第 43 卷 第 5 期
2015 年 9 月

河南师范大学学报(自然科学版)
Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition)

Vol. 43 No. 5
Sept. 2015

文章编号:1000－2367(2015)05－0018－04

DOI:10.16366/j.cnki.1000－2367.2015.05.004

一类非线性阻尼 Petrovsky 方程的整体解的存在性

陈 振[1]，孙玉梅[2]，王 瑞[1]

(1. 河南农业大学 信息与管理科学学院,郑州 450002;2. 洛阳理工学院,河南 洛阳 471023)

摘 要: 主要研究非线性阻尼 Petrovsky 方程 $u_{tt}+\Delta^2u+a(1+|u_t|^r)u_t=b|u|^pu$ 在有界区域的初边值问题. 应用势井理论,通过定义位势井的深度和稳定集,利用稳定集的不变性及有界性原理证明了此问题整体解的存在性.

关键词: Petrovsky 方程;稳定集;整体解

中图分类号: O175.02　　**文献标志码:** A

本文主要考察一类带耗散项和源项的 Petrovsky 方程初边值问题的整体可解性

$$u_{tt}+\Delta^2u+a(1+|u_t|^r)u_t=b|u|^pu,x\in\Omega,t>0,\tag{1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),u_t(x,0)=u_1(x),x\in\Omega,\tag{2}$$

$$u(x,t)=\frac{\partial}{\partial n}u(x,t)=0,x\in\partial\Omega,t\geq0,\tag{3}$$

其中 $a,b,r,p>0$ 均为实数,Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 中具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界集,Δ 是拉普拉斯算子 $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|\partial\Omega$ 表示 u 在边界 $\partial\Omega$ 外法线方向的导数.

文献[1] 考虑了方程

$$u_{tt}+\Delta^2u+q(x)u+g(u_t)=0,x\in\Omega,t>0\tag{4}$$

在(2) 和(3) 条件下的初边值问题,其中 g 是连续增函数,$g(0)=0$,且 $q:\Omega\to[0,+\infty)$ 是有界函数,证明了该问题整体解的存在性和正则性结果. 另外,文献[2] 在对耦合半线性波动方程的研究中也获得了解的相关结论. 当(1) 中缺少线性耗散项 au_t 时,文献[3] 建立了问题(1)－(3) 解的存在性定理,并证得 $r\geq p$ 时解的整体存在性和 $r<p$ 时解在有限时间发生爆破.

针对非线性阻尼波动方程 $u_{tt}-\Delta u+a|u_t|^ru_t=bu|u|^p$,其 Cauchy 问题和初边值问题解的爆破和整体解的存在性、唯一性,已被众多学者通过各种方法或在不同条件下进行了研究,见文献[4－9],更多研究成果见文献[10－15].

应用文献[7,16] 中的势井理论,本文证明了初边值问题(1)－(3) 整体解的存在性.

采用通常的符号记法. 设 $H^m(\Omega)$ 表示 Sobolev 空间,其中范数为 $\|u\|_{H^m(\Omega)}=\left(\sum_{|\alpha|\leq m}\|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$,$H_0^M(\Omega)$ 代表 $H^m(\Omega)$ 中 $C_0^\infty(\Omega)$ 的闭包. 为方便起见,今后用 $\|\cdot\|_p$ 表示 Lebesgue 空间 $L^p(\Omega)$ 中的范数,$\|\cdot\|$ 表示 $L^2(\Omega)$ 中的范数,并且用范数 $\|\Delta\cdot\|$ 代替 $H_0^2(\Omega)$ 中的范数 $\|\cdot\|_{H_0^2(\Omega)}$. 此外,$M$ 表示依赖于已知常数的正数,且在不同点处的含义有所不同.

首先,给出一个解局部存在的重要结果(见文献[8]).

命题 1 假设 $r,p>0$ 满足

收稿日期: 2014-12-08;**修回日期:** 2015-04-21.

基金项目: 河南省科技计划项目(132400410218);河南省教育厅自然科学研究项目(2011A110067).

