文章编号:1000-2367(2022)04-0060-05　　DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2022.04.009

Hartree 方程的低正则算法

李雪,李新彤

(天津大学 应用数学中心,天津 300072)

摘　要:构建了一种 Fourier 积分器来求解非线性 Hartree 方程,这种指数型积分器是显式的,且可通过快速 Fourier 变换实现一阶收敛.通过严格的分析,证明对任意的 $\gamma > \frac{d}{2}$,该格式对于 $H^{\gamma+1}$ 空间中的任何初始数据都提供了一阶精度.即,固定时间 T,存在常数 $C = C(T, \| u \|_{L^\infty([0,T];H^{\gamma+1})}) > 0$,使得 $\| u^n - u(t_n) \|_{H^\gamma(\boldsymbol{T}^d)} \leq C\tau$,其中 u^n 为在 $t_n = n\tau$ 处的数值解.

关键词: Hartree 方程;一阶收敛;指数型积分器;低正则性

中图分类号:O241.4　　**文献标志码:**A

在这篇文章中,考虑 Hartree 方程:

$$\begin{cases} \mathrm{i}\partial_t u(t,x) + \Delta(t,x) = (|x|^{-1} * |u|^2)u(t,x), t > 0, x \in \boldsymbol{T}^d, \\ u(0,x) = u_0(x), x \in \boldsymbol{T}^d, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{T}^d = (0,2\pi)^d$,$u = u(t,x)$:$\mathbf{R}^+ \times \boldsymbol{T}^d \to \mathbf{C}$,$u_0 \in H^\gamma(\boldsymbol{T}^d)(\gamma \geq 0)$ 为给定的初值. 非线性 Hartree 方程在量子理论中有非常广泛的应用,它描述了量子力学中多玻色子系统场方程的经典极限[1].因此自提出以来就备受研究者关注,并已经有了大量理论研究成果[2-3]和数值求解方法,包括有限元方法[4-5]、有限差分方法[6-7]和分割法[8-9]等.

上述数值方法都是基于精确解足够光滑的假设构造的,特别地,经典的 Strang Splitting 方法要求 $u_0 \in \mathscr{H}^{\gamma+2}$ 才能获得相应的数值解和真解之间的一阶收敛[10],即一阶精度需有两个导数损失.本文的目标是通过构造一类新的算法,使其一阶精度所要求的初值正则性更低.本文的算法构造基于指数型积分算法[8].相应的非线性 Schrödinger 方程的相关研究可见文献[11-13]及其参考文献.

定义函数 φ 如

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}, x \neq 0, \\ 1, x = 0, \end{cases}$$

并定义泛函

$$\psi(f) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau\Delta} f + \mathrm{i}\tau \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau\Delta}[|x|^{-1} * (\varphi(-2\mathrm{i}\tau\Delta)\overline{f} \cdot f) \cdot f].$$

给出如下算法,

$$\begin{cases} u^{n+1} = \psi(u^n), n = 0,1,\cdots,\dfrac{T}{\tau} - 1, \\ u^0 = u_0, \end{cases} \tag{2}$$

其中 u^n 为 u 在 $t = n\tau$ 时的数值解. 主要的定理为:

定理 1　设 v^n 为方程(1)满足格式(2)的解.对任意的 $\gamma \geq \frac{d}{2}$,若 $u_0 \in \mathscr{H}^{\gamma+1}$,则数值解(2)满足:给定 $\tau \geq$

收稿日期:2021-05-02;**修回日期:**2022-03-25.

基金项目:国家自然科学基金(11701418)

作者简介(通信作者):李雪(1992-),男,江西宜春人,天津大学硕士研究生,主要从事计算数学方面的研究,E-mail:2018233023@tju.edu.cn.

0，$\| u(t_n) - u^n \|_{\mathscr{H}^\gamma} \leq C\tau, n = 1, \cdots, \frac{T}{\tau}$，其中 $C = C(\| u_0 \|_{\mathscr{H}^{\gamma+1}}, T)$.

在定理 1 中，可得到一阶收敛性仅需损失一个导数，因此改进了 Strang Splitting 等方法获得的结果.

1　预备知识

下面提供一些有用的定义和性质.

