

沙漏图线图的(无符号)拉普拉斯谱的刻画

秦正新^{1a}, 张文丽^{1b}, 王国平², 孟吉翔^{1a}

(1. 新疆大学 a. 数学与系统科学学院; b. 科学与技术学院, 乌鲁木齐 830046;

2. 新疆师范大学 数学科学学院, 乌鲁木齐 830054)

摘 要:沙漏图是在一条路的两个悬挂点上各粘上一个三角形而形成的图. 对于一个图 G , 若没有其他非同构的图和它是 L -同谱的或 Q -同谱的, 则它是由 L -谱, 或 Q -谱唯一确定的(G 简记为 DLS 或 DQS). 将利用讨论排除的方法来证明沙漏图的线图是由它的(无符号)拉普拉斯谱唯一确定的.

关键词:线图; 沙漏图; 拉普拉斯谱; 无符号拉普拉斯谱

中图分类号: O157.5

文献标志码: A

设 G 是一个连通的单图, 顶点集为 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 边集为 $E(G)$, 并且它的顶点数记为 $n(G)$, 它的边数记为 $m(G)$. 假设 $A(G)$ 和 $D(G)$ 分别为图 G 的邻接矩阵和度对角矩阵, 那么 $L(G) = D(G) - A(G)$ 为 G 的拉普拉斯矩阵, $Q(G) = D(G) + A(G)$ 为 G 的无符号拉普拉斯矩阵. 因为矩阵 $A(G)$, $L(G)$ 和 $Q(G)$ 都是实对称的, 所以它们的特征值都是实数. 令 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, $0 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$ 和 $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_n$ 分别为图 G 的邻接特征值, 拉普拉斯特征值和无符号拉普拉斯特征值. 图 G 的 A -谱(或 L -谱, Q -谱)是由邻接特征值(或拉普拉斯特征值, 无符号拉普拉斯特征值)构成. 若两图有相同的 A -谱(或 L -谱, Q -谱), 则它们为 A -同谱的(或 L -同谱的, Q -同谱的). 对于一个图 G , 若没有其他非同构的图和它是 A -同谱的(或 L -同谱的, Q -同谱的), 则它是由 A -谱(或 L -谱, Q -谱)唯一确定的(G 简记为 DAS , DLS 或 DQS). 寻找新的 DS 图是很有趣的. 设 $G_1 \vee G_2$ 为图 G_1 和 G_2 的并, 在阶为 r 的圈 C_r 上某一点粘上 $n-r$ 个悬挂点所得的图, 记为 $U_{r,n-r}$, 文献[1]等证明了若 G 是 DLS , 并且代数连通度小于 3, 那么在一定的条件下, $K_r \vee G$ 是 DLS , 并且当 $r \geq 3$, $U_{r,n-r}$ 是 DQS . 图 G 的线图 L_G 是将 G 的边作为顶点, 这些顶点相连当且仅当对应的边在 G 是相邻的. 假设 $H_{g,k}^n$ 是将顶点数为 g 的圈上的一个点和顶点数为 $k+1$ 的一条路上的一点粘合而成的含有 n 个点的棒棒糖图. 文献[2]证明除了 $g = k \geq 3$, $H_{g,k}^n$ 的线图是由它们的 Q -谱唯一确定的. 文献[3]给出了图 G_1 和正则图 G_2 的冠图的无符号拉普拉斯谱, 连通正则图 G_1 和正则图 G_2 的边冠图的无符号拉普拉斯谱. 文献[4]证明最大度超过 4 的星状树是由它们的拉普拉斯谱唯一确定的. 文献[5]确定最大度至少是 12 的星状树的线图是由它们的谱唯一确定的. 文献[6]得出对于任意的直径为 2 的连通图, 在拉普拉斯谱和无符号拉普拉斯谱之间有一个等价关系.

沙漏图是在一条路的两个悬挂点上各粘上一个三角形而形成的图. 本文将证明沙漏图的线图是由它的(无符号)拉普拉斯谱唯一确定的.

1 沙漏图的线图是 DLS

下面的结果来源于文献[7-8].

引理 1 假设 G 是含有 n 个顶点和 m 条边的图, 并且顶点 v_i 的度为 d_i . 那么有下面的结果:

收稿日期:2015-03-23;修回日期:2015-09-12.

基金项目:国家自然科学基金(11171283;11461071)

第 1 作者简介(通信作者):秦正新(1984-),男,江苏盐城人,新疆大学博士研究生,主要从事图论研究, E-mail: qinzheng.xin@163.com.

- 1) L_G 含有 m 个顶点和 $\frac{1}{2} \sum_i d_i^2 - m$ 条边;
- 2) L_G 中对应 G 中边 uv 的顶点的度为 $d(u) + d(v) - 2$;
- 3) 若 G 中没有孤立点, 那么 G 和 L_G 有相同个数的连通分支.

