第 47 卷 第 1 期 河南师范大学学报(自然科学版) Vol.47 No.1
2019 年 1 月 Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition) Jan. 2019

文章编号:1000－2367(2019)01－0040－05 **DOI:**10.16366/j.cnki.1000－2367.2019.01.006

时变扩散模型中收益参数向量的局部复合分位回归估计

王静,王继霞

(河南师范大学 数学与信息科学学院,河南 新乡 453007)

摘 要:主要研究多维时变扩散模型中收益参数向量的估计问题.基于离散观测样本,利用局部线性拟合的方法,得到了时变漂移参数向量的局部复合分位回归估计,并证明了估计量的渐近正态性.同时,给出了估计量的渐近偏差和渐近方差.

关键词:时变扩散模型;时变参数向量;局部线性拟合;复合分位回归;渐近正态性

中图分类号:O212.1 **文献标志码:**A

扩散模型在金融、工程和军事等领域有着广泛的应用.其中,时变扩散模型统计推断的研究越来越受到关注.比如,在金融领域中,由于经济条件的不确定性以及时间的变化,通常会设想金融资产的瞬时期望收益和瞬时波动率不但与指定的基础状态变量有关,而且也应该依赖于时间.这意味着基础状态变量应该服从带时变系数的扩散模型,即时变扩散模型.对于时变扩散模型的研究,迄今已做了大量的工作.例如文献[1－6]等考虑了时变参数的扩散模型,这些模型清楚地表达了参数系数对时间的依赖性.文献[7]采用 VAR 模型对内生变量之间的动态关系进行了分析.

本文主要研究多维非时齐扩散模型中时变参数的估计问题.

考虑定义在滤子空间 $(\Omega,F,(F_t)_{t\geq 0},P)$ 上的多维非时齐扩散模型

$$\mathrm{d}X_t = a(X_t)\beta(t)\mathrm{d}t + \sigma(t)\mathrm{d}W_t, \tag{1}$$

其中 $X_t=(X_t^{(1)},X_t^{(2)},\cdots,X_t^{(m)})^{\mathrm{T}}$ 是 m 维的扩散过程,$W_t=(W_t^{(1)},W_t^{(2)},\cdots,W_t^{(m)})^{\mathrm{T}}$ 是 m 维的标准布朗运动,$\beta(t)=(\beta_1(t),\beta_2(t),\cdots,\beta_m(t))^{\mathrm{T}}$ 为收益参数向量,$\sigma(t)=(\sigma_{ij}(t))_{m\times m}$ 为 m 阶的时变扩散参数矩阵,$a(X_t)$ 为 $m\times m$ 的对角阵,其第 l 个对角元素为 $a_l(X_t^{(l)})$,$l=1,2,\cdots,m$.本文中,利用局部线性拟合的方法,研究模型(1)中漂移参数向量的局部复合分位回归估计,并讨论所得估计的渐近性质.

复合分位回归的方法是近几年由文献[8]估计经典线性回归模型中的回归系数时提出来的,随后文献[9]研究了一般非参数回归模型的复合分位回归估计,文献[10]考虑了半参数变系数偏线性模型,给出了参数的局部复合分位回归估计.文献[11]研究了扩散模型的复合分位回归估计的渐近正态性.文献[8－10]皆是在回归模型中考虑复合分位回归的方法,本文在多维扩散模型中,利用复合分位回归的方法,得到了时变参数向量的局部复合分位回归估计,并研究了估计量的渐近性质.

