

# 完全可见下具有两类顾客和故障启动 排队系统的均衡分析

徐秀丽,王蕊

(燕山大学 理学院,河北 秦皇岛 066004)

**摘要:**针对两类平行顾客进入排队系统服务的问题,给出在完全故障且可中断启动时间排队模型中两类顾客的均衡策略分析.在该排队系统中,两类顾客平行到达且服从不同参数的负指数分布.系统在服务过程中可能会发生故障,只要系统发生故障就停止工作进入维修状态,直到维修完毕进入忙期.在完全可见的情形下,在考虑“收益-成本”的基础上,提出合理的效用函数对两类平行顾客进行均衡分析,根据自身收益情况考虑个体的最优策略和统筹全局的社会最优收益.此外,通过数值模拟分析系统参数对顾客行为策略的影响.

**关键词:**两类顾客;完全故障;启动时间;平均逗留时间;均衡策略

**中图分类号:**O226

**文献标志码:**A

随着排队模型的广泛应用,从经济学角度研究排队系统中顾客的行为问题引起了学者关注.文献[1]率先研究了 M/M/1 排队系统中的个体均衡策略和社会最优策略.文献[2]在可见情形和不可见情形下,分析了带启动时间排队系统的均衡策略.文献[3]研究了具有启动时间和完全故障及即刻修复性质的 M/M/1 排队服务模型中顾客的均衡策略.文献[4]分析了具有不可靠服务器和修复的可视 M/M/1 排队模型中顾客的均衡策略.赵国喜<sup>[5]</sup>在两种不同条件下研究了 M/M/1 延迟工作休假系统的均衡策略.高娃<sup>[6]</sup>基于进化博弈理论研究了 M/M/1 排队系统的顾客行为问题.

为了给顾客提供不同层次的服务,在排队系统中引入优先权.例如:医院在对病人进行分诊时,会根据病人的病情,优先救治受伤严重的病人.文献[7-8]先后研究了具有非强占优先权、强占优先权排队模型.李世斌等<sup>[9]</sup>对报警信号进行优先等级的划分,将优先排队应用于消防物联网之中.

在日常工作生活中,并不是所有顾客都具有优先权.比如,到银行办理业务的顾客,不仅有个人客户,还有公司客户,这两类顾客相互独立平行到达银行排队系统等待接受服务,在此过程中并没有优选级之分.但在已有文献中关于两类平行顾客均衡策略的研究尚不多见.程保安<sup>[10]</sup>分别从可见和不可见两个方面对 M/M/1 排队系统中的两类顾客进行均衡分析.张淞钰等<sup>[11]</sup>在不完全故障的系统中考虑了两类平行顾客均衡分析问题.基于此,本文研究两类平行到达且服从不同参数负指数分布的顾客在完全故障且具有可中断启动时间排队系统模型中的均衡策略分析.系统在服务过程中可能会发生完全故障,一旦故障发生系统将停止服务进入维修状态,直到维修完毕系统重新开始服务.在完全可见的情形下,基于非线性“报酬-损失”理论,导出顾客的个体均衡策略和社会最优策略.

## 1 模型描述

考虑一个等待空间无限的单服务台排队系统,系统中两类顾客均按照泊松过程到达且相互独立,到达间

收稿日期:2019-12-21;修回日期:2020-02-21.

基金项目:河北省自然科学基金(A2019203313);河北省高等学校科学研究重点项目(ZD2019079).

作者简介:徐秀丽(1976-),女,辽宁北票人,燕山大学教授,博士生导师,研究方向为随机模型及性能分析,E-mail:xxlysu@163.com.

通信作者:王蕊(1987-),女,河北秦皇岛人,燕山大学硕士研究生,研究方向为经济排队论,E-mail:420408429@qq.com.

隔时间分别服从参数分为  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  的负指数分布.服务时间服从参数为  $\mu$  的负指数分布.服务台在运行的过程中并不是完全可靠的,随时可能会发生故障.只要系统发生故障,服务台就立即停止工作且不再接收顾客而进入维修状态,维修结束进入正常服务状态.当所有顾客服务完毕后,则系统关闭.此外,当在关闭期时有顾客到达,则系统结束关闭期而转入忙期.否则,在关闭期结束后系统进入空闲状态直到有顾客到达时进入启动期.这种策略称为可中断启动关闭策略.其中关闭期和启动期都服从负指数分布,参数分别为  $\xi$  和  $\theta$ .假设系统出现完全故障的过程服从参数为  $\epsilon$  的泊松过程,在完全故障下的维修时间服从参数为  $\eta$  的负指数分布.