引理 2 对于任意的两个图 G 和 H , 若 $Spec_L(G) = Spec_L(H)$, 那么可以获得下面的结果:

- 1) $n(G) = n(H)$; 2) $m(G) = m(H)$; 3) $\omega(G) = \omega(H)$, 其中 $\omega(G)$ 为分支数; 4) $\tau(G) = \tau(H)$, $\tau(G)$ 为生成树的个数; 5) $\sum d_i^2(G) = \sum d_i^2(H)$, d_i 为顶点 v_i 的度.

多项式 $\Phi(G, \lambda) = \det(\lambda I - L(G))$ 是图 G 的拉普拉斯特征多项式, 其中 I 是单位矩阵.

引理 3^[9] 设 $\Phi(G, \lambda) = \sum_{i=0}^n q_i(G) \lambda^{n-i}$. 对于每一个 $i \in \{1, \dots, n\}$, 设 s_i 为 G 中含有 i 条边的生成森林的个数. 假设这些生成森林为 Θ_{i_f} ($1 \leq f \leq s_i$), 并且 $p(\Theta_{i_f})$ 为 Θ_{i_f} 中生成树的顶点数的积. 那么 $(-1)^i q_i = \sum_{f=1}^{s_i} p(\Theta_{i_f})$, $1 \leq i \leq n$. 进一步, 前 4 项系数为: $q_0(G) = 1$, $q_1(G) = -2m$, $q_2(G) = 2m^2 - m - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i^2$, $q_3(G) = \frac{1}{3}(-4m^3 + 6m^2 + 3(m-1) \sum_{i=1}^n d_i^2 - \sum_{i=1}^n d_i^3 + \text{tr}(A^3))$, 其中 $\text{tr}(A^3) = 6n_G(C_3)(n_G(C_3))$ 为 G 中三角形的个数).

定理 1 沙漏图的线图是 DLS.

证明 设 G 和 L_G 为图 1 所示, 并且将与图 L_G 相 L -同谱的图记为 H .

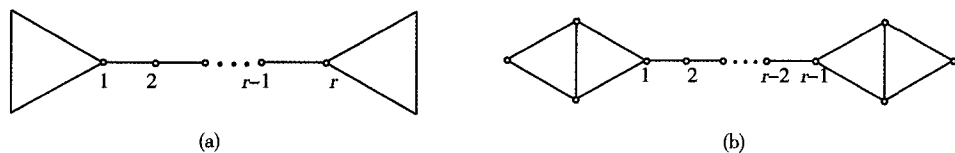


图1 (a) 一个沙漏图 G ; (b) 它的线图 L_G

由引理 1 和引理 2, L_G 和 H 均为连通的, $n(H) = n(L_G) = r + 5$, 并且若 $r = 1$, $m(H) = m(L_G) = r + 9$, 否则 $m(H) = m(L_G) = r + 8$. 设 n_i 为 H 中度为 i 的顶点的个数, 并且 Δ 为 H 中最大的度. 现在将下面分为 3 种情况来讨论.

情况 1 假设 $r = 1$. 那么 $L_G \cong G_1$, 如图 2 所示.

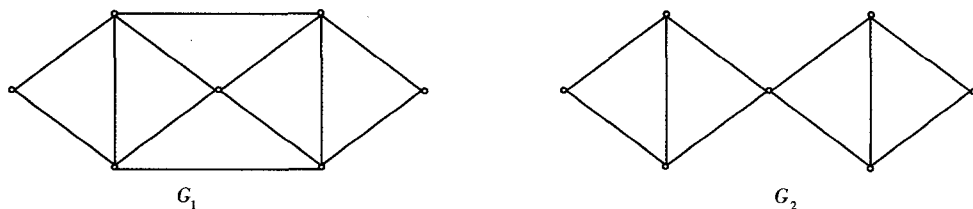


图2 图 G_1 和 G_2

现在 $n(H) = 6$, $m(H) = 10$, 因此有

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{\Delta} n_i = 6, & (1) \\ \sum_{i=1}^{\Delta} i n_i = 20, & (2) \\ \sum_{i=1}^{\Delta} i^2 n_i = 72. & (3) \end{cases}$$

从上面知道 $2n_3 + 6n_4 + 12n_5 + 20n_6 + 30n_7 \sum_{i=8}^{\Delta} (i-1)(i-2)n_i = 24$. 这表明 $n_i = 0, i = 7, 8, \dots, \Delta$, 所以 $n_3 + 3n_4 + 6n_5 + 10n_6 = 12$.

若 $n_6 = 1$, 那么 $n_4 = n_5 = 0, n_3 = 2$, 因此由(1)和(2)式, 有 $n_1 = -2, n_2 = 5$, 矛盾. 因此 $n_6 = 0$, 从而 $n_3 + 3n_4 + 6n_5 = 12$.

若 $n_5 = 2$, 那么 $n_3 = n_4 = 0$, 因此由(1)和(2)式, 有 $n_1 = -2, n_2 = 6$, 矛盾. 因此, $n_5 = 1$ 或者 $n_5 = 0$.

若 $n_5 = 1$, 有 3 种情况: 1) $n_4 = 2, n_3 = 0$; 2) $n_4 = 0, n_3 = 6$; 3) $n_4 = 1, n_3 = 3$.