第 1 作者简介(通信作者): 陈 振(1974－),男,河南汝南人,河南农业大学副教授,研究方向为偏微分方程,E-mail:hn-chenzhen@sohu.com.

$$0 < p < +\infty, N \leq 4; 0 < p \leq \frac{4}{N-4}, N > 4, \tag{5}$$

$$0 < r < +\infty, N \leq 4; 0 < r \leq \frac{8}{N-4}, N > 4, \tag{6}$$

如果$(u_0, u_1) \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$，则存在 $T > 0$ 使得问题(1) ～ (3) 存在唯一局部解 $u(t)$，且

$$u \in C([0,T); H_0^2(\Omega)), u_t \in C([0,T); L^2(\Omega)) \cap L^{r+2}(\Omega \times [0,T)). \tag{7}$$

命题 2　在命题 1 的假设下，如果 $\sup\limits_{0 \leq t \leq T_{\max}} (\| u_t(t) \|^2 + \| \Delta u(t) \|^2) < +\infty$，则 $T_{\max} = +\infty$，其中$[0, T_{\max}]$ 是问题(1) ～ (3) 的解 $u(x,t)$ 存在的最大时间区间.

事实上，在文献[8] 中通过压缩映射原理证明了问题局部解的存在性，构造空间

$$X_T = \{u \in C([0,T]; H_0^2(\Omega)), u_t \in C([0,T]; L^2(\Omega))\},$$

并具有范数：$\| u(t) \|_{X_T} = \sup\limits_{0 \leq t \leq T} \frac{1}{2}(\| u_t(t) \|^2 + \| \Delta u(t) \|^2)$.

设 $\varepsilon > 0$，且 $X_{\varepsilon,T} = \{u \in X_T : \| u \|_{X_T} \leq \varepsilon\}$，定义 $X_{\varepsilon,T}$ 上距离 $d(u,c) = \| u - v \|_{X_T}$，则 $X_{\varepsilon,T}$ 是一个完备度量空间. 说明，对于非常小的 ε，在 $X_{\varepsilon,T}$ 中存在唯一的不动点，其中 T 仅依赖于 ε. 因此，由解的标准延拓法，得 $T_{\max} = +\infty$，$\sup\limits_{0 \leq t \leq T_{\max}} (\| u_t(t) \|^2 + \| \Delta u(t) \|^2) < +\infty$.

1　预备知识

为证得主要结论，首先定义泛函：

$$I(u) = I(u(t)) = \| \Delta u(t) \|^2 - b \| u(t) \|_{p+2}^{p+2},$$

$$J(u) = J(u(t)) = \frac{1}{2} \| \Delta u(t) \|^2 - \frac{b}{p+2} \| u(t) \|_{p+2}^{p+2},$$

根据文献[9－10]，定义 $d = \inf\{\sup\limits_{\lambda > 0} J(\lambda u), u \in H_0^2(\Omega)/\{0\}\}$，则对问题(1) ～ (3)，我们定义稳定集 $W = \{u \in H_0^2(\Omega),\ I(u) > 0\} \cup \{0\}$.

方程(1) 的总能量记为

$$E(u(t)) = \frac{1}{2} \| u_t(t) \|^2 + \frac{1}{2} \| \Delta u(t) \|^2 - \frac{b}{p+2} \| u(t) \|_{p+2}^{p+2} = \frac{1}{2} \| u_t(t) \|^2 + J(u(t)),$$

这里 $u \in H_0^2(\Omega), t \geq 0, E(u(0)) = \frac{1}{2} \| u_1 \|^2 + J(u_0)$ 是初始数据的总能量.

引理 1　设 q 满足 $2 \leq q < +\infty, N \leq 4$ 或者 $2 \leq q \leq \frac{2N}{N-4}, N > 4$，则存在依赖于 Ω 和 q 的常数C 满足 $\| u \|_q \leq C \| \Omega u \|$，$\forall u \in H_0^2(\Omega)$.

引理 2　假设 $u \in H_0^2(\Omega)$，如果(4) 成立，则 $d = \frac{p}{2(p+2)} \frac{1}{(bC_*^{p+2})^{\frac{2}{p}}}$ 是一个正数，其中 C_* 是引理 1 中的最优常数，且 $C_* = \sup\limits_{u \neq 0} \frac{\| u \|_{p+2}}{\| \Delta u \|}$.

证明　因为

$$J(\lambda u) = \frac{\lambda^2}{2} \| \Delta u \|^2 - \frac{b\lambda^{p+2}}{p+2} \| u \|_{p+2}^{p+2},$$

所以，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} J(\lambda u) = \lambda \| \Delta u \|^2 - b\lambda^{p+1} \| u \|_{p+2}^{p+2}$.