1 漂移参数向量的局部复合分位回归估计

令 $\{X_{t_i},i=1,2,\cdots,n+1\}$ 是离散等距观测样本,$t_1<t_2<\cdots<t_{n+1}$.记 $Y_{t_i}=(Y_{t_i}^{(1)},Y_{t_i}^{(2)},\cdots,Y_{t_i}^{(m)})^{\mathrm{T}}$,$\varepsilon_{t_i}=(\varepsilon_{t_i}^{(1)},\varepsilon_{t_i}^{(2)},\cdots,\varepsilon_{t_i}^{(m)})^{\mathrm{T}}$,$\Delta_i=t_{i+1}-t_i$,其中 $Y_{t_i}{}^{(l)}=X_{t_{i+1}}^{(l)}-X_{t_i}^{(l)}$,$\varepsilon_{t_i}^{(l)}=W_{t_{i+1}}^{(l)}-W_{t_i}^{(l)}$,$l=1,2,\cdots,m$.由布朗运动 $W_{t_i}^{(l)}$ 的独立增量性,可知 $\varepsilon_{t_i}^{(l)}$ 是均值为零,方差为 Δ_i 正态分布.则模型(1)可以表示为

$$Y_{t_i}=a(X_{t_i})\beta(t_i)\Delta_i+\sigma(t_i)\varepsilon_{t_i}. \tag{2}$$

收稿日期:2018-02-08;**修回日期:**2018-09-16.

基金项目:国家自然科学基金(U1504701);河南师范大学博士科研启动课题(qd15184).

作者简介(通信作者):王静(1976－),女,河南新乡人,河南师范大学副教授,主要从事金融统计和金融风险管理的研究,E-mail:1304337647@qq.com.

离散化形式(2)的第 l 个方程为

$$Y_{t_i}^{(l)}=a_l(X_{t_i}^{(l)})\beta_l(t_i)\Delta_i+\sum_{j=1}^{m}\sigma_{lj}(t_i)\varepsilon_{t_i}^{(j)}. \tag{3}$$

令 $Z_{t_i}^{(l)}=\dfrac{1}{\Delta_i}\left[\sum_{j=1}^{m}\sigma_{lj}^2(t_i)\right]^{-1/2}\sum_{j=1}^{m}\sigma_{lj}(t_i)\varepsilon_{t_i}^{(j)},l=1,2,\cdots,m$. 则模型(3)等价于

$$Y_{t_i}^{(l)}=a_l(X_{t_i}^{(l)})\beta_l(t_i)\Delta_i+\Delta_i\left[\sum_{j=1}^{m}\sigma_{lj}^2(t_i)\right]^{1/2}Z_{t_i}^{(l)}. \tag{4}$$

由 $\varepsilon_{t_i}^{(j)},j=1,2,\cdots,m$ 的定义知,对于每个固定的 $l(l=1,2,\cdots,m)$,$\{Z_{t_i}^{(l)},i=1,2,\cdots,n\}$ 是独立同分布的正态随机变量序列且 $E(Z_{t_i}^{(l)})=0,\mathrm{Var}(Z_{t_i}^{(l)})=1/\Delta_i$.

本文利用的一个技巧是对时变参数进行局部线性近似,即对任意给定的时间点 t_0,令

$$\beta_l(t)\approx\beta_l(t_0)+\beta'_l(t_0)(t-t_0),l=1,2,\cdots,m,$$

其中 t 是 t_0 某邻域内的点.令 h 表示邻域大小的尺度,称其为带宽参数或窗宽参数,它控制着局部邻域的大小,$K(\cdot)$ 是一个非负的权重函数,它是一个实值函数,通常取为对称的概率密度函数,称其为核函数.记 $\beta_{0l}=\beta_l(t_0),\beta_{1l}=\beta'_l(t_0),l=1,2,\cdots,m$.下面考虑 $\beta(t_0)=(\beta_1(t_0),\beta_2(t_0),\cdots,\beta_m(t_0))^{\mathrm{T}}$ 的局部复合分位回归估计.对给定的 q,令 $\rho_{\tau_k}(r)=\tau_k r-rI_{\{r<0\}},k=1,2,\cdots,q$,其中 $\tau_k=\dfrac{k}{q+1},k=1,2,\cdots,q$.$\rho_{\tau_k}(r)$ 表示分位回归损失函数.利用局部复合分位回归的思想,局部加权复合分位回归损失函数为

$$\sum_{k=1}^{q}\left\{\sum_{i=1}^{n}\rho_{\tau_k}\left\{\frac{Y_{t_i}^{(l)}}{\Delta_i}-a_l(X_{t_i}^{(l)})[\beta_{0lk}+\beta_{1l}(t_i-t_0)]\right\}K_h(t_i-t_0)\right\}, \tag{5}$$

