

具有年龄结构的种群扩散系统反问题的数值解

辛志贤¹, 张启敏^{1,2}, 哈金才¹

(1. 北方民族大学 数学与信息科学学院, 银川 750021;

2. 宁夏大学 数学与计算机学院, 银川 750021)

摘要: 研究了一类具有年龄结构的种群扩散系统反问题的数值解. 对原系统变形后建立了具有高精度的四阶 Pade 差分格式来计算种群的密度和扩散系数, 该格式的截断误差为 $O(\tau^2 + h^4)$ 并且无条件稳定, 所得结果能更准确的描述种群密度和扩散系数. 数值算例验证了方法的精确性和可靠性.

关键词: 年龄结构; 种群扩散系统; 反问题; 四阶 Pade 格式

中图分类号: O193

文献标志码: A

本文将研究如下具有年龄结构的种群扩散系统^[1]:

$$\begin{cases} \frac{\partial P(r,t,x)}{\partial t} + \frac{\partial P(r,t,x)}{\partial r} - k(t)\Delta P(t,t,x) = \\ -\mu_1(r,t)P(r,t,x) + f_1(r,t,x), Q_A = [0,A] \times Q, & (1) \\ P(0,t,x) = \int_0^A \beta_1(r,t)P(r,t,x)dr, [0,T] \times [0,1], & (2) \\ p(A,t,x) = 0, [0,T] \times [0,1], & (3) \\ P(r,0,x) = P_0(r,x), [0,A] \times [0,1], & (4) \\ P(r,t,0) = 0, [0,A] \times [0,T], & (5) \\ (r,t,1) = 0, [0,A] \times [0,T], & (6) \\ y(t,x) = \int_0^A P(r,t,x)dr, Q = [0,T] \times [0,1], & (7) \end{cases}$$

其中 $r \in [0, A], t \in [0, T], 0 < T < \infty, x \in [0, 1], P(r, t, x)$ 表示 t 时刻年龄为 r 的种群在空间位置 x 上的种群密度; $\beta_1(r, t)$ 表示年龄为 r 的雌性种群的生育率; $\mu_1(r, t)$ 表示年龄为 r 的种群的自然死亡率; Δ 表示空间向量 Laplace 算子; $k(t) > 0$ 是扩散系数; $f_1(r, t, x)$ 是外界环境的干扰, 如迁移、地震、海啸等.

具有年龄结构的种群扩散系统已被广泛研究. 例如, 文献[2]研究了与年龄相关的种群扩散的识别问题. 文献[3]讨论了与年龄相关的模糊随机种群扩散系统的数值解. 文献[4]针对带有年龄结构周期性反应扩散种群系统的空间动力学进行了分析. 然而, 在现实生活中, 种群的扩散系数往往很难测出, 但反问题的引入对于求解扩散系数具有很大帮助^[5-11]. 本文针对种群扩散系统(1)~(7)式, 添加附加条件:

$$P(r, t, x^*) = E_1(r, t), (r, x) \in [0, A] \times [0, T], \quad (8)$$

其中, x^* 是区间 $[0, 1]$ 内固定的一点, $P(r, t, x^*)$ 表示 t 时刻年龄为 r 的种群在空间位置 x^* 上的种群密度; 在方程(1)~(8)式中, $\mu_1(r, t), \beta_1(r, t), f_1(r, t, x), P_0(r, x), E_1(r, x), F_1(r, x)$ 为已知函数, $P(r, t, x)$ 和 $k(x)$ 为未知函数.

另一方面, 关于种群的扩散系数反问题, 很难求出其解析解, 因此对其数值解的研究就显得尤为重要^[12-13]. 本文给出方程(1)~(8)式的扩散系数和四阶 Pade 数值解, 与传统差分格式相比具有很好的收敛性,

收稿日期: 2015-10-07; 修改日期: 2016-06-10.