使用 $A \lesssim B$ 或者 $B \gtrsim A$ 来表示 $A \leq CB$，对于某些绝对常数 $C > 0$.使用 $A \sim B$ 来表示 $A \lesssim B \lesssim A$.

定义 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为 L^2 内积，

$$\langle f, g \rangle = \mathrm{Re} \int_{\boldsymbol{T}^d} f(x) \overline{g(x)} \mathrm{d}x. \tag{3}$$

函数 f 在 $\boldsymbol{T}^d$ 上的 Fourier 变换定义为

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\boldsymbol{T}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k \cdot x} f(x) \mathrm{d}x, \tag{4}$$

Fourier 逆变换为

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k \cdot x} \hat{f}_k. \tag{5}$$

Fourier 变换常用性质

$$\| f \|_{L^2}^2 = 2\pi \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} | \hat{f}_k |^2. \tag{6}$$

$$(\widehat{fg})(k) = \sum_{k_1 \in \mathbf{Z}^d} \hat{f}_{k-k_1} \hat{g}_{k_1}. \tag{7}$$

Sobolev 空间 $H^\gamma(\boldsymbol{T}^d), \gamma \geq 0$ 的范数

$$\| f \|_{H^\gamma(\boldsymbol{T}^d)}^2 = 2\pi \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} (1 + k^2)^\gamma | \hat{f}_k |^2. \tag{8}$$

定义算子 J^s 为

$$J^s = (1 - \Delta)^{\frac{s}{2}}. \tag{9}$$

此外，定义算子 ∇^{-1}

$$\widehat{\nabla^{-1} f}(k) = \begin{cases} (\mathrm{i}k)^{-1} \hat{f}(k), \text{当 } k \neq 0, \\ 0, \text{当 } k = 0. \end{cases} \tag{10}$$

文中，将经常应用下面的 Kato-Ponce 不等式（简单版本），这最初是由文献[14]证明的，最近在端点处[15]取得了重要进展.

引理 1（Kato-Ponce 不等式）　对任意的 $\gamma > \frac{d}{2}, f, g \in H^\gamma$，有下面不等式成立

$$\| J^\gamma(fg) \|_{L^2} \lesssim \| f \|_{H^\gamma} \| g \|_{H^\gamma}. \tag{11}$$

2　收敛性分析

根据 Duhamel 公式，满足方程的解(1)有如下等式

$$u(t, x) = u(t_0) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t_0)\Delta} + \mathrm{i} \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-s)\Delta} (| x |^{-1} * | u |^2) u(s) \mathrm{d}s.$$

整理上式可得 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\Delta} u(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_0\Delta} u(t_0) + \mathrm{i} \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\Delta} (| x |^{-1} * | u |^2) u(s) \mathrm{d}s$.令 $v(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\Delta} u(t)$ 则有

$$v(t) = v(t_0) + \mathrm{i} \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\Delta} (| x |^{-1} * | \mathrm{e}^{\mathrm{i}s\Delta} v(s) |^2) \mathrm{e}^{\mathrm{i}s\Delta} v(s) \mathrm{d}s.$$

对上式做 Fourier 变换可得，

$$\hat{v}_k(t) = \hat{v}_k(t_0) + \mathrm{i}C \int_{t_0}^{t} \sum_{k = k_1 + k_2 + k_3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}s(|k|^2 + |k_1|^2 - |k_2|^2 - |k_3|^2)} \frac{\mathscr{F}\overline{v}_{k_1}(s) \hat{v}_{k_2}(s) \hat{v}_{k_3}(s)}{(k_1 + k_2)^{d-1}} \mathrm{d}s. \tag{12}$$

进一步可得

$$\hat{v}_k(t_{n+1})=\hat{v}_k(t_n)+\mathrm{i}C\int_{t_n}^{t_{n+1}}\sum_{k_1+k_2+k_3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(|k|^2+|k_1|^2-|k_2|^2-|k_3|^2)}\frac{\mathscr{F}\overline{v}_{k_1}(t_n)\hat{v}_{k_2}(t_n)\hat{v}_{k_3}(t_n)}{(k_1+k_2)^{d-1}}d_s+(\hat{\mathscr{R}_1^n})_k. \quad (13)$$

其中 $\hat{v}_k$ 为 $v(t)$ 的 Fourier 系数,余项 $\mathscr{R}_1^n$ 将在算法的设计中被舍弃.