令 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} J(\lambda u) = 0$，则 $\lambda_1 = b^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{\| u \|_{p+2}^{p+2}}{\| \Delta u \|^2} \right)^{-\frac{1}{p}}$.

当 $\lambda = \lambda_1$ 时有 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2} J(\lambda u) < 0$.

因此，由引理 1，得 $\sup\limits_{\lambda \geq 0} J(\lambda u) = J(\lambda_1 u) = \frac{p}{2(p+2)} b^{-\frac{2}{p}} \left(\frac{\| u \|_{p+2}}{\| \Delta u \|} \right)^{-\frac{2(p+2)}{p}} \geq \frac{p}{2(p+2)} \frac{1}{b^{\frac{2}{p}}} C^{-\frac{2(p+2)}{p}} > 0$，由 d

的定义知 $d=\frac{p}{2(p+2)}\frac{1}{(bC_*^{p+2})^{\frac{2}{p}}}>0$.

引理 3 设 $u(t)$ 是问题(1) ~ (3) 的一个解,则 $E(u(t))$ 是 $t>0$ 的非增函数,且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(u(t))=-a(\|u_t(t)\|_{r+2}^{r+2}+\|u_t(t)\|^2).$$

证明 用方程(1) 乘以 u_t,并在 Ω 上积分得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(u(t))=-a(\|u_t(t)\|_{r+2}^{r+2}+\|u_t(t)\|^2)\leq 0.$$

因此,$E(u(t))$ 是关于 t 的非增函数.

2 主要结果及其证明

定理 1 假设(4) 成立,如果 $u_0\in W,u_1\in L^2(\Omega)$ 且初始能量 $E(u(0))<d$,则对 $t\in[0,T)$,有 $u\in W$.

证明 假设存在实数 $t^*\in[0,T)$ 满足在$[0,t^*)$ 上 $u(t)\in W$,且 $u(t^*)\notin W$,则

$$I(u(t^*))=0,u(t^*)\neq 0. \tag{8}$$

因为在$[0,t^*)$ 上,$u(t)\in W$,所以

$$J(u(t))=\frac{1}{2}\|\Delta u(t)\|^2-\frac{b}{p+2}\|u(t)\|_{p+2}^{p+2}\geq\frac{1}{2}\|\Delta u(t)\|^2-\frac{1}{p+2}\|\Delta u(t)\|^2=\frac{p}{2(p+2)}\|\Delta u(t)\|^2. \tag{9}$$

由 $I(u(t^*))=0$ 得

$$J(u(t^*))=\frac{1}{2}\|\Delta u(t^*)\|^2-\frac{b}{p+2}\|u(t^*)\|_{p+2}^{p+2}=\frac{p}{2(p+2)}\|\Omega u(t^*)\|^2. \tag{10}$$

因此,根据(9) 和(10) 得

$$\|\Delta u(t)\|^2\leq\frac{2(p+2)}{p}J(u(t))\leq\frac{2(p+2)}{p}E(u(t))\leq\frac{2(p+2)}{p}E(u(0)),\forall t\in[0,t^*]. \tag{11}$$

通过引理 2 知 $E(u(0))<d$,且 $E(u(0))<\frac{p}{2(p+2)}\frac{1}{(bC_*^{p+2})^{\frac{2}{p}}}$,即

$$bC_*^{p+2}\left(\frac{2(p+2)}{p}E(u(0))\right)^{\frac{p}{2}}<1. \tag{12}$$

利用引理 1,(11) 和(12),易知

$$b\|u\|_{p+2}^{p+2}\leq bC^{p+2}\|\Delta u\|^{p+2}=bC^{p+2}\|\Delta u\|^p\|\Delta u\|^2\leq bC_*^{p+2}\left(\frac{2(p+2)}{p}E(u(0))\right)^{\frac{p}{2}}\|\Delta u\|^2<\|\Delta u\|^2. \tag{13}$$

对所有 $t\in[0,t^*]$,得到

$$I(u(t^*))=\|\Delta u(t^*)\|^2-b\|u(t^*)\|_{p+2}^{p+2}>0 \tag{14}$$

此与(8) 产生矛盾.因此在$[0,T)$ 上 $u(t)\in W$.