基金项目: 国家自然科学基金(11461053; 11261043); 宁夏自然科学基金(NZ15104).

作者简介(通信作者): 张启敏(1964—), 女, 宁夏银川人, 宁夏大学教授, 博士生导师, 研究方向为应用概率统计与非线性动力系统, E-mail: zhangqimin64@sina.com.

并且无条件稳定. 最后, 通过数值算例对本文结论进行了验证.

1 预备知识

系统定义在如下空间中, 空间位置 $x \in [0, 1]$, 并令 $V = H^1[0, 1] = \{ \varphi \mid \varphi \in L^2([0, 1]), \frac{\partial \varphi}{\partial x} \in L^2([0, 1]) \}$, 其中 $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ 是广义函数意义下的偏导数, V 是 Q 的一阶 Sobolev 空间.

对于具有年龄结构的种群扩散系统(1) ~ (8) 式, 首先可以得到 $\forall r \geq A, P(r, t, x) = 0$. 根据方程(7) 式, 对方程(1) 式和(4) 式关于 r 在 $[0, A]$ 上积分, 可得如下不包含年龄的简化系统:

$$\begin{cases} \frac{\partial y(t, x)}{\partial t} - k(x)\Delta y(t, x) + \mu(t)y(t, x) - \beta(t)y(t, x) = f(t, x), [0, T] \times (0, 1], & (9) \\ y(0, x) = y_0(x), x \in [0, 1], & (10) \\ y(t, 0) = 0, t \in [0, T], & (11) \\ y(t, 1) = 0, t \in [0, T], & (12) \\ y(t, x^*) = E(t), x \in [0, 1], & (13) \end{cases}$$

其中, $\beta(t) \equiv (\int_0^A \beta_1(r, t)P(r, t, x)dr)(\int_0^A P(r, t, x)dr)^{-1}$, 表示种群在 t 时刻的出生率, $\mu(t) \equiv (\int_0^A \mu_1(r, t)P(r, t, x)dr)(\int_0^A P(r, t, x)dr)^{-1}$, 表示种群在 t 时刻的死亡率, $\int_0^A P(r, t, x)dr$ 是种群在 t 时刻空间位置 x 处的种群总量, $f(t, x) \equiv \int_0^A f_1(r, t, x)dr, E(x) \equiv \int_0^A E_1(r, x)dr$.

由方程(9) 式和(13) 式可得

$$E'(t) = E_t(t, x^*) = k(t)\Delta y(t, x^*) - \mu(t)y(t, x^*) + \beta(t)y(t, x^*) + f(t, x^*), t \in (0, T]. \quad (14)$$

假设 $\Delta y(t, x^*) \neq 0$, 则

$$k(t) = \frac{y_t(t, x^*) + \mu(t)y(t, x^*) - \beta(t)y(t, x^*) - f(t, x^*)}{\Delta y(t, x^*)}. \quad (15)$$

将方程(15) 式代入(9) 式, 则方程(1) ~ (8) 式可等价的转化为如下问题:

$$\begin{cases} y_t(t, x) = \frac{y_t(t, x^*) + \mu(t)y(t, x^*) - \beta(t)y(t, x^*) - f(t, x^*)}{\Delta y(t, x^*)} \Delta y(t, x) - \\ \mu(t)y(t, x) + \beta(t)y(t, x) + f(t, x), & (16) \\ y(0, x) = y_0(x), & (17) \\ y(t, 0) = 0, & (18) \\ y(t, 1) = 0. & (19) \end{cases}$$

对方程(16) 式两边同时作用 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, 并令

$$v(t, x) = y_{xx}(t, x), \quad (20)$$

可得

$$\begin{cases} v_t(t, x) = \frac{E_t(t) + \mu(t)E(t) - \beta(t)E(t) - f(t, x^*)}{v(t, x^*)} v_{xx}(t, x) - \\ \mu(t)v(t, x) + \beta(t)v(t, x) + f_{xx}(t, x), & (21) \\ v(0, x) = y_0''(x), & (22) \\ v(t, 0) = 0, & (23) \\ v(t, 1) = 0. & (24) \end{cases}$$

通过上述的一系列变形得到的方程(21) ~ (24) 式便于多种差分格式的建立.