其中 $K_h(\cdot)=K(\cdot/h)/h$,h 是适合的带宽参数,它的选取将在本节最后讨论.令

$$(\hat\beta_{0l1},\hat\beta_{0l2},\cdots,\hat\beta_{0lq},\hat\beta_{1l})^{\mathrm{T}}$$

为损失函数(5)的最小值点.对任意给定的时间点 t_0,令 $\hat\beta_l(t_0)=\dfrac{1}{q}\sum_{k=1}^{q}\hat\beta_{0lk},l=1,2,\cdots,q$.记 $\hat\beta(t_0)=(\hat\beta_1(t_0),\hat\beta_2(t_0),\cdots,\hat\beta_m(t_0))^{\mathrm{T}}$,这样就得到了漂移参数向量 $\beta(t_0)$ 的局部复合分位回归估计为 $\hat\beta(t_0)$.为了得到漂移参数向量函数的估计 $\hat\beta(\cdot)$,可以在若干个格子点进行估计.

下面讨论估计量的渐近性质.首先给出如下一些记号和假设条件,令 $F_l(\cdot)$ 和 $f_l(\cdot)$ 分布表示 $Z_{t_i}^{(l)}$ 的分布函数和概率密度函数,$g(\cdot)$ 表示时间的概率密度,一般假定 $g(\cdot)$ 是时间区间$[a,b]$上的均匀分布的概率密度函数.记 $\mu_j=\int u^jK(u)\mathrm{d}u,\nu_j=\int u^jK^2(u)\mathrm{d}u,j=1,2,\cdots,c_k^{(l)}=F_l^{-1}(\tau_k),\tau_{kk'}=\tau_k\wedge\tau_{k'}-\tau_k\tau_{k'},R_l(q)=\dfrac{1}{q^2}\sum_{k=1}^{q}\sum_{k'=1}^{q}\dfrac{\tau_{kk'}}{f_l(c_k^{(l)})f_l(c_{k'}^{(l)})},l=1,2,\cdots,m$.下面给出假设条件,本文中,$C$ 表示一个正的常数.

(A1)时变参数向量 $\beta(t)$ 和时变扩散矩阵 $\sigma(t)$ 的每一个元素关于 t 二阶连续可导.

(A2)核函数 $K(\cdot)$ 是对称、满足 Lipschitz 条件的连续函数且具有有限的支撑$[-C,C]$.

(A3)当 $n\to\infty$ 时,带宽参数 $h=h(n)\to0$ 且 $nh\to\infty$.

定理 1　若条件(A1)-(A3)成立,则对任意给定的时间点 t_0,漂移向量参数的局部复合分位回归估计 $\hat\beta(t_0)$ 满足 $\sqrt{nh}\{\hat\beta(t_0)-\beta(t_0)-\dfrac{1}{2}\beta''(t_0)\mu_2h^2\}\to_L N\left(0,\dfrac{\nu_0}{g(t_0)}[a^2(X_{t_0})]^{-1}\Sigma R(q)\right)$,其中 $\beta''(t_0)=(\beta''_1(t_0),\beta''_2(t_0),\cdots,\beta''_m(t_0))^{\mathrm{T}}$,$\Sigma$ 和 $R(q)$ 是 $m\times m$ 的对角阵,其对角线上的元素分别为 $\sum_{j=1}^{m}\sigma_{lj}^2(t_0)$ 和 $R_l(q),l=1,2,\cdots,m$,符号"$\to_L$"表示依分布收敛.