令 $\tau=t_{n+1}-t_n$,并且记 $\phi=|k|+|k_1|-|k_2|-|k_3|=2|k_1|^2+2k_1k_2+2k_2k_3+2k_3k_1=\alpha+\beta$,其中 $\alpha=2|k_1|^2$,$\beta=2k_1k_2+2k_2k_3+2k_3k_1$. 于是有

$$\int_0^\tau \mathrm{e}^{\mathrm{i}s\Phi}d_s=\int_0^\tau \mathrm{e}^{\mathrm{i}s\alpha+\mathrm{i}s\beta}d_s=\frac{1}{\mathrm{i}\alpha}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau\alpha}-1)+\tau^2O(|\beta|)\triangleq\tau\varphi(\mathrm{i}\tau\alpha)+\tau^2O(|\beta|), \quad (14)$$

将(14)式带入(13)式,整理可得:

$$\hat{v}_k(t_{n+1})=\hat{v}_k(t_n)+\mathrm{i}C\sum_{k=k_1+k_2+k_3}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_n\phi}}{|k_1+k_2|^{d-1}}\mathscr{F}\overline{v}_{k_1}(t_n)\hat{v}_{k_2}(t_n)\hat{v}_{k_3}(t_n)\tau\varphi(2\mathrm{i}\tau|k_1|^2)+(\hat{\mathscr{R}_1^n})_k+(\hat{\mathscr{R}_2^n})_k. \quad (15)$$

其中,

$$(\hat{\mathscr{R}_2^n})_k=\mathrm{i}C\sum_{k=k_1+k_2+k_3}\frac{1}{|k_1+k_2|^{d-1}}\mathscr{F}\overline{v}_{k_1}(t_n)\hat{v}_{k_2}(t_n)\hat{v}_{k_3}(t_n)\tau^2O(|k_1||k_2|+|k_2||k_3|+|k_3||k_1|).$$

对(15)式逆 Fourier 变换得

$$v(t_{n+1})=v(t_n)+\mathrm{i}\tau\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_n\Delta}[|x|^{-1}*(\varphi(-2\mathrm{i}\tau\Delta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_n\Delta}\overline{v}(t_n)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_n\Delta}v(t_n)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_n\Delta}v(t_n))]+$$
$$\mathscr{R}_1^n+\mathscr{R}_2^n\triangleq\Phi(v(t_n))+\mathscr{R}_1^n+\mathscr{R}_2^n.$$

根据 ψ 和 Φ 的定义,有 $\psi(f)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau\Delta}\Phi(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau\Delta}f)$.忽略 $\mathscr{R}_1^n$,$\mathscr{R}_2^n$,得到数值算法(2).

3 定理 1 的证明

3.1 关于 $\mathscr{R}_1^n$ 和 $\mathscr{R}_2^n$ 的估计

引理 2 对于 $\mathscr{R}_1^n$,在 $\gamma>\dfrac{d}{2}$ 时,有以下估计

$$\|\mathscr{R}_1^n\|_{\mathscr{H}^\gamma}\leq C\tau^2\|v\|_{\mathscr{H}^\gamma}^5. \quad (16)$$

证明

$$(\hat{\mathscr{R}_1^n})_k=\mathrm{i}C\int_{t_n}^{t_{n+1}}\sum_{k=k_1+k_2+k_3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(|k|^2+|k|_1^2-|k|_2^2-|k|_3^2)}\cdot\frac{\mathscr{F}\overline{v}_{k_1}(s)\hat{v}_{k_2}(s)\hat{v}_{k_3}(s)-\mathscr{F}\overline{v}_{k_1}(t_n)\hat{v}_{k_2}(t_n)\hat{v}_{k_3}(t_n)}{(k_1+k_2)^{d-1}}\mathrm{d}s, \quad (17)$$