2 差分格式的建立

为使用有限差分方法求数值解,先对区域 $[0, T] \times [0, 1]$ 作如下剖分:将时间区域 $[0, T]$ 划分为 N 等分,空间区域 $[0, 1]$ 划分为 M 等分,并记 $\tau = T/N, t_n = n\tau, 0 \leq n \leq N, h = 1/M, x_i = ih, 0 \leq i \leq M$. 节点上的函数值 $y(t_{n+1}, x_{i-1}), y(t_{n+1}, x_i), y(t_{n+1}, x_{i+1}), y(t_n, x_{i-1}), y(t_n, x_i), y(t_n, x_{i+1})$ 的有限差分分别被记为 $y_{i-1}^{n+1}, y_i^{n+1}, y_{i+1}^{n+1}, y_{i-1}^n, y_i^n, y_{i+1}^n$. 下面分别给出方程(21)式的常用差分格式和高精度差分格式.

2.1 常用有限差分格式

方程(16式)的变形方程(21)式的常用差分方法有向前差分、向后差分、Crank-Nicolson格式及第一类Saul'yev格式,具体格式如下.

向前差分的具体格式为:
$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} = \frac{Q^n}{h^2 v(t_n, x^*)} \delta_x^2 v_i^n - \mu(t_n) v_i^n + \beta(t_n) v_i^n + f_{xx}(t_n, x_i),$$
其中 $\delta_x^2 v_i^n = v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n, Q^n = E'(t_n) + \mu(t_n)E(t_n) - \beta(t_n)E(t_n) - f(t_n, x^*)$.

向前差分格式的截断误差为 $O(\mu + h^2)$. 在时间方向上是显示的一阶方法,该差分格式属于条件稳定.

向后差分的具体格式为:
$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} = \frac{Q^{n+1}}{h^2 v(t_{n+1}, x^*)} \delta_x^2 v_i^{n+1} - \mu(t_{n+1}) v_i^{n+1} + \beta(t_{n+1}) v_i^{n+1} + f_{xx}(t_{n+1}, x_i),$$
其中 $\delta_x^2 v_i^{n+1} = v_{i+1}^{n+1} - 2v_i^{n+1} + v_{i-1}^{n+1}, Q^{n+1} = E'(t_{n+1}) + \mu(t_{n+1})E(t_{n+1}) - \beta(t_{n+1})E(t_{n+1}) - f(t_{n+1}, x^*)$.

向后差分格式的截断误差为 $O(\tau + h^2)$. 在节点处是无条件稳定的. 向后差分格式构成的线性代数方程组的系数矩阵是三对角矩阵,因此可用追赶法求解.

Crank-Nicolson差分方法的具体格式为:

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} = \frac{1}{2} \left[\frac{Q^{n+1}}{h^2 v(t_{n+1}, x^*)} \delta_x^2 v_i^{n+1} + \frac{Q^n}{h^2 v(t_n, x^*)} \delta_x^2 v_i^n - \mu(t_{n+1}) v_i^{n+1} + \beta(t_{n+1}) v_i^{n+1} + f_{xx}(t_{n+1}, x_i) - \mu(t_n) v_i^n + \beta(t_n) v_i^n + f_{xx}(t_n, x_i) \right].$$

Crank-Nicolson格式与向后差分格式类似,所构成的线性方程组的系数矩阵也是三对角矩阵,可用追赶法求解. 该格式的局部截断误差是 $O(\tau^2 + h^2)$. 在节点处也是无条件稳定.