证明　对每一个 l,$(l=1,2,\cdots,m)$,令

$$S_l=\begin{pmatrix}S_{11}^{(l)} & S_{12}^{(l)}\\ S_{21}^{(l)} & S_{22}^{(l)}\end{pmatrix},\Sigma_l=\begin{pmatrix}\Sigma_{11}^{(l)} & \Sigma_{12}^{(l)}\\ \Sigma_{21}^{(l)} & \Sigma_{22}^{(l)}\end{pmatrix},$$

其中 $S_{11}^{(l)}$ 是 $q\times q$ 对角阵,其对角线元素为 $f_l(c_k^{(l)}),k=1,2,\cdots,q,S_{12}^{(l)}=(\mu_1f_l(c_1^{(l)}),\mu_1f_l(c_2^{(l)}),\cdots,$

$\mu_1 f_l(c_q^{(l)}))^{\mathrm{T}}, S_{21}^{(l)}=[S_{12}^{(l)}]^{\mathrm{T}}, S_{22}^{(l)}=\mu_2 \sum_{k=1}^{q} f_l(c_k^{(l)}).\Sigma_{11}^{(l)}$ 是 $q\times q$ 方阵,其第(k,k')个元素为 $\nu_0\tau_{kk'}, k,k'=1,2,\cdots,q, \Sigma_{12}^{(l)}=\left(\nu_1\sum_{k'=1}^{q}\tau_{1k'},\nu_1\sum_{k'=1}^{q}\tau_{2k'},\cdots,\nu_1\sum_{k'=1}^{q}\tau_{qk'}\right)^{\mathrm{T}}, \Sigma_{21}^{(l)}=[\Sigma_{12}^{(l)}]^{\mathrm{T}}, \Sigma_{22}^{(l)}=\nu_2\sum_{k,k'=1}^{q}\tau_{kk'}.u_k^{(l)}=\sqrt{nh}\{\beta_{0lk}-\beta_l(t_0)-A_l(t_0)c_k^{(l)}\}, v_l=h\sqrt{nh}\{\beta_{1l}-\beta'_l(t_0)\}, \Delta_{i,k}^{(l)}=\frac{1}{\sqrt{nh}}(u_k^{(l)}+\frac{t_i-t_0}{h}v_l)$, 其中 $A_l(t)=[a_l(X_t^{(l)})]^{-1}[\sum_{j=1}^{m}\sigma_{lj}^2(t)]^{1/2}$.记 $d_{i,k}^{(l)}=\{c_k^{(l)}A_l(t_i)-A_l(t_0)\}+r_i^{(l)}$,其中 $r_i^{(l)}=\beta_l(t_i)-\beta_l(t_0)-\beta'_l(t_0)(t_i-t_0)$.定义 $\eta_{i,k}^{(l)*}$ 为随机变量 $I_{\{Z_{t_i}^{(l)}\le c_k^{(l)}-d_{i,k}^{(l)}\{[A_l(t_i)]^{-1}-\tau_k\}}$. 令 $W_n^{(l)*}=(w_{11}^{(l)*},w_{12}^{(l)*},\cdots,w_{1q}^{(l)*},w_{1(q+1)}^{(l)*})^{\mathrm{T}}$,其中 $w_{1k}^{(l)*}=\frac{1}{\sqrt{nh}}\sum_{i=1}^{n}\eta_{i,k}^{(l)*}K_h(t_i-t_0), k=1,2,q, w_{1(q+1)}^{(l)*}=\frac{1}{\sqrt{nh}}\sum_{k=1}^{q}\sum_{i=1}^{n}\eta_{i,k}^{(l)*}K_h(t_i-t_0)\frac{t_i-t_0}{h}$.