假设(两类)顾客到达过程、服务台的服务过程、启动期、关闭期、故障过程、维修过程都相互独立,系统采用先到先服务的规则.为了保证系统稳态,假定  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 < \mu$ .

设  $(N(t), I(t))$  表示系统在时刻  $t$  所处的状态,其中  $N(t)$  表示系统处于时刻  $t$  的顾客数,  $I(t)$  表示系统处于时刻  $t$  服务台的服务状态且有

$$I(t) = \begin{cases} 0, & \text{系统在时刻 } t \text{ 处于关闭期,} \\ 1, & \text{系统在时刻 } t \text{ 处于启动期,} \\ 2, & \text{系统在时刻 } t \text{ 处于忙期,} \\ 3, & \text{系统在时刻 } t \text{ 处于完全故障.} \end{cases}$$

显然,随机过程  $\{N(t), I(t) : t \geq 0\}$  是一个连续时间的马尔科夫过程,其状态空间为

$$\Omega = (0, 0) \cup \{(n, 1) : n \geq 0\} \cup \{(n, 2) : n \geq 1\} \cup \{(n, 3) : n \geq 1\}.$$

近年来专家学者们对排队经济学的研究大多都是基于线性效用函数,但随着研究的深入发现非线性效用函数更能满足实际生活的需要,详见文献[12-13].比如:顾客在排队等候时,随着等待时间不断延长,顾客的耐心几乎消耗殆尽,会越来越急躁,则单位时间的等待费用不断增加;又如在股票交易过程中,随着时间推移,每单位等待时间的花费是爆炸性增长的,显然这些现象更符合指数函数的特性.因此本文根据非线性“报酬-损失”理论构建效用函数,使研究更具有实际意义.

为了研究系统在均衡和社会最优条件下顾客的进队决策问题,假设第  $j$  类顾客服务结束后的平均效用函数表达式为

$$G_j(n, i) = R_j - C_j E(e^{\alpha T_j^{(n, i)}}), i, j = 1, 2, \quad (1)$$

其中  $R_j (j=1, 2)$  为第  $j$  类顾客在系统中完成服务后所得的收益,  $C_j (j=1, 2)$  为第  $j$  类顾客在系统中单位时间的逗留费用.在均衡状态下,假设两类顾客均为风险中立,两类顾客进入系统接受服务的个人目标均为获得自身利益的最大化,两类顾客在进入系统后不能中途退出而且决定止步后也不能再回到系统.

## 2 完全可见情形下的均衡策略分析

在完全可见的情形下,顾客在时刻  $t$  到达时既可以知道系统中的队长  $N(t)$  又可以观察到服务员所处的状态  $I(t)$ .假设系统发生完全故障后就进入维修且不再接收顾客,即顾客在状态  $(n, 3)$  时到达就只能选择止步.因此下面只需考虑顾客在状态  $(n, 1)$  和  $(n, 2)$  到达时的情况.假设存在阈值策略  $n_{ej}$  且“ $N(t) \leq n_{ej}(I(t))$ ,  $j=1, 2$  则进入系统,否则放弃离开”是唯一的纳什均衡策略,即第  $j (j=1, 2)$  类顾客到达时系统的状态为  $n_{ej}(i) + 1 (i, j=1, 2)$  时选择止步,并且假设第一类顾客先止步.在第一类顾客先止步的条件下,还要讨论  $n_{e1}(2)$  与  $n_{e2}(1)$  的大小,为了方便计算假设  $n_{e1}(2) \leq n_{e2}(1)$ ,则由假设可知系统在完全可见情形下的状态空间为

$\Omega_{fo} = (0, 0) \cup \{(n, 1) : 0 \leq n \leq n_{e2}(1)\} \cup \{(n, 2) : 1 \leq n \leq n_{e2}(2) + 1\} \cup \{(n, 3) : 1 \leq n \leq n_{e2}(2) + 1\}$ ,且系统在  $n_{e1}(2) \leq n_{e2}(1)$  条件下的状态转移如图 1 所示.