由 1), 有 $n_1 = -1, n_2 = 4$, 矛盾; 从 2), 获得 $n_1 + n_2 = -1, n_1 + 2n_2 = -3$, 矛盾; 由 3), 得到 $n_1 = 0, n_2 = 1$, 因此 3) 成立. 这表明, H 含有度序列 $\{2^1, 3^3, 4, 5\}$. 因此这证明 H 与图 3 中的图同构.

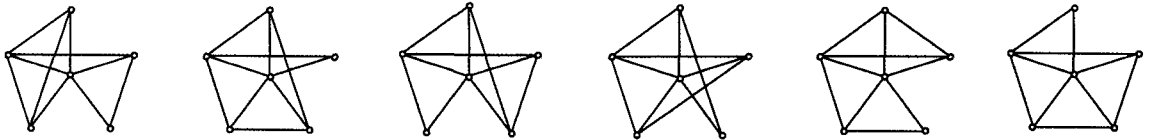


图3 与H同构的图

使用 MATLAB, 知道图 3 中的这些图与图 G_1 有不同的邻接特征根. 因此 $H \not\cong G_1$.

若 $n_5 = 0$, 有 5 种情形: 1) $n_4 = 3, n_3 = 3$; 2) $n_4 = 2, n_3 = 6$; 3) $n_4 = 1, n_3 = 9$; 4) $n_4 = 0, n_3 = 12$; 5) $n_4 = 4, n_3 = 0$.

由 1), 有 $n_1 = 1, n_2 = -1$, 矛盾; 由 2), 获得 $n_4 + n_3 = 8 > 6$, 矛盾; 由 3), 得到 $n_4 + n_3 = 10 > 6$, 矛盾; 由 4), 得到 $n_4 + n_3 = 12 > 6$, 矛盾; 由 5), 看到 $n_1 = 0, n_2 = 2$, 因此 5) 成立. 这表明 H 含有度序列 $\{2^2, 4^4\}$. 由引理 2.3, H 有 6 个三角形. 所以 $H \cong G_1$, 因此 G_1 为 DLS.

情况 2 假设 $r = 2$. 那么 $L_G \cong G_2$, 如图 2 所示. 现在 $n(H) = 7, m(H) = 10$, 有

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{\Delta} n_i = 7, & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{\Delta} in_i = 20, & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{\Delta} i^2 n_i = 60. & (6) \end{cases}$$

从上面得到 $2n_3 + 6n_4 + 12n_5 + 20n_6 + \sum_{i=7}^{\Delta} (i-1)(i-2)n_i = 14$. 这表明 $n_i = 0, i = 6, 7, \dots, \Delta$, 所以 $n_3 + 3n_4 + 6n_5 = 7$.

若 $n_5 = 1$, 那么 $n_4 = 0, n_3 = 1$, 因此由(4)和(5)式, 有 $n_1 = -2, n_2 = 7$, 矛盾. 所以 $n_5 = 0$. 为此有 3 种情形:

1) $n_4 = 2, n_3 = 1$; 2) $n_4 = 0, n_3 = 7$; 3) $n_4 = 1, n_3 = 4$.

由 1), 有 $n_1 = -1, n_2 = 5$, 矛盾; 由 2), 获得 $n_1 = 1, n_2 = -1$, 矛盾; 由 3) 有 $n_1 = 0, n_2 = 2$, 因此 3) 成立. 这表明 H 含有度序列 $\{2^2, 3^4, 4\}$. 由引理 3, H 含有 4 个三角形, 这表明 H 与图 4 中的图同构.

但是图 4 与图 G_2 含有不同个数的生成树. 由引理 2, $H \not\cong G_2$, 因此 G_2 是 DLS.

情况 3 假设 $r \geq 3$. 现在 $n(H) = r + 5, m(H) = r + 8$, 因此有

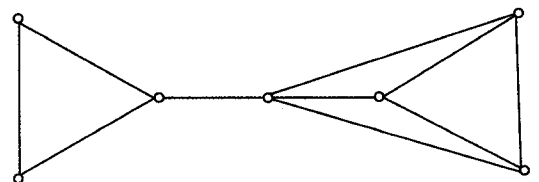


图4 与图H同构的图

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{\Delta} n_i = r + 5, & (7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{\Delta} i n_i = 2(r + 8), & (8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{\Delta} i^2 n_i = 4r + 50. & (9) \end{cases}$$

从上面得到 $2n_3 + 6n_4 + 12n_5 + 20n_6 + \sum_{i=7}^{\Delta} (i-1)(i-2)n_i = 12$. 这表明 $n_i = 0, i = 6, 7, \dots, \Delta a$, 所以 $n_3 + 3n_4 + 6n_5 = 6$.

若 $n_5 = 1$, 那么 $n_4 = n_3 = 0$, 因此由(7)和(8)式, 有 $n_1 = -3, n_2 = r + 7$, 矛盾. 所以 $n_5 = 0$. 为此有 3 种情形: 1) $n_4 = 2, n_3 = 0$; 2) $n_4 = 1, n_3 = 3$; 3) $n_4 = 0, n_3 = 6$.