由文献[9]中的引理 2 和引理 3 知,最小化(5)式等价于最小化下式

$L_n^{(l)}(\theta)=\sum_{k=1}^{q}u_k^{(l)}\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\eta_{i,k}^{(l)*}K_h(t_i-t_0)}{\sqrt{nh}}\}+v_l\sum_{k=1}^{q}\sum_{i=1}^{n}\frac{\eta_{i,k}^{(l)*}K_h(t_i-t_0)(t_i-t_0)}{h\sqrt{nh}}+\sum_{k=1}^{q}B_{n,k}^{(l)}(\theta)=\frac{1}{2}\theta^{\mathrm{T}}S_n^{(l)}\theta+(W_n^{(l)*})^{\mathrm{T}}\theta+o_p(1)$, 其中 $\theta=(u_1,u_2,\cdots,u_q,v).B_{n,k}^{(l)}(\theta)=\sum_{i=1}^{n}(K_h(t_i-t_0)\int_0^{\Delta_{i,1}^{(l)}}[I_{\{Z_{t_i}^{(l)}\le c_k^{(l)}-d_{i,1}^{(l)}[A_l(ti)]^{-1}+z[A_l(t_i)]^{-1}\}}-I_{\{Z_{t_i}^{(l)}\le c_k^{(l)}-d_{i,1}^{(l)}[A_l(t_i)]^{-1}\}}]\mathrm{d}z), S_n^{(l)}=\begin{pmatrix}S_{n,11}^{(l)} & S_{n,12}^{(l)}\\ S_{n,21}^{(l)} & S_{n,22}^{(l)}\end{pmatrix}, S_{n,11}^{(l)}=[\sum_{i=1}^{n}K_h(t_i-t_0)[nhA_l(t_i)]^{-1}]S_{11}, S_{n,12}^{(l)}=[\sum_{i=1}^{n}K_h(t_i-t_0)\frac{t_i-t_0}{h}[nhA_l(t_i)]^{-1}](f_l(c_1^{(l)}),f(c_1^{(l)}),\cdots,f(c_q^{(l)}))^{\mathrm{T}}, S_{n,21}^{(l)}=[S_{n,12}^{(l)}]^{\mathrm{T}}, S_{n,22}^{(l)}=\sum_{k=1}^{q}f_l(c_k^{(l)})\sum_{i=1}^{n}[K_h(t_i-t_0)\frac{(t_i-t_0)^2}{h^2}[nhA_l(t_i)]^{-1}]$.

故有 $L_n^{(l)}(\theta)=\frac{1}{2}g(t_0)[A_l(t_0)]^{-1}\theta^{\mathrm{T}}S_l\theta+(W_n^{(l)*})^{\mathrm{T}}\theta+o_p(1)$.

应用文献[12]中的结果,有 $\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}K_h(t_i-t_0)\frac{(t_i-t_0)^j}{h^j}\to_P g(t_0)\mu_j$,其中 $\to_P$ 表示以概率收敛.因此,

$$S_n^{(l)}\to_P g(t_0)[A_l(t_0)]^{-1}S_l=g(t_0)[A_l(t_0)]^{-1}\begin{pmatrix}S_{11}^{(l)} & S_{12}^{(l)}\\ S_{21}^{(l)} & S_{22}^{(l)}\end{pmatrix}.$$

由于凸函数 $L_n(\theta)-(W_n^*)^{\mathrm{T}}\theta$ 以概率收敛到凸函数 $\frac{1}{2}g(t_0)[A_l(t_0)]^{-1}\theta^{\mathrm{T}}S\theta$,又由文献[13]中的凸定理知,$\hat{\theta}_n^{(l)}=-g(t_0)[A_l(t_0)]^{-1}S_l^{-1}W_n^{(l)*}+o_p(1)$. 定义 $\eta_{i,k}^{(l)}=I_{\{Z_{t_i}^{(l)}\le c_k^{(l)}\}}-\tau_k, W_n^{(l)}=(w_{11}^{(l)},w_{12}^{(l)},\cdots,w_{1q}^{(l)},w_{1(q+1)}^{(l)})^{\mathrm{T}}$,其中 $w_{1k}^{(l)}=\frac{1}{\sqrt{nh}}\sum_{i=1}^{n}\eta_{i,k}^{(l)}K_h(t_i-t_0), k=1,2,q$,和 $w_{1(q+1)}^{(l)}=\frac{1}{\sqrt{nh}}\sum_{k=1}^{q}\sum_{i=1}^{n}\eta_{i,k}^{(l)}K_h(t_i-t_0)\frac{t_i-t_0}{h}$.