**定理 1** 在完全可见情形下,两类平行顾客到达可中断启动关闭策略且具有完全故障特性的排队系统中,两类顾客的门限策略为  $(n_{ej}(1), n_{ej}(2))$ ,  $j=1, 2$  即在第  $j$  类顾客到达系统时,如果  $N(t) \leq n_{ej}(I(t))$ ,

$j=1, 2$  则顾客选择进入,否则止步.其中  $(n_{ej}(1), n_{ej}(2)) = \left( \frac{\mu\eta}{\alpha(\eta + \epsilon)} \left( \ln \frac{R_j}{C_j} - \frac{1}{\theta} \right) - 1, \frac{\mu\eta}{\alpha(\eta + \epsilon)} \ln \frac{R_j}{C_j} - 1 \right)$ ,

$j=1, 2$ .

**证明** 记一个新顾客到达时观察到系统的状态为  $(n, i), i=1, 2$  且进入系统,那么第  $j$  类顾客平均逗留时间为

$$T_j(n, 1) = \frac{(\eta + \varepsilon)(n + 1)}{\mu\eta} + \frac{1}{\theta}, j = 1, 2, \tag{2}$$

$$T_j(n, 2) = \frac{(\eta + \varepsilon)(n + 1)}{\mu\eta}, j = 1, 2, \tag{3}$$

因此将(2)、(3)式代入(1)式可知第  $j$  类顾客的期望净收益为

$$G_j(n, 1) = R_j - C_j E \left( \exp \left( \alpha \frac{(\eta + \varepsilon)(n + 1)}{\mu\eta} + \frac{1}{\theta} \right) \right), j = 1, 2, \tag{4}$$

$$G_j(n, 2) = R_j - C_j E \left( \exp \left( \alpha \frac{(\eta + \varepsilon)(n + 1)}{\mu\eta} \right) \right), j = 1, 2. \tag{5}$$

对于理性顾客而言,只有当收益非负时,顾客在到达系统后才会选择进入排队.即  $G_j(n, i) \geq 0, i, j = 1, 2$  时进入.由(4)式和(5)式可得系统在不同状态下的阈值:

$$n_{ej}(1) = \frac{\mu\eta}{\alpha(\eta + \varepsilon)} \left( \ln \frac{R_j}{C_j} - \frac{1}{\theta} \right) - 1, n_{ej}(2) = \frac{\mu\eta}{\alpha(\eta + \varepsilon)} \ln \frac{R_j}{C_j} - 1, j = 1, 2,$$

当且仅当系统中的顾客数  $N(t) \leq n_{ej}(I(t)), j = 1, 2$  时,新到达的顾客才会选择进入系统.

**注 1** 由于  $G_j(n, i), i, j = 1, 2$  是严格单调递减函数,令  $R_2/C_2 \geq R_1/C_1$  时,则  $n_{e2}(I(t)) \geq n_{e1}(I(t))$ ,即第一类顾客先止步.

**注 2** 本文始终假定  $R_j > C_j E \left( \exp \left( \alpha \frac{(\eta + \varepsilon)(n + 1)}{\mu\eta} + \frac{1}{\theta} \right) \right), j = 1, 2$ ,以确保在启动期和忙期状态下,当系统中没有顾客时第  $j$  类顾客进入后所得到的收益大于 0,即确保系统为空时,顾客仍然愿意进入.

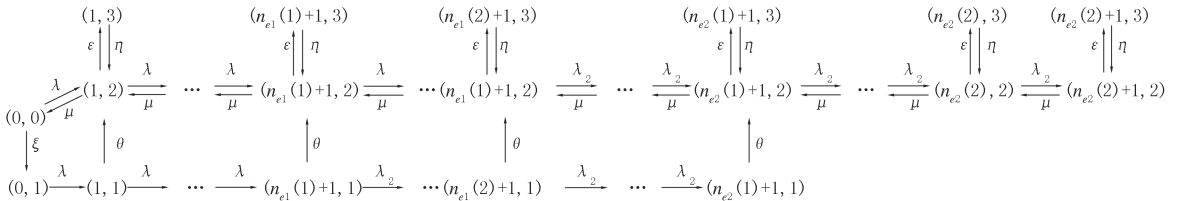


图 1 在  $n_{e1}(2) \leq n_{e2}(1)$  条件下的状态转移图

Fig.1 Transition rate diagram under conditions of  $n_{e1}(2) < n_{e2}(1)$

假设所有的顾客都遵循定理 1 中的阈值策略,设完全可见情形下的稳态分布为

$$\{P_{fo}(0, 0), P_{fo}(n, 1), n = 0, 1, \dots, n_{e2}(1) + 1,$$

$$P_{fo}(n, 2), n = 1, 2, \dots, n_{e2}(2) + 1, P_{fo}(n, 3), n = 1, 2, \dots, n_{e2}(2) + 1\},$$