由 1), 获得 $n_1 = -2, n_2 = r + 5$, 矛盾; 由 2), 得到 $n_1 = -1, n_2 = r + 2$, 矛盾; 由 3), 有 $n_1 = 0, n_2 = r - 1$, 因此 3) 成立.

这表明 H 含有度序列 $\{2^{r-1}, 3^6\}$. 由引理 3, H 含有 4 个三角形, 这表明 H 和图 5 中的图相似.

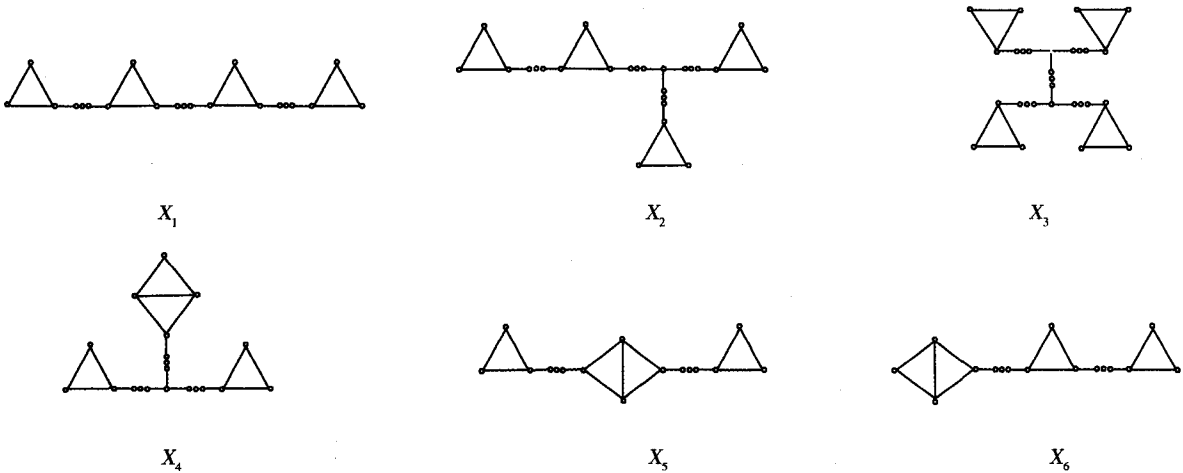


图5 与H同构的图

但是它们都比图 L_G 含有更多的生成树, 因此由引理 2, $H \not\cong L_G$. 所以 L_G 是 DLS.

2 沙漏图的线图是 DQS

引理 4^[10] 假设 G 和 H 为两个满足 $Spec_Q(G) = Spec_Q(H)$ 的图. 那么:

1) $n(G) = n(H), m(G) = m(H), \sum d_i^2(G) = \sum d_i^2(H)$; 2) $\sum_{i=1}^n Dd_i(G)^3 + 6n_G(C_3) = \sum_{i=1}^n d_i(H)^3 + 6n_H(C_3)$, 其中 $n_G(C_3)$ 和 $n_H(C_3)$ 分别为 G 和 H 中三角形的个数.

引理 5^[11] 设 $N_G(H)$ 为 G 中与 H 同构的子图的个数, 并且 $N_G(i)$ 为 G 中长度为 i 的闭迹的个数. 假设 $N_H(i)$ 为 H 中长度为 i 的闭迹的个数, $S_i(G)$ 为连通图 H 的集合, 且满足 $N_G(H)N_H(i) \neq 0$. 则 $N_G(5) = 30N_G(K_3) + 10N_G(C_5) + 10N_G(G_1)$, 其中 G_1 为一条边粘在一个三角形的一个顶点而形成的图.

多项式 $\phi(G, \lambda) = \det(\lambda I - A(G))$ 和 $\varphi(G, \lambda) = \det(\lambda I - Q(G))$ 分别为图 G 的邻接特征多项式和无符号拉普拉斯特征多项式.

引理 6^[12] 假设 G 和 H 为满足 $\phi(G, \lambda) = \phi(H, \lambda)$ 的两个图. 那么对于任意长度的闭迹, G 和 H 含有相同的个数.

下面的结果来源于文献[10,13].

引理 7 设 G 是顶点数为 n 边数为 m 的图, L_G 和 $S(G)$ 分别为它的线图 and 剖分图, 其中 $S(G)$ 为在 G 的每一条边嵌入一个顶点而形成的图. 那么 1) $\phi(L_G, \lambda) = (\lambda + 2)^{m-n} \phi(G, \lambda + 2)$; 2) $\phi(S(G), \lambda) = \lambda^{m-n} \phi(G, \lambda^2)$.

下面的结果来源于文献[14—15].