定理 2 假设(4)、(5) 成立,$u(t)$ 是问题(1) ~ (3) 的局部解.若 $u_0\in W,u_1\in L^2(\Omega)$ 且 $E(u(0))<d$,则 $u(t)$ 是问题(1)Δ(3) 的整体解.

证明 由(11) 得

$$d>E(u(0))\geq E(u(t))=\frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2+J(u(t))\geq\frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2+\frac{p}{2(p+2)}\|\Delta u\|^2\geq\frac{p}{2(p+2)}(\|u_t(t)\|^2+\|\Delta u\|^2), \tag{15}$$

因此

$$\|u_t(t)\|^2+\|\Delta u\|^2\leq\frac{2(p+2)}{p}d<+\infty.$$

由命题 2 知，u(t)是问题(1)～(3)的整体解.

参　考　文　献

[1] Guesmia A. Existence globale at stabilisation interne non lineaire d'un systeme dePetrovsky[J]. Bell Belg Math Soc,1998(5):583-594.

[2] Guesmia A. Energy decay for a damped nonlinear coupled system[J]. J Math Anal Appl,1999,239:38-48.

[3] SMessaoudi S A. Global existence and nonexistence in a system of Petrovsky[J]. J Math Anal,Appl,2002,265:296-308.

[4] Benaissa A, Messaoudi S A. Exponential decay of solutions of a nonlinearly damped wave equation[J]. Nonlinear Differ Equ Appl,2005, 12:391-399.

[5] Georgiev V, Todorova G. Existence of solutions of the wave equation with nonlinear damping and source terms[J]. J Diff. Eqns,1994, 109:295-308.

[6] Liu Y C, Zhao J S. On potential wells and applications to semilinear hyperbolic equations and parabolic equations[J]. Nonlinear Anal, 2006,64:2665-2687.

[7] Payne L E,Sattinger D H. Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations[J]. Israel J Math,1975,22:273-303.

[8] Todorova G. Stable and unstable sets for the Cauchy problem for a nonlinear wave equation with nonlinear damping and source terms[J]. J Math Anal Appl,1999,239:213-226.

[9] Vitiliaro E. Global nonexistence theorems for a class of evolution equations with dissipation[J]. Arch Rational MechAnal,1999,149: 155-182.

[10] Todorova G. Cauchy problem for a nonlinear wave with nonlinear damping and source terms[J]. C R Acad Sci Paris Ser I,1998,326: 191-196.

[11] Ye Yaojun. Global existence and blow-up of solutions for higher-order viscoelastic wave equation with a nonlinear source term[J]. Nonlinear Analysis-Theory Methods & Applications,2015,112:129-146.

[12] Ye Yaojun. Global existence and energy decay estimate of solutions for a higher-order Kirchhoff type equation with damping and source term[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications,2013,14:2059-2067.

[13] Ye Yaojun. Existence of Local Solutions of Nonlinear Wave Equations in n-Dimensional Space[J]. Bull Belg Math Soc Simon Stevin, 2013,20:245-252.

[14] Ye Yaojun. Global existence and asymptotic stability for coupled nonlinear Klein-Gordon equations with nonlinear damping terms[J]. Dynamical Systems,2013,28:287-298.

[15] Ye Yaojun. Global existence and nonexistence of solutions for coupled nonlinear wave equations with damping and source terms[J]. Bull Korean Math Soc,2014,51:1697-1710.

[16] Sattinger D H. On global solutions for nonlinear hyperbolic equations[J]. Arch Rational Mech Anal,1968,30:148-172.

Existence of Global Solution for a Class of Nonlinear Damping Petrovsky Equation

CHEN Zhen[1], SUN Yumei[2], WANG Rui[1]

(1. Department of Information and Management Science, Henan Agricultural University, Zhengzhou 450002, China;
2. Luoyang Institute of Science and Technology, Luoyang 471023,China)

Abstract: The initial boundary value problem on a nonlinear damping Petrovsky equation $u_{tt}+\Delta^2 u+a(1+|u_t|^r)u_t=b|u|^p u$ with bounded region is studied. With potential well theory, and applying the invariance of the stable set and boundedness principle, this article proved the existence of global solution of the Petrovsky equation through defining the depth of potential well and the stable set.

Keywords: Petrovsky equation; stable set; global solution