第一类Saul'yev差分方法的具体格式为:

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} = \frac{1}{2} \left[\frac{Q^{n+1}}{h^2 v(t_{n+1}, x^*)} (v_{i-1}^{n+1} - v_i^{n+1}) + \frac{Q^n}{h^2 v(t_n, x^*)} (v_{i+1}^n - v_i^n) - \mu(t_{n+1}) v_i^{n+1} + \beta(t_{n+1}) v_i^{n+1} + f_{xx}(t_{n+1}, x_i) - \mu(t_n) v_i^n + \beta(t_n) v_i^n + f_{xx}(t_n, x_i) \right].$$

第一类Saul'yev差分格式利用 $y(t_n, x_i)$ 关于 t 的差商逼近 y_t ,利用 $y(t_n, x_i)$ 在第 $n+1$ 层和第 n 层的关于 x 的非对称形式二阶差商逼近 y_{xx} . 该格式是非对称格式,当从左向右进行计算时,该格式是显式的,第一类Saul'yev差分格式的截断误差为 $O(\tau + h)$.

2.2 高精度有限差分格式

下面采用一种高精度的差分格式,即四阶Pade格式对方程进行离散,有

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} = \frac{1}{2} \left[\frac{Q^{n+1}}{h^2 v(t_{n+1}, x^*)} \frac{\delta_x^2}{1 + \frac{\delta_x^2}{12}} v_i^{n+1} + \frac{Q^n}{h^2 v(t_n, x^*)} \frac{\delta_x^2}{1 + \frac{\delta_x^2}{12}} v_i^n - \mu(t_{n+1}) v_i^{n+1} + \beta(t_{n+1}) v_i^{n+1} + f_{xx}(t_{n+1}, x_i) - \mu(t_n) v_i^n + \beta(t_n) v_i^n + f_{xx}(t_n, x_i) \right], \quad (25)$$

对(25)式两边同时作用 $(1 + \frac{\delta_x^2}{12})$,得到

$$\left[1 + \frac{\mu(t_{n+1})\tau - \beta(t_{n+1}t)}{2} (1 + \frac{\delta_x^2}{12}) - \frac{Q^{n+1}\tau}{2h^2 v(t_{n+1}, x^*)} \delta_x^2 \right] v_i^{n+1} = \left[1 - \frac{\mu(t_n\tau) - \beta(t_n\tau)}{2} (1 + \frac{\delta_x^2}{12}) + \frac{Q^n\tau}{2h^2 v(t_n, x^*)} \delta_x^2 \right] v_i^n + \frac{\tau}{2} (1 + \frac{\delta_x^2}{12}) [f_{xx}(t_{n+1}, x_i) + f_{xx}(t_n, x_i)], \quad (26)$$

该差分格式在时间上是二阶精度,在空间上是四阶精度,然而, $v(t, x^*)$ 没有明确定义,为得到一个全局的四阶精度,根据 x^* 的不同位置,对 $v(t_n, x^*)$ 进行如下 4 种情况的逼近.

第 1 种:如果 $x^* = x_i$, 其中, $1 \leq i \leq M-1$, 则 x^* 是网格节点,有 $v(t_{n+1}, x^*) = v_i^{n+1}$, $v(t_n, x^*) = v_i^n$.

第 2 种:如果 $x^* \in (x_0, x_1)$, 则存在 $\alpha \in (0, 1)$, $x^* = x_0 + \alpha h$. 其中 $v(x^*, t)$ 为

$$v(t, x^*) = c_1 v(t, x_0) + c_2 v(t, x_1) + c_3 v(t, x_2) + c_4 v(t, x_3), \quad (27)$$

其中, c_1, c_2, c_3 和 c_4 为需要确定的系数. $x_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 可以改写为

$$x_0 = x^* - \alpha h, x_1 = x^* + (1 - \alpha)h, x_2 = x^* + (2 - \alpha)h, x_3 = x^* + (3 - \alpha)h.$$