引理 8 设 P_t 为含有 t 个顶点的路, $\theta_{i,j,k}$ 为利用顶点数分别为 $i+2, j+2, k+2$ 的 3 条路将两个给定的顶点相连而形成的 θ 图, 且对于任意的两条路其公共点为给定的两个顶点,

1) $\phi(P_t, 2) = t + 1$; 2) $\phi(\theta_{i,j,k}, 2) = ij - (ij + ik + jk) - 3(i + j + k) - 5$.

引理 9^[13] 设 G 为含有度序列 d_1, d_2, \dots, d_n 且顶点数 n 的图. 那么有:

1) $\min\{d_i + d_j \mid ij \in E(G)\} \leq q_n(G) \leq \max\{d_i + d_j \mid ij \in E(G)\}$, 当且仅当 G 是一个连通的正则二部图或半正则二部图时, 等号成立.

2) 若 G 为顶点数 $n \geq 2$ 的连通图, 那么 $q_n(G) \geq \Delta(G) + 1$, 等号成立当且仅当 G 为星图 $K_{1, n-1}$.

一条嵌入在只有两个端点的度大于 2 的路间的路称为内部路.

引理 10^[13] 假设 uv 是连通图 G 的一条边, G_{uv} 为剖分边 uv 而形成的图. 那么有:

1) 若 $G = C_n$, 那么 $q_n(G_{uv}) = q_n(G) = 4$;

2) 若 $G \neq C_n$, 并且 uv 不在 G 的内部路上, 那么 $q_n(G_{uv}) > q_n(G)$;

3) 若 uv 在 G 的一条内部路上, 那么 $q_n(G_{uv}) < q_n(G)$.

引理 11^[16] 设 $v(e = uv)$ 为 G 的一个顶点(边), 并且 \tilde{C}_v (或 \tilde{C}_e) 为所有包含顶点 v (或边 e) 的圈的集合. 那么:

1) $\phi(G) = \lambda \phi(G - v) - \sum_{u \sim v} (G - v - u) - 2 \sum_{C \in \tilde{C}_v} \phi(G - V(C))$;

2) $\phi(G) = \phi(G - e) - \phi(G - u - v) - 2 \sum_{C \in \tilde{C}_e} \phi(G - V(C))$.

设 $G_u(P_t)$ 是用一条新边将点不相交的两个图 G 和 P_t 相连而形成, 此边连接图 G 上的一点 u 和路 P_t 的一个端点.

引理 12^[13] 设 X 和 Y 是任意两个点不相交的连通图, $x \in V(X)$ 和 $y \in V(Y)$. 设 $G = G_{xy}(X, Y; P_t)$ 是用一条新的长度为 $t-1$ 的路 $P_t, v_1 v_2 \dots v_t$, 将图 X 和 Y 相连, 增加了边 xv_1 和 yv_t 而形成的图. 那么

$\lim_{t \rightarrow \infty} q_n(G) = \max\{\lim_{t \rightarrow \infty} q_n(X_x(P_t)), \lim_{t \rightarrow \infty} q_n(Y_y(P_t))\}$.

在 $Q(G)$ 中将与 u 关联的行和列删去, 得到的主子矩阵记为 $Q_u(G)$, 并且 $\phi(Q_u(G), \lambda) = \det(\lambda I - Q_u(G))$.

引理 13^[13] $G_u(P_t)$ 如上定义. 那么:

1) $\lim_{t \rightarrow \infty} q_n(G_u(P_t)) = \tau_u(G)$ 存在, 并且 $\tau_u(G) \geq 4$. 特别的, $\tau_u(G)$ 为图序列 $\{G_u(P_t)\}$ 的 q_n 的极限点;

2) 若 $\tau_u(G) > 4$, 那么 $\tau_u(G)$ 为方程 $\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}}{2\lambda} \phi(G, \lambda) - \phi(Q_u(G), \lambda) = 0$ 的最大的根.

引理 14 设 G 是一个沙漏图. 若 $r \geq 3$, 那么 $5.4916 \leq q_n(L_G) \leq 5.7093$.

证明 设 G 和 L_G 如图 1 所示, 将有一条公共边的两个三角形形成的图记为 X . 那么由引理 12, 得到 $\lim_{t \rightarrow \infty} q_n(L_G) = \lim_{t \rightarrow \infty} q_n(X_u(P_t))$. 利用 MATLAB, 获得 $\phi(X, q_n) = q_n^4 - 10q_n^3 + 32q_n^2 - 40q_n + 16, \phi(Q_u(X, q_n)) = q_n^3 - 8q_n^2 + 18q_n - 12$. 由引理 13, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} q_n(L_G) = \lim_{t \rightarrow \infty} q_n(X_u(P_t))$ 为方程 $q_n^8 - 18q_n^7 + 132q_n^6 - 512q_n^5 + 1132q_n^4 - 1424q_n^3 + 944q_n^2 - 256q_n = 0$ 的最大根, 由上利用 Matlab, 得到 $\lim_{t \rightarrow \infty} q_n(L_G) \approx 5.4916$. 由引理 10, 可以得到 $q_n(L_G) \geq 5.4916$. 同样由引理 10, 当 $r = 3, q_n(L_G)$ 是最大的, 在此情况下, 通过计算有 $q_n(L_G) = 5.7093$. 因此证明完毕.

