\rho_0 = 1$ 的极化态, 图 6(a) 中给出了初态为 $\rho_0 = 0.2$ 的自旋相干态和初态为 $\rho_0 = 1$ 的极化态随时间演化的动力学图像, 可以看到两种初态最终都趋向于稳态, 趋于稳态的时间略有不同, 图 6(b) 则标出了不同的初态在相图的位置.

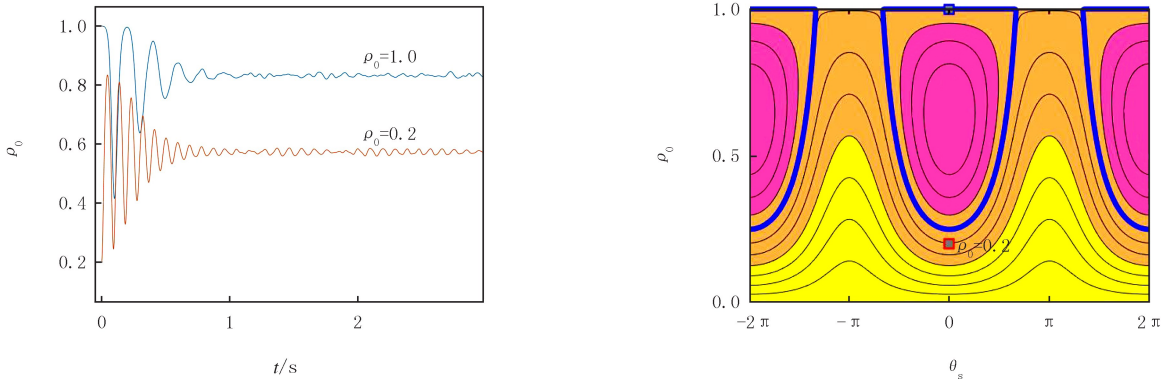


图6 旋量 BEC 不同初态的动力学对比 (在线彩图)

Fig.6 The comparison of dynamics with different initial states in spinor BEC (colour online)

做么正变换之后, $|\psi\rangle$ 态下的 \hat{S}_x 和 \hat{N}_{yz} 不再构成一对正交的压缩算符, 因此需要对算符进行对应的么

正变换得到 $|\psi\rangle$ 态下的 $\hat{S}_x = \frac{1}{2} \cos(2\varphi)(\hat{Q}_{zz} - \hat{Q}_{yy}) + \sin(2\varphi)\hat{S}_x, \hat{N}_{yz} = \hat{N}_{yz}$. 此时新算符 \hat{S}_x 和 \hat{N}_{yz} 构成压缩, 可以计算得到新的压缩参数 $\xi_y^2 = \langle (\Delta(\hat{S}'_x \cos \theta + \hat{N}'_{yz} \sin \theta))^2 \rangle / N$. 使用 $\rho_0 = 0.2$ 对应的自旋相干态作为初态, 可以得到新的压缩参数随时间变化的图像(图 7). 初始的时候没有压缩, 随着时间, 压缩的最小正交方差不断减小, 压缩效果不断增强, 最终在 27 ms 时达到最大压缩, 随后最小正交方差急剧增大, 100 ms 之后不再有压缩. 与图 3 相比, $\rho_0 = 0.2$ 对应的自旋相干态有更小的最小正交方差, 说明某些自旋相干态比极化态有更好的压缩效果, 研究任意态的向列压缩对于提高压缩效果有重要意义.

除了压缩参数的图像, 利用 TWA 方法, 还可以得到 \hat{S}_x 和 \hat{N}_{yz} 的压缩平面图像(图 8). 如图 8(a), 初始的时候 \hat{S}_x 和 \hat{N}_{yz} 的涨落分布是一个圆形, 代表此时没有压缩. 随着时间, 在 60 ms 时, 图像被压缩为细长的曲线, 说明此时发生压缩, 且压缩效果明显, 只是压缩中心整体向左下方偏移, 呈现出与极化态不同的压缩图像. 120 ms 后已经没有明显的压缩效果. 散点分散在整个平面, 没有极化态沿着分离线压缩的特性.