在 x^* 处对 $v(t, x_i)$ 用 Taylor 公式展开,得到

$$\begin{cases} v(t, x_0) = v(t, x^*) - \alpha h v_x(t, x^*) + \frac{\alpha^2 h^2}{2} v_{xx}(t, x^*) - \frac{\alpha^3 h^3}{6} v_{xxx}(t, x^*) + O(h^4), \\ v(t, x_1) = v(t, x^*) + (1 - \alpha)h v_x(t, x^*) + \frac{(1 - \alpha)^2 h^2}{2} v_{xx}(t, x^*) - \frac{(1 - \alpha)^3 h^3}{6} v_{xxx}(x^*, t) + O(h^4), \\ v(t, x_2) = v(t, x^*) + (2 - \alpha)h v_x(t, x^*) + \frac{(2 - \alpha)^2 h^2}{2} v_{xx}(t, x^*) - \frac{(2 - \alpha)^3 h^3}{6} v_{xxx}(t, x^*) + O(h^4), \\ v(t, x_3) = v(t, x^*) + (3 - \alpha)h v_x(t, x^*) + \frac{(3 - \alpha)^2 h^2}{2} v_{xx}(t, x^*) - \frac{(3 - \alpha)^3 h^3}{6} v_{xxx}(t, x^*) + O(h^4). \end{cases}$$

将上述 Taylor 展式代入方程(27)式,忽略四阶截断误差 $O(h^4)$, 并使方程中含 $v(x^*, t), v_x(x^*, t), v_{xx}(x^*, t), v_{xxx}(x^*, t)$ 项两端系数分别相等,得到如下线性方程组:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1, \\ -\alpha h c_1 + (1 - \alpha)h c_2 + (2 - \alpha)h c_3 + (3 - \alpha)h c_4 = 0, \\ \frac{\alpha^2 h^2}{2} c_1 + \frac{(1 - \alpha)^2 h^2}{2} c_2 + \frac{(2 - \alpha)^2 h^2}{2} c_3 + \frac{(3 - \alpha)^2 h^2}{2} c_4 = 0, \\ -\frac{\alpha^3 h^3}{6} c_1 + \frac{(1 - \alpha)^3 h^3}{6} c_2 + \frac{(2 - \alpha)^3 h^3}{6} c_3 + \frac{(3 - \alpha)^3 h^3}{6} c_4 = 0, \end{cases} \quad (28)$$

通过求解线性方程组可得系数 c_1, c_2, c_3, c_4 的值.

第 3 种:若 $x^* \in (x_{M-1}, x_M)$, 逼近过程同上.

第 4 种:如果 $x_1 \leq x^* \leq x_{M-1}$, 则存在整数 l 使得 $x^* \in (x_l, x_{l+1})$, 并且 x_l 和 x_{l+1} 均为网格节点, 所以存在 $\alpha \in (0, 1)$ 使得 $x^* = x_l + \alpha h$. 因此 $v(t, x^*)$ 的线性逼近为:

$$v(t, x^*) = c_1 v(t, x_{l-1}) + c_2 v(t, x_l) + c_3 v(t, x_{l+1}) + c_4 v(t, x_{l+2}).$$

类似的,根据 Taylor 公式将 $v(t, x_{l-1}), v(t, x_l), v(t, x_{l+1}), v(t, x_{l+2})$ 在 $x = x^*$ 处展开,可以得到系数 c_1, c_2, c_3, c_4 的值.