由中心极限定理和 Cramer-Wald 定理,有 $\frac{W_n^{(l)}-E(W_n^{(l)})}{\sqrt{\mathrm{Var}(W_n^{(l)})}}\to_L N(0,I_{(q+1)\times(q+1)})$,又由 $\mathrm{Cov}(\eta_{i,k},\eta_{i,k'})=\tau_{kk'}$, $\mathrm{Cov}(\eta_{i,k},\eta_{j,k'})=0, i\ne j$,可得到 $\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}K_h^2(t_i-t_0)\frac{(t_i-t_0)^j}{h^j}\to_P g(t_0)\nu_j$.

因此,$\mathrm{Var}(W_n^{(l)})\to g(t_0)\Sigma_l$.又由文献[10]中定理 3.1 的证明过程,得 $W_n^{(l)}\to_L N(0,g(t_0)\Sigma_l)$. 此外,有

$$\mathrm{Var}(w_{1k}^{(l)*}-w_{1k}^{(l)})=\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}K_h^2(t_i-t_0)\mathrm{Var}(\eta_{i,k}^{(l)*}-\eta_{i,k}^{(l)})\le$$

$$\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}K_h^2(t_i-t_0)[F_l(c_k^{(l)}+|d_{i,k}^{(l)}|[A_l(t_i)]^{-1})-F_l(c_k^{(l)})]=o_p(1),$$

$$\mathrm{Var}(w_{1k}^{(l)*}-w_{1k}^{(l)})=\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}K_h^2(t_i-t_0)\frac{t_i-t_0}{h}\mathrm{Var}(\sum_{k=1}^{q}\eta_{i,k}^{(l)*}-\eta_{i,k}^{(l)})\le$$

$$\frac{q^2}{nh}\sum_{i=1}^{n}K_h^2(t_i-t_0)\frac{t_i-t_0}{h}\max_k[F_l(c_k^{(l)}+|d_{i,k}|[A_l(t_i)]^{-1}))-F_l(c_k^{(l)})]=o_p(1).$$

因此, $\mathrm{Var}(w_n^{(l)*}-w_n^{(l)})=o_p(1)$. 由 Slutsky's 定理, 得到 $w_n^{(l)*}\to_L N(0,g(t_0)\Sigma_l)$. 故, $\hat{\theta}_n^{(l)}+g(t_0)[A_l(t_0)]S_l^{-1}E(W_n^{(l)*})\to_L N(0,g(t_0)[A_l(t_0)]^2S_l^{-1}\Sigma_lS_l^{-1})$.

故 $\hat{\beta}_l(t_0)$ 的渐近偏差为

$$\mathrm{bias}(\hat{\beta}_l(t_0))=\frac{1}{q}A_l(t_0)\sum_{k=1}^{q}c_k^{(l)}-\frac{1}{q\sqrt{nh}}g(t_0)A_l(t_0)e_{q\times1}^{\mathrm{T}}(S_{11}^{(l)})^{-1}E(W_{1n}^{(l)*})=\frac{1}{q}A_l(t_0)\sum_{k=1}^{q}c_k^{(l)}-$$

$$\frac{1}{q\sqrt{nh}}g(t_0)A_l(t_0)\sum_{i=1}^{n}K_i\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{f_l(c_k^{(l)})}[F_l(c_k^{(l)}-d_{i,k}^{(l)}[A_l(t_i)]^{-1})-F_l(c_k^{(l)})],$$