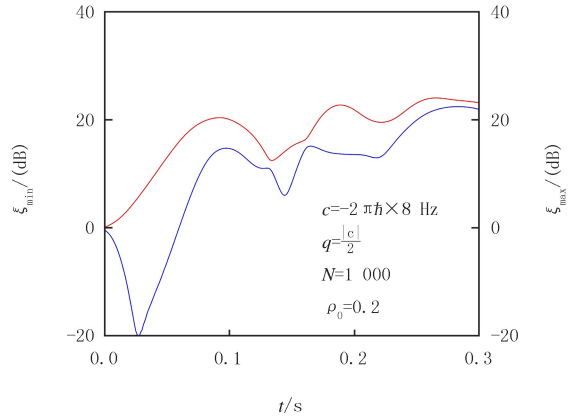


图7 自旋相干态铁磁旋量BEC压缩最小正交方差 ξ_{\min} 和最大正交方差 ξ_{\max} 和随时间 t 变化(在线彩图)

Fig. 7 Ferromagnetic squeezing of spin coherent state minimum and maximum quadrature variance as a function of time (colour online)

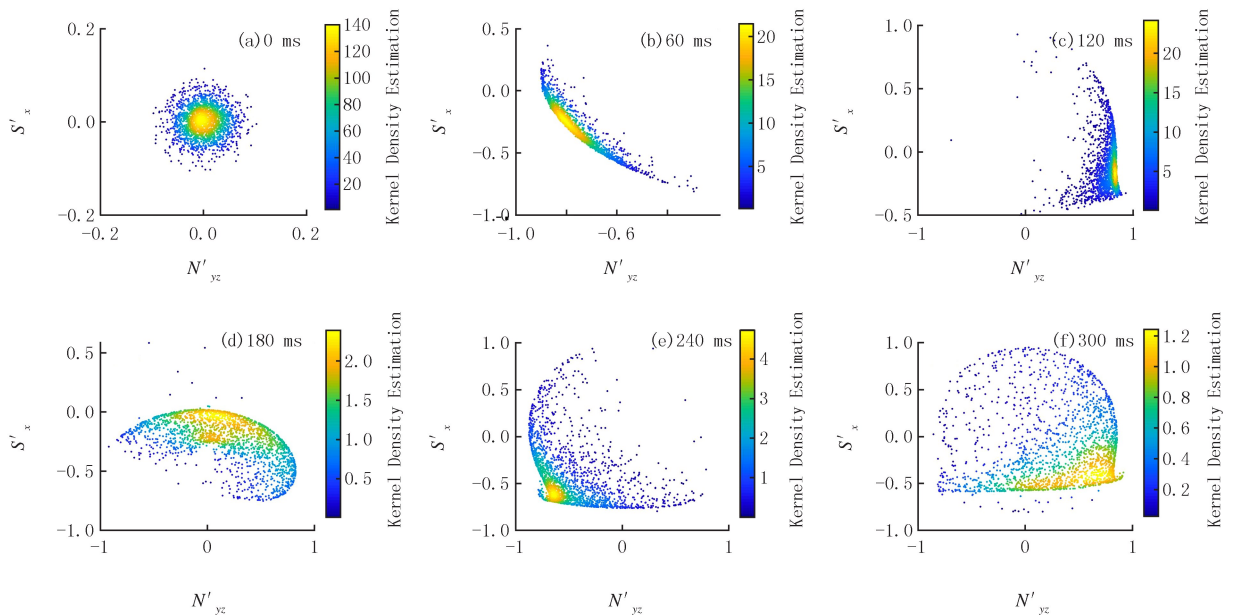


图8 \hat{S}'_x 和 \hat{N}'_{yz} 平面的向列压缩图像(在线彩图)

Fig. 8 Spin-nematic squeezing on the plane of \hat{S}'_x and \hat{N}'_{yz} (colour online)

3 总 结

本文从理论上回顾了旋量 BEC 系统中的自旋向列压缩特性, 推导出了向列压缩参数的形式, 并从数值上模拟了在不稳定点对应的态随时间演化的规律. 通过模拟自旋向列球及其投影图更清楚地展示了旋量

BEC 系统中丰富的向列压缩特性.并且,还研究了任意初态情况下系统的压缩性质,发现某些自旋相干态的压缩效果比极化态更佳.