对 $v(t, x^*)$ 采用四阶逼近,得到如下格式:

$$\begin{aligned} & \left[\left(1 + \frac{\mu(t_{n+1})\tau - \beta(t_{n+1})\tau}{2} \right) \left(1 + \frac{\delta_x^2}{12} \right) - \frac{Q^{n+1}\tau}{2h^2 \left(\sum_{j=1}^4 c_j v(x_{l+k-2}, t_{n+1}) \right)} \delta_x^2 \right] v_i^{n+1} = \\ & \left[\left(1 - \frac{\mu(t_n)\tau - \beta(t_n)\tau}{2} \right) \left(1 + \frac{\delta_x^2}{12} \right) + \frac{Q^n\tau}{2h^2 \left(\sum_{j=1}^4 c_j v(x_{l+k-2}, t_n) \right)} \delta_x^2 \right] v_i^n + \\ & \frac{\tau}{2} \left(1 + \frac{\delta_x^2}{12} \right) [f_{xx}(t_{n+1}, x_i) + f_{xx}(t_n, x_i)]. \end{aligned} \quad (29)$$

最后,要根据 $v(t, x)$ 的数值解反解出 $y(t, x)$, 需要求解如下方程:

$$\begin{cases} y_{xx}(t, x) = v(t, x), \\ y(t, 0) = 0, \\ y(t, 1) = 0, \end{cases} \quad (30)$$

类似的,应用四阶 Pade 格式逼近 y_{xx} , 可以得到 $\frac{\delta_x^2}{h^2(1 + \frac{\delta_x^2}{12})} y_i^n = v_i^n$, 整理得 $y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n = \frac{h^2}{12}(v_{i+1}^n +$

$10v_i^n + v_{i+1}^n$).

3 数值算例

本节利用上面构造的差分格式考虑如下模型,令方程(9) ~ (13) 式中

$$\mu(t) = \frac{1}{6}, \beta(t) = \frac{1}{6}, f(t, x) = 0, x^* = 0.2, y_0(x) = \sin(\pi x), E(t) = e^{-\pi^2 t} \sin(0.2\pi),$$

该问题的解析解和扩散系数分别为: $y(t, x) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x), k(t) = 1$. 显然 $\forall t \in (0, T), x \in (0, 1)$, 有 $\Delta y(t, x) = -\pi^2 e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x) \neq 0$.

根据方程(21) ~ (24) 式可得

$$\begin{cases} k(t) = \frac{\pi^2 e^{-\pi^2 t} \sin(0.2\pi)}{v(t, x^*)}, \\ y_0''(x) = -\pi^2 e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x), \\ v(t, 0) = 0, \\ v(t, 1) = 0. \end{cases}$$

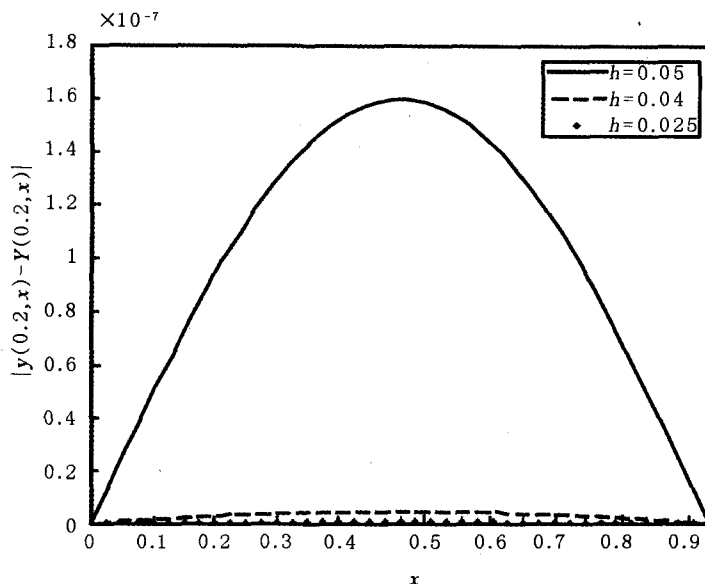


图1 函数 $y(0.2, x)$ 在不同空间步长 h 下的误差曲线

图1给出了采用四阶 Pade 差分格式在时间步长 $\Delta t = 0.0001$, 空间步长 h 不同时的误差曲线. 其中, 函数 $y(0.2, x)$ 即函数 $y(t, x)$ 在 $t = 0.2$ 时刻的数值解, $Y(0.2, x)$ 是函数 $y(t, x)$ 在 $t = 0.2$ 时刻的解析解. 表1和表2分别表示函数 $y(0.5, x)$ 和扩散系数 $k(t)$ 的各种差分格式在部分节点处误差的绝对值.