其中

$$\mathscr{F}\overline{v}_{k_1}(s)\hat{v}_{k_2}(s)\hat{v}_{k_3}(s)-\mathscr{F}\overline{v}_{k_1}(t_n)\hat{v}_{k_2}(t_n)\hat{v}_{k_3}(t_n)=(\mathscr{F}\overline{v}_{k_1}(s)-\mathscr{F}\overline{v}_{k_1}(t_n))\hat{v}_{k_2}(s)\hat{v}_{k_3}(s)+$$
$$(\hat{v}_{k_2}(s)-\hat{v}_{k_2}(t_n))\hat{v}_{k_2}(s)\hat{v}_{k_3}(t_n)+(\hat{v}_{k_3}(s)-\hat{v}_{k_3}(t_n))\hat{v}_{k_1}(t_n)\hat{v}_{k_2}(t_n).$$

则(17)式可以写成 $(\hat{\mathscr{R}_1^n})_k=(\hat{\mathscr{R}_{11}^n})_k+(\hat{\mathscr{R}_{12}^n})_k+(\hat{\mathscr{R}_{13}^n})_k$,且有

$$\mathscr{R}_{11}^n=\mathrm{i}C\int_{t_n}^{t_{n+1}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\Delta}|\nabla|^{-d+1}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\Delta}(\overline{v}(s)-\overline{v}(t_n))\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\Delta}v(s)]\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\Delta}v(t_n)\mathrm{d}s,$$

$$\mathscr{R}_{12}^n=\mathrm{i}C\int_{t_n}^{t_{n+1}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\Delta}|\nabla|^{-d+1}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\Delta}(v(s)-v(t_n))\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\Delta}\overline{v}(t_n)]\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\Delta}v(s)\mathrm{d}s,$$

$$\mathscr{R}_{13}^n=\mathrm{i}C\int_{t_n}^{t_{n+1}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\Delta}|\nabla|^{-d+1}[|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\Delta}v(t_n)|^2]\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\Delta}(v(s)-v(t_n))\mathrm{d}s.$$

只需计算其中一个估计,其他类似可得.

$$\|\mathscr{R}_{13}^n\|_{\mathscr{H}^\gamma}\leq C\int_{t_n}^{t_{n+1}}\||\nabla|^{-d+1}[|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\Delta}v(t_n)|^2]\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\Delta}(v(s)-v(t_n))\|_{\mathscr{H}^\gamma}\mathrm{d}s\leq$$
$$C\tau[\||\nabla|^{\gamma-d+1}|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\Delta}v(t_n)|^2\|_{L^2}\cdot\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\Delta}(v(s)-v(t_n))\|_{L^\infty}+$$
$$\||\nabla|^{-d+1}|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\Delta}v(t_n)|^2\|_{L^\infty}\cdot\||\nabla|^\gamma\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\Delta}(v(s)-v(t_n))\|_{L^2}]\leq$$
$$\tau[\|v(t_n)\|_{\mathscr{H}^{\gamma-d+1}}^2\cdot\|v(s)-v(t_n)\|_{\mathscr{H}^\gamma}+\|v(t_n)\|_{\mathscr{H}^{\gamma-d+1}}^2\cdot\|v(s)-$$

$$v(t_n)\|_{\mathscr{H}^\gamma}]\leq C\tau\|v(t_n)\|_{\mathscr{H}^\gamma}^2\cdot\|v(s)-v(t_n)\|_{\mathscr{H}^\gamma},\gamma\geq\frac{d}{2},\tag{18}$$

其中,有

$$v(s)-v(t_n)=\int_{t_n}^{t_{n+1}}\partial_t v(\xi)\mathrm{d}\xi,\mathrm{i}\partial_t v(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\Delta}(|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta}v(t)|^2*|x|^{-1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta}v(t).$$

于是

$$\|v(s)-v(t_n)\|_{\mathscr{H}_\gamma}\leq\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|v(\xi)\|_{\mathscr{H}_\gamma}^3\mathrm{d}\xi\leq\tau\|v(\xi)\|_{\mathscr{H}_\gamma}^3,\gamma>\frac{d}{2},\xi\in(t_n,t_{n+1}).$$

因此,(18)式可以写为

$$\|\mathscr{R}_1^n\|_{\mathscr{H}_\gamma}\leq C\tau^2\|v\|_{\mathscr{H}_\gamma}^5.$$

引理 3　对于 $\mathscr{R}_1^n$,在 $\gamma>\frac{d}{2}$ 时,有以下估计

$$\|\mathscr{R}_2^n\|_{\mathscr{H}\gamma}\leq C\tau^2\|v\|_{\mathscr{H}^{\gamma+1}}^3.\tag{19}$$