参 考 文 献

- [1] CORNELL E A, WIEMAN C E. Nobel Lecture: Bose-Einstein condensation in a dilute gas, the first 70 years and some recent experiments [J]. *Rev Mod Phys*, 2002, 74(3): 875-893.
- [2] MATHEW R, TIESINGA E. Phase-space mixing in dynamically unstable, integrable few-mode quantum systems [J]. *Phys Rev A*, 2017, 96(1): 013604.
- [3] ANDERSON M H, ENSHER J R, MATTHEWS M R, et al. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor [J]. *Science*, 1995, 269(5221): 198-201.
- [4] DAVIS K B, MEWES M O, ANDREWS M R, et al. Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms [J]. *Phys Rev Lett*, 1995, 75(22): 3969-3973.
- [5] BRADLEY C C, SACKETT C A, HULET R G. Bose-Einstein condensation of lithium; observation of limited condensate number [J]. *Phys Rev Lett*, 1997, 78(6): 985-989.
- [6] BARRETT M D, SAUER J A, CHAPMAN M S. All-optical formation of an atomic Bose-Einstein condensate [J]. *Phys Rev Lett*, 2001, 87(1): 010404.
- [7] DUAN L M, CIRAC J I, ZOLLER P. Quantum entanglement in spinor Bose-Einstein condensates [J]. *Phys Rev A*, 2002, 65(3): 033619.
- [8] VITAGLIANO G, APELLANIZ L, EGUSQUIZA I L, et al. Spin Squeezing in the Spin-1 Bose-Einstein Condensates [J]. *Phys Rev A*, 2014, 89(3): 032307.
- [9] BECKER C, SOLTAN-PANAHI P, KRONJÄGER J, et al. Ultracold quantum gases in triangular optical lattices [J]. *New J Phys*, 2010, 12(6): 065025.
- [10] ZHOU F. Spin correlation and discrete symmetry in spinor Bose-Einstein condensates [J]. *Phys Rev Lett*, 2001, 87(8): 080401.
- [11] SZIGETI S S, NOLAN S P, CLOSE J D, et al. High-Precision Quantum-Enhanced Gravimetry with a Bose-Einstein Condensate [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2020, 125(10): 100402.
- [12] ZHOU L, PU H, LING H Y, et al. Cavity-mediated strong matter wave bistability in spin-1 condensate [J]. *Phys Rev Lett*, 2009, 103(16): 160403.
- [13] LI Z C, JIANG Q H, LAN Z, et al. Nonlinear floquet dynamics of spinor condensates in an optical cavity: Cavity-amplified parametric resonance [J]. *Phys Rev A*, 2019, 100(3): 033617.
- [14] PASQUIOU B, MARÉCHAL E, BISMUT G, et al. Spontaneous demagnetization of a dipolar spinor Bose gas in an ultralow magnetic field [J]. *Phys Rev Lett*, 2011, 106(25): 255303.
- [15] HOANG T M, ANQUEZ M, ROBBINS B A, et al. Parametric excitation and squeezing in a many-body spinor condensate [J]. *Nature Communications*, 2016, 7: 11233.
- [16] HAMLEY C D, GERVING C S, HOANG T M, et al. Spin-nematic squeezed vacuum in a quantum gas [J]. *Nat. Phys.*, 2012, 8(4): 305-308.
- [17] HOANG T M, GERVING C S, LAND B J, et al. Dynamic stabilization of a quantum many-body spin system [J]. *Phys Rev Lett*, 2013, 111(9): 090403.
- [18] YUKAWA E, UEDA M, NEMOTO K. Classification of spin-nematic squeezing in spin-1 collective atomic systems [J]. *Phys Rev A*, 2013, 88(3): 033629.
- [19] HUANG Y, XIONG H N, SUN Z, et al. Generation and storage of spin-nematic squeezing in a spinor Bose-Einstein condensate [J]. *Phys Rev A*, 2015, 92(2): 023622.
- [20] MASSON S J, BARRETT M D, PARKINS S. Cavity QED engineering of spin dynamics and squeezing in a spinor gas [J]. *Physical Review Letters*, 2017, 119(21): 213601.
- [21] CHANG M S. Coherent spin dynamics of a spin-1 Bose-Einstein condensate [D]. Atlanta: Georgia Institute of Technology, 2006.
- [22] STAMPER-KURN D M, ANDREWS M R, CHIKKATUR A P, et al. Optical confinement of a Bose-Einstein condensate [J]. *Phys Rev Lett*, 1998, 80(10): 2027-2030.
- [23] ZHANG W, ZHOU D L, CHANG M S, et al. Coherent spin mixing dynamics in a spin-1 atomic condensate [J]. *Phys Rev A*, 2005, 72(5): 013602.
- [24] HAMLEY C D. Spin-nematic squeezing in a spin-1 Bose-Einstein condensate [D]. Atlanta: Georgia Institute of Technology, 2012.
- [25] CHANG M S, HAMLEY C D, BARRETT M D, et al. Observation of spinor dynamics in optically trapped ^{87}Rb Bose-Einstein condensates [J]. *Physical Review Letters*, 2004, 92(14): 140403.
- [26] 张杰. 自旋 $F=1$ 旋量玻色-爱因斯坦凝聚的基态和动力学性质 [D]. 太原: 山西大学, 2011.
ZHANG J. The ground state and dynamics properties of $F=1$ spinor Bose-Einstein condensates [D]. Taiyuan: Shanxi University, 2011.