引理 15 设 L_G 为沙漏图的线图. 若 $r \geq 3$, 那么 $4 \notin \text{Spec}_Q(L_G)$.

证明 假设 $4 \in \text{Spec}_Q(L_G)$. 那么由引理 7, 得到 2 为 $S(L_G)$ 的一个特征值. 设 e_1 和 e_2 为 $S(L_G)$ 的两个割边, 如图 6 所示.

则两次利用引理 11 的 2), 有 $\phi(S(L_G), 2) = 512(r-1)$. 因为 $r \geq 3$, 有 $\phi(S(L_G), 2) \neq 0$, 矛盾.

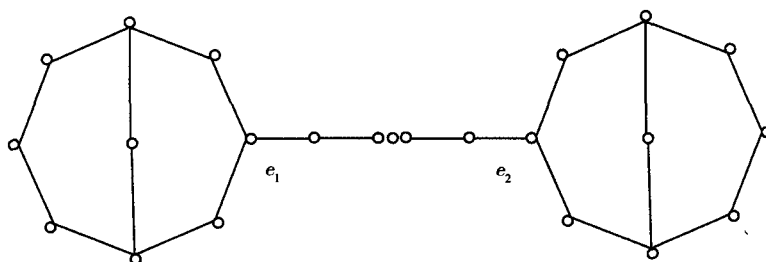


图6 剖分图 $S(L_G)$

定理 2 沙漏图的线图是 DQS.

证明 设 G 和 L_G 如图 1 所示, 那么将与 L_G 相 Q -同谱的图记为 H . 由引理 4, $n(H) = n(L_G) = r + 5$, 若 $r = 1$, $m(H) = m(L_G) = r + 9$, 否则 $m(H) = m(L_G) = r + 8$. 设 n_i 为 H 中度为 i 的顶点的度数, 并且 Δ 为 H 中最大的度. 现在将分 3 种情况来讨论下面的内容.

情况 1 假设 $r = 1$. 那么 $L_G \cong G_1$, 如图 2 所示. 由引理 9, $6 < q_n(H) < 8$, 所以 $\Delta \leq 6$. 现在 $n(H) = 6$, $m(H) = 10$, 并且有

$$\begin{cases} n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 = 6, & (10) \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + 6n_6 = 20, & (11) \\ n_1 + 4n_2 + 9n_3 + 16n_4 + 25n_5 + 36n_6 = 72. & (12) \end{cases}$$

从上面得到 $n_3 + 3n_4 + 6n_5 + 10n_6 = 12$.

若 $n_6 = 1$, 那么 $n_5 = 0$, $n_4 = 0$, $n_3 = 2$, 因此由(11)和(12)式, 有 $n_1 = -2$, $n_2 = 5$, 矛盾. 因此 $n_6 = 0$, $n_3 + 3n_4 + 6n_5 = 12$.

若 $n_5 = 2$, 那么 $n_4 = 0 = n_3 = 0$, 因此由(11)和(12)式, 获得 $n_1 = -2$, $n_2 = 6$, 矛盾. 所以 $n_5 = 1$ 或者 $n_5 = 0$.

若 $n_5 = 1$, 那么有 3 种情形: 1) $n_4 = 2$, $n_3 = 0$; 2) $n_4 = 0$, $n_3 = 6$; 3) $n_4 = 1$, $n_3 = 3$.

由 1), 得到 $n_1 = -1$, $n_2 = 4$, 矛盾; 由 2), 有 $n_5 + n_3 = 7 > 6$, 矛盾; 由 3), 获得 $n_1 = 0$, $n_2 = 1$, 因此 3) 成立. 这表明 H 含有度序列 $\{2, 3^3, 4, 5\}$. 这证明了 H 与图 3 所示的图同构.

但是利用 MATLAB, 知道图 3 中的图与 G_1 有不同的无符号拉普拉斯特征根. 因此 $H \not\cong G_1$.

若 $n_5 = 0$, 那么有 5 种情形: 1) $n_4 = 3$, $n_3 = 3$; 2) $n_4 = 2$, $n_3 = 6$; 3) $n_4 = 1$, $n_3 = 9$; 4) $n_4 = 0$, $n_3 = 12$; 5) $n_4 = 4$, $n_3 = 0$.

由 1), 有 $n_1 = 1$, $n_2 = -1$, 矛盾; 由 2), 得到 $n_4 + n_3 = 8 > 6$, 矛盾; 由 3), 获得 $n_4 + n_3 = 10 > 6$, 矛盾; 由 4), 知道 $n_4 + n_3 = 12 > 6$, 矛盾; 由 5), 有 $n_1 = 0$, $n_2 = 2$, 因此 5) 成立. 这表明, H 有度序列 $\{2^2, 4^4\}$. 并且由引理 4, H 有 6 个三角形. 因此 $H \cong G_1$.

所以 G_1 是 DQS.