证明　不妨假设 $\mathscr{F}\bar{v}_k(t_n),\hat{v}_k(t_n)\geq 0$, $\|v\|_{\mathscr{H}_\gamma}=\sum_k|k|^\gamma|\hat{v}_k|^2$.

$$\hat{\mathscr{R}_2^n}\leq\mathrm{i}C\sum_{k=k_1+k_2+k_3}\frac{1}{|k_1+k_2|^{d-1}}\mathscr{F}\bar{v}_{k_1}(t_n)\hat{v}_{k_2}(t_n)\hat{v}_{k_3}(t_n)\tau^2(|k_1||k_2|+|k_2||k_3|+|k_3||k_1|).$$

上式逆傅立叶变换得

$$\mathscr{R}_2^n\leq\mathrm{i}C\tau^2(|\nabla|^{-d+1}(||\nabla|v|^2)v+|\nabla|^{-d+1}(|\nabla|\bar{v}v)|\nabla|v+|\nabla|^{-d+1}(\bar{v}|\nabla|v)|\nabla|v).$$

于是有

$$\begin{aligned}\|\mathscr{R}_2^n\|_{\mathscr{H}\gamma}\leq\||\nabla|^\gamma\mathscr{R}_2^n\|_{L^2}\leq C\tau^2(\||\nabla|^{\gamma-d+1}\|\nabla|v|^2\|_{L^2}\|v\|_{L^\infty}+\\ \||\nabla|^{-d+1}\|\nabla|v|^2\|_{L^\infty}\||\nabla|^\gamma v\|_{L^2}+\||\nabla|^{\gamma-d+1}(\bar{v}|\nabla|v)\|_{L^2}\||\nabla|v\|_{L^\infty}+\\ \||\nabla|^{-d+1}(\bar{v}|\nabla|v)\|_{L^\infty}\||\nabla|^{\gamma+1}v\|_{L^2}+\||\nabla|^{\gamma-d+1}(|\nabla|\bar{v}v)\|_{L^2}\||\nabla|v\|_{L^\infty}+\\ \||\nabla|^{-d+1}(|\nabla|\bar{v}v)\|_{L^\infty}\||\nabla|^{\gamma+1}v\|_{L^2})\leq C\tau^2\|v\|_{\mathscr{H}^{\gamma+1}}^3,\gamma>\frac{d}{2}.\end{aligned}\tag{20}$$

3.2　定理 1 的证明

接下来证明定理 1.

证明

$$\begin{aligned}v^{n+1}-v(t_{n+1})=\Phi(v^n)-v(t_{n+1})=\Phi(v^n)-\Phi(v(t_n))+\Phi(v(t_n))-v(t_{n+1})=\\ \Phi(v^n)-\Phi(v(t_n))-(\mathscr{R}_1^n+\mathscr{R}_2^n).\end{aligned}\tag{21}$$

根据引理 2 和引理 3 得如下误差估计

$$\|\Phi(v(t_n))-v(t_{n+1})\|_{\mathscr{H}_\gamma}\leq\|\mathscr{R}_1^n\|_{\mathscr{H}_\gamma}+\|\mathscr{R}_2^n\|_{\mathscr{H}_\gamma}\leq C\tau^2.\tag{22}$$

记 $\mathrm{e}_n=v(t_n)-v^n$,利用 Kato-Ponce 不等式可得稳定性估计

$$\begin{aligned}\|\Phi(v^n)-\Phi(v(t_n))\|_{\mathscr{H}_\gamma}=\|v^n-v(t_n)\|_{\mathscr{H}_\gamma}+\tau\||x|^{-1}((\varphi(-2\mathrm{i}\tau\Delta)\bar{v}^n\cdot v^n)v^n-\\ (\varphi(-2\mathrm{i}\tau\Delta)\bar{v}(t_n)\cdot v(t_n))v(t_n))\|_{\mathscr{H}_\gamma}\leq\|\mathrm{e}_n\|_{\mathscr{H}_\gamma}+C\tau(\|\mathrm{e}_n\|_{\mathscr{H}_\gamma}+\|\mathrm{e}_n\|_{\mathscr{H}_\gamma^3}).\end{aligned}$$

又因为 $\|\mathrm{e}_{n+1}\|_{\mathscr{H}_\gamma}\leq C\tau^2+(1+C\tau)\|\mathrm{e}_n\|_{\mathscr{H}_\gamma}+C\tau\|\mathrm{e}_n\|_{\mathscr{H}_\gamma}^3$. 由递归法和 Grownwall 不等式得 $\|\mathrm{e}_n\|_{\mathscr{H}_\gamma}\leq C\tau^2\sum_{j=0}^{\frac{T}{\tau}}(1+C\tau)^j\leq C\tau$.