表1 时间步长 $\Delta t = 0.001$, 空间步长 $h = 0.1$ 时 $y(0.5, x)$ 在部分空间位置的误差

x	精确解 y	向前差分误差	向后差分误差	C-N 格式误差	Saulyev1 格式误差	Pade 格式误差
0.1	3.060e-01	1.000e-05	3.930e-05	2.473e-04	2.850e-04	9.850e-08
0.2	5.820e-01	1.902e-05	7.480e-05	4.705e-04	2.291e-04	1.870e-07
0.3	8.011e-01	2.618e-05	1.029e-04	6.475e-04	2.479e-04	2.580e-07
0.4	9.417e-01	3.078e-05	1.210e-04	7.612e-04	1.773e-04	3.033e-07
0.5	9.902e-01	3.236e-05	1.273e-04	8.004e-04	8.920e-05	3.189e-07
0.6	9.417e-01	3.078e-05	1.210e-04	7.612e-04	7.600e-05	3.033e-07
0.7	8.011e-01	2.618e-05	1.029e-04	6.475e-04	1.037e-04	2.580e-07
0.8	5.820e-01	1.902e-05	7.480e-05	4.705e-04	1.897e-04	1.870e-07
0.9	3.060e-01	1.000e-05	3.930e-05	2.473e-04	2.570e-04	9.850e-08

由图1可知,函数 $y(t, x)$ 的四阶Pade格式在不同的空间步长 $h = 0.05, h = 0.04, h = 0.025$ 时的数值解均能很好的逼近其解析解,误差均低于 10^{-7} .

由表1可知,函数 $y(0.5, x)$ 向前差分格式的误差精度为 10^{-5} ,向后差分,Crank-Nicolson格式及第一类Saul'yev差分格式的误差为 10^{-4} ,而四阶Pade格式的误差为 10^{-7} ,具有较高的精度.

对于表2,函数 $k(t)$ 向前差分格式和Crank-Nicolson格式的误差精度为 10^{-2} ,向后差分格式的误差为 10^{-1} ,而四阶Pade格式明显具有较高的精度,为 10^{-5} .

在时间步长 $\Delta t = 0.001$,空间步长 $h = 0.1$ 时,对比5种差分格式运行的时间,由表3可知,第一类Saul'yev差分格式时间最短,为0.0076 s,四阶Pade格式运行时间最长,为0.1092 s.

综合以上分析,与向前差分格式,向后差分格式,Crank-Nicolson格式以及第一类Saul'yev差分格式相比,四阶Pade格式虽然运行时间较长,但精度有了明显的提高.

表2 时间步长 $\Delta t = 0.001$ 时 $k(t)$ 在部分时刻的误差

t	精确解 $k(t)$	向前差分误差	向后差分误差	C-N格式误差	Pade格式误差
0.1	1	1.5.0e-03	4.6e-03	1e-04	8.2e-05
0.2	1	1.7e-03	1.73e-02	7.9e-02	8.2e-05
0.3	1	1.6e-03	2.99e-02	1.59e-02	8.2e-05
0.4	1	4.8e-03	4.23e-02	2.38e-02	8.1e-05
0.5	1	8.1e-03	5.45e-02	3.17e-02	8.1e-05
0.6	1	1.13e-02	6.64e-02	3.95e-02	8.1e-05
0.7	1	1.45e-02	7.76e-02	4.72e-02	8.0e-05
0.8	1	1.78e-02	9.02e-02	5.49e-02	8.0e-05
0.9	1	2.1e-02	1.008e-01	6.25e-02	8.0e-05