其中 $K_i=K_h(t_i-t_0)$, $e_{q\times1}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$, $W_{1n}^{(l)*}=(w_{11}^{(l)*},w_{12}^{(l)*},\cdots,w_{1q}^{(l)*})^{\mathrm{T}}$.注意到 $Z_{t_i}^{(l)}$ 是分布式对称的, 故有 $\sum_{k=1}^{q}c_k^{(l)}=0$, 又 $\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{f_l(c_k^{(l)})}[F_l(c_k^{(l)}-d_{i,k}[A_l(t_i)]^{-1})-F_l(c_k^{(l)})]=-r_i^{(l)}[A_l(t_i)]^{-1}(1+o_p(1))$.因此, $\mathrm{bias}(\hat{\beta}_l(t_0))=\frac{1}{nh}g(t_0)A_l(t_0)\sum_{i=1}^{n}K_ir_i^{(l)}[A_l(t_i)]^{-1}(1+o_p(1))$. 又有 $\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}K_ir_i^{(l)}[A_l(t_i)]^{-1}=\frac{g(t_0)\beta''(t_0)}{2}[A_l(t_0)]^{-1}\mu_2h^2(1+o_p(1))$, 故得 $\mathrm{bias}(\hat{\beta}_l(t_0))=\frac{1}{2}\beta''_l(t_0)\mu_2h^2+o_p(h^2)$ 和 $\mathrm{Var}[\hat{\beta}_l(t_0)]=\frac{1}{nh}\frac{1}{g(t_0)}[A_l(t_0)]^2\frac{1}{q^2}e_{q\times1}^{\mathrm{T}}(S_l^{-1}\Sigma_lS_l^{-1})_{11}e_{q\times1}+o_p(\frac{1}{nh})=\frac{1}{nh}\frac{\nu_0}{g(t_0)}[A_l(t_0)]^2R_l(q)+o_p(\frac{1}{nh})$.

证毕.

2　带宽选择

由定理 1 及其证明过程,通过计算得到 $\hat{\beta}_l(t_0)$, $(l=1,2,\cdots,m)$ 的渐近偏差和渐近方差为

$$\mathrm{bias}[\hat{\beta}_l(t_0)]=\frac{1}{2}\beta''_l(t_0)\mu_2h^2+o_p(h^2),\mathrm{Var}[\hat{\beta}_l(t_0)]=\frac{1}{nh}\frac{\nu_0\sum_{j=1}^{m}\sigma_{lj}^2(t_0)}{nhg(t_0)a_l^2(X_{t0}^{(l)})}R_l(q)+o_p(\frac{1}{nh}).$$

故 $\hat{\beta}_l(t_0)$ 的均方误差为 $\mathrm{MSE}(\hat{\beta}_l(t_0))=[\frac{1}{2}\beta''_l(t_0)\mu_2]^2h^4+\frac{1}{nh}\frac{\nu_0\sum_{j=1}^{m}\sigma_{lj}^2(t_0)}{nhg(t_0)a_l^2(X_{t0}^{(l)})}R_l(q)$, $l=1,2,\cdots,m$.

在使用局部线性近似的方法时,带宽的选择是一个重要的问题.本节中,所用的带宽选择的原则是最小化总的均方误差,即最小化下式

$$\sum_{l=1}^{m}\mathrm{MSE}(\hat{\beta}_l(t_0))=\sum_{l=1}^{m}\left\{\left[\frac{1}{2}\beta''_l(t_0)\mu_2\right]^2h^4+\frac{1}{nh}\frac{\nu_0\sum_{j=1}^{m}\sigma_{lj}^2(t_0)}{nhg(t_0)a_l^2(X_{t0}^{(l)})}R_l(q)\right\}.$$

可得到最优带宽为

$$h^{opt}(t_0)=\left\{\frac{\sum_{l=1}^{m}\frac{\nu_0\sum_{j=1}^{m}\sigma_{lj}^2(t_0)R_l(q)}{g(t_0)a_l{}^2(X_{t0}^{(l)})}}{\sum_{l=1}^{m}[\beta''_l(t_0)\mu_2]^2}\right\}^{\frac{1}{5}}n^{-\frac{1}{5}}.$$