可以得到稳态分布满足的平衡方程:

$$(\lambda + \xi)P_{fo}(0, 0) = \mu P_{fo}(1, 2), \tag{6}$$

$$\lambda P_{fo}(0, 1) = \xi P_{fo}(0, 0), \tag{7}$$

$$(\lambda + \theta)P_{fo}(n, 1) = \lambda P_{fo}(n - 1, 1), n = 1, 2, \dots, n_{e1}(1), \tag{8}$$

$$(\lambda_2 + \theta)P_{fo}(n_{e1}(1) + 1, 1) = \lambda P_{fo}(n_{e1}(1), 1), \tag{9}$$

$$(\lambda_2 + \theta)P_{fo}(n, 1) = \lambda_2 P_{fo}(n - 1, 1), n = n_{e1}(1) + 2, n_{e1}(1) + 3, \dots, n_{e2}(1), \tag{10}$$

$$\theta P_{fo}(n_{e1}(1) + 1, 1) = \lambda_2 P_{fo}(n_{e2}(1), 1), \tag{11}$$

$$(\lambda + \mu + \varepsilon)P_{fo}(1, 2) = \theta P_{fo}(1, 1) + \lambda P_{fo}(0, 0) + \eta P_{fo}(1, 3) + \mu P_{fo}(2, 2), \tag{12}$$

$$(\lambda + \mu + \varepsilon)P_{fo}(n, 2) = \theta P_{fo}(n, 1) + \lambda P_{fo}(n - 1, 2) + \eta P_{fo}(n, 3) + \mu P_{fo}(n + 1, 2), n = 2, 3, \dots, n_{e1}(2), \tag{13}$$

$$(\lambda_2 + \mu + \varepsilon)P_{fo}(n_{e1}(2) + 1, 2) = \theta P_{fo}(n_{e1}(2) + 1, 1) + \lambda P_{fo}(n_{e1}(2), 2) +$$

$$\eta P_{f_o}(n_{e_1}(2)+1,3) + \mu P_{f_o}(n_{e_1}(2)+2,2), \quad (14)$$

$$(\lambda_2 + \mu + \varepsilon)P_{f_o}(n,2) = \theta P_{f_o}(n,1) + \lambda_2 P_{f_o}(n-1,2) + \eta P_{f_o}(n,3) + \mu P_{f_o}(n+1,2), n = n_{e_1}(2) + 2, \dots, n_{e_2}(1) + 1, \quad (15)$$

$$(\lambda_2 + \mu + \varepsilon)P_{f_o}(n,2) = \lambda_2 P_{f_o}(n-1,2) + \eta P_{f_o}(n,3) + \mu P_{f_o}(n+1,2), n = n_{e_2}(1) + 2, n_{e_2}(1) + 3, \dots, n_{e_2}(2), \quad (16)$$

$$(\mu + \varepsilon)P_{f_o}(n_{e_2}(2)+1,2) = \lambda_2 P_{f_o}(n_{e_2}(2),2) + \eta P_{f_o}(n_{e_2}(2)+1,3), \quad (17)$$

$$\eta P_{f_o}(n,3) = \varepsilon P_{f_o}(n,2), n = 1, 2, \dots, n_{e_2}(2) + 1. \quad (18)$$

$$\text{记 } \rho = \frac{\lambda}{\mu}, \rho_1 = \frac{\lambda_2}{\mu}, \sigma = \frac{\lambda}{\lambda + \theta}, \sigma_1 = \frac{\lambda}{\lambda_2 + \theta}, \sigma_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \theta}, \gamma = \frac{\xi}{\lambda + \xi}, \nu = \frac{\lambda}{\lambda + \xi}, K = \frac{\theta\gamma}{\rho}.$$