表3 各差分格式运行时间

所需时间	向前差分	向后差分	C-N格式	Saul'yev1格式	Pade格式
T	0.0532	0.0089	0.0364	0.0076	0.1092

4 结 论

本文研究了一类具有年龄结构的种群扩散系统反问题的数值解.对原系统关于年龄进行积分后建立了一种高精度的四阶Pade差分格式,该格式与向前差分,向后差分,Crank-Nicolson格式及第一类Saul'yev差分格式相比,具有较高的精度,并且无条件稳定,能够更准确地反映系统的种群密度和扩散系数.为种群的最优控制提供了有效的工具.

致谢:感谢审稿人提出的宝贵修改意见.

参 考 文 献

- [1] 戴晓娟,张启敏.非线性随机种群的最优控制[J].昆明理工大学学报,2009,34(3):100-104.
- [2] Gabriella D B, Alfredo L. An identification problem in age-Dependent population diffusion[J]. Numerical Functional Analysis and Optimization, 2013, 34(1): 36-73.
- [3] 杨洪福,张启敏,申芳芳.与年龄相关的模糊随机种群扩散系统的数值解[J].模糊系统与数学,2015,29(1):74-82.
- [4] 王宗毅.一类带年龄结构周期型反应扩散种群系统的空间动力学[J].应用数学期,2014,37(2):343-355.
- [5] Liao Wenyuan, Mehdi D, Akbar M. Direct numerical method for an inverse problem of a parabolic parical differential equation[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 3232: 351-360.
- [6] Liu Songshu, Feng Lixin. A modified kernel method for atime-fractional inverse diffusion problem[J]. Advances in Difference Equations, 2015, 342: 1-11.
- [7] Abeeb A A, Ryad A G, Nasser-eddine T. Artificial boundary condition for a modifiedfractional diffusion problem[J]. Boundry Value Problems, 2015, 20: 1-17.
- [8] Ebru O, Ali D. Inverse problem for a time-fractionalparabolic equation[J]. Journal of Inequalities, 2015, 81: 1-9.

- [9] Xiao Cuie. Optimization method for the inverse coefficient problem of a parabolic equation[J]. *Procedia Engineering*, 2011, 15: 4880-4884.
- [10] Fabien T, Prabir D, Oscar O. On an inverse problem; Recovering of non-smooth solutions to backward heat equation[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2012, 36: 4003-4019.
- [11] Yang Liu, Deng Zuicha, Yu Jianning, et al. Optimazation method for the inverse problem of reconstructing the souse term in a parabolic equation[J]. *Mathematics and Computers in Simulatin*, 2009, 80: 314-326.
- [12] 蒋小平,付娟,王旭. 迟后时滞系统 Pade 等效式的最佳阶次分析研究[J]. *计算机技术*, 2015, 15(2): 1671-1679.
- [13] 王慧蓉. 求解对流扩散方程的紧致 pade 逼近差分格式[J]. *数学的实践与认识*, 2015, 45(10): 286-289.

Numerical Method for an Inverse Problem of age-Dependent Population System with Diffusion

XIN Zhixian¹, ZHANG Qimin^{1,2}, HA Jincal¹

(1. School of Mathematics and Information Science, Beifang University for Nationalities, Yinchuan 750021, China;
2. School of Mathematics and Computer Science, Ningxia University, Yinchuan 750021, China)

Abstract: Numerical method for an inverse problem of age-dependent population systems with diffusion is studied in this paper. A forth-order Pade numerical algorithm is proposed to calculate the population and the diffusion coefficient after a series of original form changes. The forth-order Pade numerical algorithm is unconditionally stable and has a truncation error of $O(\tau^2 + h^4)$. The obtained results can reflect the population and the diffusion coefficient more accurately. Finally, a numerical example is presented to demonstrate the efficiency and accuracy of the numerical method.

Keywords: age-structured; population system with diffusion; inverse problem; forth-order Pade numerical algorithm