- [27] YI S, MüSTECAPLIO? LU? E, SUN C P, et al. Single-mode approximation in a spinor-1 atomic condensate[J]. Phys Rev A, 2002, 66(1):011601.
- [28] LAW C K, PU H, BIGELOW N P. Quantum spins mixing in spinor Bose-Einstein condensates[J]. Phys Rev Lett, 1998, 81(24): 5257-5261.
- [29] HO T L. Spinor Bose condensates in optical traps[J]. Phys Rev Lett, 1998, 81(4):742-745.
- [30] BLOCH I, DALIBARD J, ZWERGER W. Many-body physics with ultracold gases[J]. Rev Mod Phys, 2008, 80(3):885-964.
- [31] KAWAGUCHI Y, UEDA M. Spinor Bose-Einstein condensates[J]. Phys Rep, 2012, 520(5):253-381.
- [32] ZHAI Q, CHANG L, LU R, et al. Number fluctuation dynamics of a spin-1 atomic condensate[J]. Phys Rev A, 2009, 79(4):043608.
- [33] 闫娟娟, 张杰. 自旋 $F=1$ 旋量凝聚体中的自旋压缩[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2017, 40(1):106-111.
YAN J J, ZHANG J. Spin squeezing in the spin-1 Bose-Einstein condensates[J]. Journal of Shanxi University(Natural Science Edition), 2017, 40(1):106-111.
- [34] HOANG T M. Quantum control of a many-body system in a spin-1 Bose-Einstein condensate[D]. Atlanta: Georgia Institute of Technology, 2013.
- [35] GERVING C S. Dynamics of a quantum inverted pendulum explored in a spin-1 BEC[D]. Atlanta: Georgia Institute of Technology, 2013.

Nematic squeezing in the $F=1$ Bose-Einstein condensate

Yang Chaonan¹, Zheng Renfei², Zhao Xingdong³, Zhou Lu¹

(1. School of Physics and Electronic Science, East China Normal University, Shanghai 200241, China; 2. School of Physics, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China; 3. School of Physics, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

Abstract: Spinor Bose-Einstein condensate has become a hot research topic in quantum optics, widely used in precision measurement. In this paper, based on the semiclassical truncated Wigner approximation, the spin-nematic squeezing in the $F=1$ spinor Bose-Einstein condensate is studied. The dynamic behaviors of the spin-nematic squeezing are obtained by numerical simulation, and the physical properties of the spin-nematic squeezing are demonstrated on the spin-nematic sphere. Finally, we also study the behaviors of the spin-nematic squeezing of the system under arbitrary initial states. Our research demonstrates the potential applications of spinor Bose-Einstein condensate in precision measurement.

Keywords: spinor Bose-Einstein condensate; nematic squeezing; spin-nematic sphere; truncated Wigner approximation

[责任编辑 杨浦 刘洋]