**定理 2** 在完全可见情形下,两类平行顾客到达可中断启动关闭策略且具有完全故障特性的排队系统中,如果所有的顾客均遵循门限策略 $(n_{e_j}(1), n_{e_j}(2)), j=1, 2$ ,那么系统的稳态概率为:

$$P_{f_o}(0,0) = H \frac{\mu}{\lambda + \xi}, P_{f_o}(0,1) = H \frac{\gamma}{\rho}, P_{f_o}(n,1) = H \frac{\xi \sigma^n}{\rho(\lambda + \xi)}, n = 1, 2, \dots, n_{e_1}(1),$$

$$P_{f_o}(n_{e_1}(1)+1,1) = H \frac{\xi \sigma^{n_{e_1}(1)} \sigma_1}{\rho(\lambda + \xi)}, P_{f_o}(n,1) = H \frac{\xi \sigma^{n_{e_1}(1)} \sigma_1 \sigma_2^{n-n_{e_1}(1)-1}}{\rho(\lambda + \xi)}, n = n_{e_1}(1) + 2, n_{e_1}(1) + 3, \dots, n_{e_2}(1),$$

$$P_{f_o}(n_{e_2}(1)+1,1) = H \frac{\lambda_2 \xi \sigma^{n_{e_1}(1)} \sigma_1 \sigma_2^{n-n_{e_1}(1)-1}}{\theta \rho(\lambda + \xi)}, P_{f_o}(n,2) = A_1 + B_1 \rho^n + C_1 \sigma^n, n = 2, 3, \dots, n_{e_1}(1),$$

$$P_{f_o}(n_{e_1}(1)+1,2) = H \left( \rho^{n_{e_1}(1)-1} \left( \rho - \frac{\theta\gamma\sigma}{\lambda} - \gamma \right) (\rho + 1) - \frac{K\sigma^2 (\rho^{n_{e_1}(1)-1} - \sigma^{n_{e_1}(1)-1})}{\mu(\rho - \sigma)} \right),$$

$$P_{f_o}(n,2) = A_2 + B_2 \rho^n + C_2 \sigma_2^n, n = n_{e_1}(1) + 2, \dots, n_{e_1}(2),$$

$$P_{f_o}(n_{e_1}(2)+1,2) = A_2 + B_2 \rho^{n_{e_1}(2)+1} + C_2 \sigma_2^{n_{e_1}(2)-1} (\sigma_2 + \rho \sigma_2 - \rho) - H \frac{K \sigma^{n_{e_1}(1)} \sigma_1 \sigma_2^{n_{e_1}(2)-n_{e_1}(1)-1}}{\mu},$$

$$P_{f_o}(n,2) = A_3 + B_3 \rho^n + C_3 \sigma_2^n, n = n_{e_1}(2) + 2, \dots, n_{e_2}(1) + 1,$$

$$P_{f_o}(n,2) = \rho_1^{n-n_{e_2}(1)-1} (A_3 + B_3 \rho^{n_{e_2}(1)+1} + C_3 \sigma_2^{n_{e_2}(1)+1}), n = n_{e_2}(1) + 2, \dots, n_{e_2}(2) + 1,$$

$$P_{f_o}(n,3) = H \frac{\varepsilon}{\eta}, n = 1, 2, \dots, n_{e_2}(2) + 1.$$

其中  $P_{f_o}(1,2) = H$  可由正规化条件  $\sum_{n=0}^{n_{e_2}(1)+1} P_{f_o}(n,1) + \sum_{n=1}^{n_{e_2}(2)+1} P_{f_o}(n,2) + \sum_{n=1}^{n_{e_2}(2)+1} P_{f_o}(n,3) + P_{f_o}(0,0) = 1$  确定.

**证明** 记  $P_{f_o}(1,2) = H$  迭代(8)式,结合(6)式和(7)式可得

$$P_{f_o}(n,1) = H \frac{\xi \sigma^n}{\rho(\lambda + \xi)}, n = 1, 2, \dots, n_{e_1}(1), \quad (19)$$

由(9)式和(19)式可得

$$P_{f_o}(n_{e_1}(1)+1,1) = H \frac{\xi \sigma^{n_{e_1}(1)} \sigma_1}{\rho(\lambda + \xi)}, \quad (20)$$

迭代(10)式和(20)式可得  $P_{f_o}(n,1) = H \frac{\xi \sigma^{n_{e_1}(1)} \sigma_1 \sigma_2^{n-n_{e_1}(1)-1}}{\rho(\lambda + \xi)}, n = n_{e_1}(1) + 2, n_{e_1}(1) + 3, \dots, n_{e_2}(1)$ ,由(10)式

和(11)式可得  $P_{f_o}(n_{e_2}(1)+1,1) = H \frac{\lambda_2 \xi \sigma^{n_{e_1}(1)} \sigma_1 \sigma_2^{n-n_{e_1}(1)-1}}{\theta \rho(\lambda + \xi)}$ .