情况 2 假设 $r = 2$. 那么 $L_G \cong G_2$ 如图 2 所示. 由引理 9 的 1), 有 $5 < q_n(H) < 7$. 因此 $\Delta \leq 5$, 否则与引理 9 的 2) 相矛盾. 现在 $n(H) = 7$, $m(H) = 10$, 因此有

$$\begin{cases} n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 7, & (13) \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 = 20, & (14) \\ n_1 + 4n_2 + 9n_3 + 16n_4 + 25n_5 = 60. & (15) \end{cases}$$

由上获得 $n_3 + 3n_4 + 6n_5 = 7$. 若 $n_5 = 1$, 那么 $n_4 = 0$, $n_3 = 1$, 并且由(13)和(14), 有 $n_1 = -2$, $n_2 = 7$, 矛盾. 因此 $n_5 = 0$. 所以, 有 3 种情形: 1) $n_4 = 2$, $n_3 = 1$; 2) $n_4 = 0$, $n_3 = 7$; 3) $n_4 = 1$, $n_3 = 4$.

由 1), 得到 $n_1 = -1$, $n_2 = 5$, 矛盾; 由 2), 有 $n_1 + 2n_2 = -1$, 矛盾; 由 3), 获得 $n_1 = 0$, $n_2 = 2$, 因此 3) 成立. 这表明 H 含有度序列 $\{2^2, 3^4, 4\}$. 有引理 4, H 含有 4 个三角形. 这说明了 H 和图 4 中的图相似.

但利用 MATLAB, 知道图 4 中的图与 G_1 有不同的无符号拉普拉斯特征根. 因此 G_2 是 DQS.

情况 3 假设 $r \geq 3$. 由引理 9 的 1), 有 $4 < q_n(L_G) < 6$. 因此 $\Delta \leq 4$, 否则它与引理 9 的 2) 相矛盾.

现在 $n(H) = r + 5, m(H) = r + 8$, 因此有

$$\begin{cases} n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n, & (16) \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 = 2n + 6, & (17) \\ n_1 + 4n_2 + 9n_3 + 16n_4 = 4n + 30. & (18) \end{cases}$$

由上, 得到 $n_3 + 3n_4 = 6$. 因此有 3 种情形: 1) $n_3 = 3, n_4 = 1$; 2) $n_3 = 0, n_4 = 2$; 3) $n_3 = 6, n_4 = 0$.

由 1), 得到 $n_1 = -1, n_2 = n - 3$, 矛盾; 由 2), 有 $n_1 = -2, n_2 = n$, 矛盾; 由 3), 获得 $n_1 = 0, n_2 = n - 6$, 因此 3) 成立.

这表明 H 含有度序列 $\{2^{n-6}, 3^6\}$. 由引理 4, H 有 4 个三角形.

若 H 是连通的, 这表明 H 和图 5 中的图相似(这些图记为 $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$). 假设 $X_{1\max}, X_{2\max}$ 和 $X_{3\max}$ 如图 7 所示.

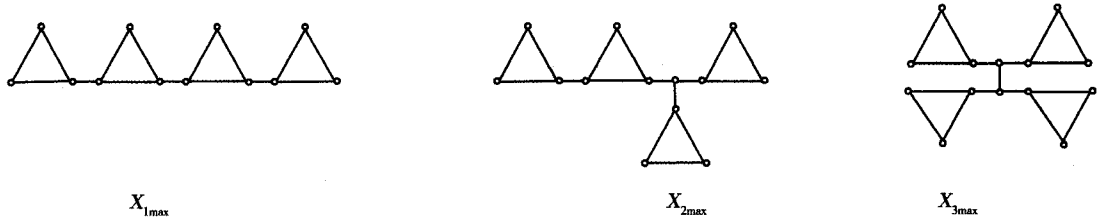


图7 拥有极大 q_n 的极值图 $X_{1\max}, X_{2\max}, X_{3\max}$

由引理 10, 知道图 $X_{1\max}, X_{2\max}$ 和 $X_{3\max}$ 分别为图 X_1, X_2, X_3 的拥有极大 q_n 的极值图. 因此通过计算, 获得 $q_n(X_{1\max}) = 5.4142, q_n(X_{2\max}) = 5.3429, q_n(X_{3\max}) = 5.3826$, 并且由引理 14, 这些图的 q_n 的值都比 $q_n(L_G)$ 的下界: 5.4916 小, 所以 X_1, X_2, X_3 与 L_G 不是 Q -同谱的.