由此,定理 1 得证.

参　考　文　献

[1]　GROSS E P.Dynamics of interacting bosons[M].New York:Gordon and Breech,1966.

[2]　CAZENAVE T,LIONS P L.Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations[J].Journal of Communications in Mathematical Physics,1982,85(4):549-561.

[3]　CHEN J,GUO B.Strong instability of standing waves for a nonlocal Schrödinger equation[J].Journal of Physica D:Nonlinear Phenome-

na,2007,227(2):142-148.

[4] AKSAN E,ÖZDEŞA.Numerical solution of Korteweg-de Vries equation by Galerkin B-spline finite element method[J].Applied Mathematics and Computation,2006,175(2):1256-1265.

[5] DUTTA R,KOLEY U,RISEBRO N H.Convergence of a higher order scheme for the Korteweg-de Vries equation[J].SIAM Journal on Numerical Analysis,2015,53:1963-1983.

[6] COURTÈS C,LAGOUTIÈRE F,ROUSSET F. Error estimates of finite difference schemes for the Korteweg-de Vries equation[J].IMA Journal of Numerical Analysis,2020,40:628-685.

[7] HOLDEN H,KOLEY U,RISEBRO N.Convergence of a fully discrete finite difference scheme for the Korteweg-de Vries equation[J]. IMA Journal of Numerical Analysis,2015,35(3):1047-1077.

[8] HOLDENH,LUBICH C,RISEBRO N H.Operator splitting for partial differential equations with Burgers nonlinearity[J].Mathematics of Computation,2012,82:173-185.

[9] HOLDEN H,KARLSEN K H,RISEBRO N H,et al.Operator splitting for the KdV equation[J].Mathematics of Computation,2011,80:821-846.

[10] HOCHBRUCK M,OSTERMANN A.Explicit exponential Runge-Kutta methods for semilinear parabolic problems[J].SIAM Journal on Numerical Analysis,2005,43:1069-1090.

[11] HOCHBRUCK M,OSTERMANN A.Exponential integrators[J].Acta Numerica,2010,19: 209-286.

[12] KNÖllER M,OSTERMANN A,SCHRATZ K.A Fourier integrator for the cubic nonlinear Schrödinger equation with rough initial data [J].SIAM Journal on Numerical Analysis,2019,57:1967-1986.

[13] LI Y,WU Y,YAO F.Convergence of an embedded exponential-type low-Regularity integrators for the kdV equation without loss of regularity[J].Annals of Applied Mathematics,2021(1):1-21.

[14] KATO T,PONCE G.Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations[J].Communications on Pure and Applied Mathematics,1988,41:891-907.

[15] OURGAIN B,LI J D.On an endpoint Kato-Ponce inequality[J].Differential Integral Equations,2014,27:1037-1072.

Low regular algorithm for Hartree equations

Li Xue, Li Xintong

(Center for Applied Mathematics, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: In this paper, a Fourier integrator is constructed to solve the nonlinear Hartree equation. This exponential integrator is explicit and can achieve first-order convergence by fast Fourier transform. Through rigorous analysis, we prove that for any $\gamma > \frac{d}{2}$, the format provides first-order accuracy for any initial data in $H^{\gamma+1}$ space. That is, for a fixed time of t, there is a constant of $C = C(T, \| u \|_{L^\infty([0,T];H^{\gamma+1})}) > 0$, so that $\| u^n - u(t_n) \|_{H^\gamma(\mathbf{T}^d)} \leq C\tau$, where u^n is the numerical solution at $t_n = n\tau$.

Keywords: Hartree equation; first-order convergence; exponential integrator; low regularity

[责任编校 陈留院 赵晓华]