时变扩散矩阵 $\sigma(t)$ 通常表示扩散过程的扰动强度.关于它的估计问题,人们更多地去估计 X_t 的平方变差过程,即 $[X]_t=\int_0^t\sigma(s)[\sigma(s)]^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s$, $t\in[0,1]$,这也是金融统计中的一个经典问题.例如 Q_t^n 可以选择为 X_t 的经验平方变差过程,即 $Q_t^n=\sum_{i=1}^{[nt]}(X_{t_i}-X_{t_{i-1}})(X_{t_i}-X_{t_{i-1}})^{\mathrm{T}}$, $t\in[0,1]$, $n\geq1$. 则可以把 Q_t^n 作为 $[X]_t$ 的

一个估计量.

3 结　论

本文构建了一个多维非时齐的扩散模型,主要研究了收益参数向量的估计问题.通过对参数的局部复合分位回归估计的研究,得到了估计量的渐近性质,并且得到了 $\hat{\beta}_l(t_0)$,$(l=1,2,\cdots,m)$ 的渐近偏差和渐近方差.

参 考 文 献

[1] Ho T S Y,Sang L.Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims[J].The Journal of Finance,1986,41(5):1011-1029.

[2] Black F,Karasinski P.Bond and Option Pricing when Short Rates are Lognormal[J].Financial Analysts Journal,1991,47(4):52-59.

[3] Fan J,Jiang J,Zhang C,et al.Time-dependent diffusion models for term structure dynamics[J].Statistica Sinica,2003,13(4): 965-992.

[4] Fan J,Huang T.Profile likelihood inferences on semi-parametric varying-coefficient partially linear models[J].Bernoulli,2005,11:1031-1057.

[5] Hull J,White A.Pricing interest-rate-derivative securities[J].Review of Financial Studies,1990,3(4):573-592.

[6] 王继霞,肖庆宪.扩散模型复合分位回归估计的渐近正态性[J].河南师范大学学报(自然科学版),2014,42(2):25-28.

[7] 王继霞,张亚萌.半参数跳-扩散模型的近似极大似然估计——基于转移密度的闭式展开方法[J].河南师范大学学报(自然科学版),2018,46(4):23-28.

[8] Zou H,Yuan M.Composite quantile regression and the oracle Model Selection Theory[J].Annals of Statistics,2008,36:1108-1126.

[9] Kai B,Li R,Zou H.Local composite quantile regression smoothing: an efficient and safe alternative to local polynomial regression[M].Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology),2010,72:49-69.

[10] Kai B,Li R,Zou H.New efficient estimation and variable selection methods for semiparametric varying-coefficient partially linear models[J].Annals of Statistics,2011,39(1):305-332.

[11] 张俊华,花俊国.双重约束下原料奶价格波动的影响因素及其测度[J].河南农业大学学报,2017,51(3):430-439.

[12] Parzen E.On estimation of a probability density function and model[J].Ann Math Statist,1962,33:1065-1076.

[13] Pollard D.Asymptotics for least absolute deviation regression estimations[J].Econometr Theory,1991,7:186-199.

Local composite quantile regression estimation of return parameter vector for time-varying diffusion model

Wang Jing,Wang Jixia

(College of Mathematics and Information Science,Henan Normal University,Xinxiang 453007,China)

Abstract:Local composite quantile regression estimation of return parameter vector for time-varying diffusion model is studied. Based on discretely observed sample,the local linear composite quantile regression(CQR) estimation of the drift parameter vector is proposed by using the local linear fitting for parameter vector,and the asymptotic normality of local estimation is verified . Moreover,the asymptotic bias and asymptotic variance of the local estimation are provided.

Keywords:time-varying diffusion model;time-varying parameter vector;local linear fitting;composite quantile regression estimation;asymptotic normality

[责任编校　陈留院]