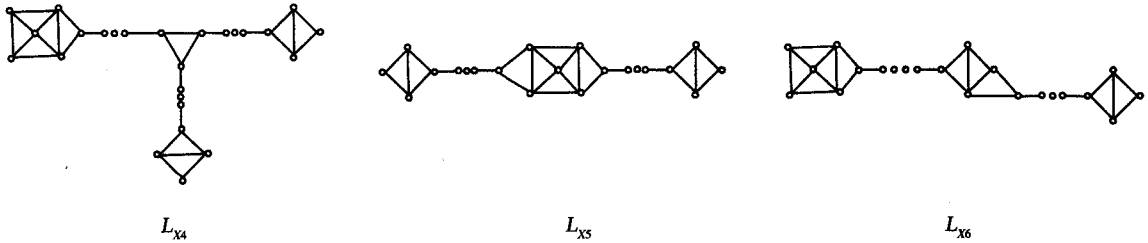


图8 X_4, X_5, X_6 的线图

现在由定义, X_4, X_5 和 X_6 的线图是 L_{X4}, L_{X5} 和 L_{X6} , 如图 8 所示. 考虑线图 L_{LG}, L_{X4}, L_{X5} 和 L_{X6} , 得到这些图中长度为 5 的闭迹的个数, 见下表.

表 1 L_{LG}, L_{X4}, L_{X5} 和 L_{X6} 中长度为 5 的闭迹的个数

图 / 个数	K_3	C_5	G_1	$N_G(5)$
L_{LG}	10	14	50	940
L_{X4}	10	7	38	750
L_{X5}	10	10	44	840
L_{X6}	10	8	42	800

因此由引理 5, 得到 L_{LG}, L_{X4}, L_{X5} 和 L_{X6} 这些图中长度为 5 的闭迹的个数不相同. 并且由引理 6, 它们不是 A -同谱的. 因此由引理 7 的 1), L_G, X_4, X_5, X_6 不是 L -同谱的. 所以 $H \not\cong L_G$.

若 H 不连通, 由引理 15, 有 $4 \notin \text{Spec}_Q(L_G)$, 这表明 $4 \notin \text{Spec}_Q(H)$. 并且由引理 10, 知道 H 不含有圈. 这表明 H 不存在. 很明显, $H \not\cong L_G$.

所以 L_G 是 DQS .

参 考 文 献

- [1] LIU M H, SHAN Y, Das K C. Some graphs determined by their(signless) Laplacian spectra[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2014,449:154-165.
- [2] GUO G, WANG G. On the (signless) Laplacian spectral characterization of the line graphs of lollipop graphs[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2013,438:4595-4605.
- [3] WANG S, ZHOU B. The signless Laplacian spectra of the corona and edge corona of two graphs[J]. *Linear and Multilinear Algebra*, 2013,61:197-204.
- [4] BU C, ZHOU J. Starlike trees whose maximum degree exceed 4 are determined by their Q-spectra[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2012,436:143-151.
- [5] ZHOU J, BU C. Spectral characterization of line graphs of starlike trees[J]. *Linear and Multilinear Algebra*, 2013,61:1041-1050.
- [6] AOUCHE M, HANSEN P. Two Laplacians for the distance matrix of a graph[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2013,439: 21-33.
- [7] BEINEKE L, WILSON R. *Selected Topics in Graph Theory*[M]. New York: Academic press, 1978:273-274.
- [8] OUGLAS B. *Introduction to Graph Theory*[M]. Beijing: Machinery Industry Press, 2004:273-282.
- [9] OLIVEIRA C, ABREU N, JURKIEWICA S. The characteristic polynomial of the Laplacian of graphs in (a, b)-linear classes[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2002,356:113-121.
- [10] Cvetković C D, ROWLINSON P, SIMIĆ S. *Signless Laplacians of finite graphs*[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2007,423: 155-171.
- [11] OMIDI G. On a Laplacian spectral characterization of graphs of index less than 2[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2008,429: 2724-2731.
- [12] DAM D E, HAEMERS W. Which graphs are determined by their spectra[J]. *Linear Algebra Appl*, 2003,373:241-272.
- [13] WANG J, HUANG Q, BELARDO F. On graphs whose signless Laplacian index does not exceed 4. 5[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2009,431:162-178.
- [14] GHAREGHANI N, OMIDI G, TAYFEH-REZAIE B. Spectral characterization of graphs with index at most[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2007,420:483-489.
- [15] WANG J, HUANG Q. On the spectral characterization of theta graphs[J]. *MATCH*, 2009,62:581-598.
- [16] Schwenk S A. Computing the characteristic polynomial of a graph[J]. *Graphs Combinatorics*, 1974,406:153-172.

The (signless) Laplacian Spectral Characterizations of Line Graphs of Sandglass Graphs

QIN Zhengxin^{1a}, ZHANG Wenli^{1b}, WANG Guoping², MENG Jixiang^{1a}

- (1. a. College of Mathematics and System Sciences; b. College of Science and technology, Xinjiang University, Urumqi 830046, China;
2. School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi 830054, China)

Abstract: A sandglass graph is a graph obtained by appending a triangle to each pendant vertex of a path. A graph G is said to be determined by its L -spectrum(or Q -spectrum) if there is no other non-isomorphic graph L -cospectral(or Q -cospectral) with it, denoted by DLS (or DQS). In this paper, using discussion and exclusion, we show that the line graphs of sandglass graphs are determined by their Laplacian spectra as well as their signless Laplacian spectra.

Keywords: line graph; sandglass graph; laplacian spectrum; signless Laplacian spectrum