由(13)式和(18)式可以看出  $\{P_{f_o}(n,2) : n = 2, 3, \dots, n_{e_1}(2)\}$  是常系数非齐次线性差分方程

$$\mu x_{n+1} - (\lambda + \mu)x_n + \lambda x_{n-1} = -\theta P_{f_o}(n,1), n = 2, 3, \dots, n_{e_1}(2) \quad (21)$$

的解.

由于  $P_{f_o}(n,1)$ 是关于  $n$  的分段函数.故(21)式可写成

$$\mu x_{n+1} - (\lambda + \mu)x_n + \lambda \chi_{n-1} = -HK\sigma^n, n = 2, \dots, n_{e_1}(1), \quad (22)$$

$$\mu x_{n+1} - (\lambda + \mu)x_n + \lambda x_{n-1} = -HK\sigma^{n_{e_1}(1)}, n = n_{e_1}(1) + 1,$$

$$\mu x_{n+1} - (\lambda + \mu)x_n + \lambda x_{n-1} = -HK\sigma^{n_{e_1}(1)}\sigma_1\sigma_2^{n-n_{e_1}(1)-1}, n = n_{e_1}(1) + 2, \dots, n_{e_2}(1). \quad (23)$$

由于(22)式相应的齐次特征方程  $\mu x^2 - (\lambda + \mu)x + \lambda = 0$  具有两个非负解:  $1$  和  $\rho$  ( $\rho \neq 1$ ). 因此,非齐次差分方程(22)式的通解为

$$x_n^{gen} = A_1 1 + B_1 \rho^n + C_1 \sigma^n, n = 2, 3, \dots, n_{e_1}(1), \quad (24)$$

其中  $A_1, B_1$  为待定常数,  $C_1 = -H \frac{K\sigma}{\mu\sigma^2 - (\lambda + \mu)\sigma + \lambda}$ .

结合(6)、(7)、(12)式和(18)式可得

$$P_{fo}(2, 2) = H \left( \rho + 1 - \frac{\theta\gamma\sigma}{\lambda} - \nu \right), \quad (25)$$

在(24)式中取  $n=2$  时并结合(25)式可得

$$A_1 + B_1 \rho^2 + C_1 \sigma^2 = H \left( \rho + 1 - \frac{\theta\gamma\sigma}{\lambda} - \nu \right), \quad (26)$$

在(7)式中取  $n=2$ , 并考虑(24)式可得

$$A_1 + B_1 \rho = H \left( \frac{k\sigma^2}{\lambda} + 1 \right) + C_1 \sigma^2 \left( \frac{\sigma - 1}{\rho} - 1 \right), \quad (27)$$

(26)式与(27)式相减, 可得

$$A_1 = H \left( \frac{K\sigma^2 \rho - \lambda + \theta\gamma\sigma + \nu\lambda}{\lambda(\rho - 1)} \right) + \frac{C_1 \sigma^2 (\sigma - \rho)}{(\rho - 1)}, B_1 = H \left( \frac{\lambda\rho - \theta\gamma\sigma - K\sigma^2 - \nu\lambda}{\lambda\rho(\rho - 1)} \right) - \frac{C_1 \sigma^2 (\sigma - 1)}{\rho^2 (\rho - 1)}.$$

类似地, (23)式的通解表达式为

$$x_n^{gen} = A_2 1 + B_2 \rho^n + C_2 \sigma_2^n, n = n_{e_1}(1) + 2, n_{e_1}(1) + 3, \dots, n_{e_1}(2), \quad (28)$$

其中

$$C_2 = -H \frac{K\sigma^{n_{e_1}(1)}\sigma_1\sigma_2}{\mu\sigma_2^2 - (\lambda + \mu)\sigma_2 + \lambda}, B_2 = \frac{-HK\sigma^{n_{e_1}(1)}\sigma_1\sigma_2 - C_2\sigma_2^{n_{e_1}(1)+1}(\mu\sigma_2^2 - (\lambda + \mu)\sigma_2 + \lambda)}{\rho^{n_{e_1}(1)+1}(\mu\rho^2 - (\lambda + \mu)\rho + \lambda)},$$

$$A_2 = A_1 + B_1 \rho^{n_{e_1}(1)} + C_1 \sigma^{n_{e_1}(1)} + H(\rho + 1) \left( \rho^{n_{e_1}(1)-1} \left( \rho - \frac{\theta\gamma\sigma}{\lambda} - \gamma \right) - \frac{K\sigma^2 (\rho^{n_{e_1}(1)-1} - \sigma^{n_{e_1}(1)-1})}{\mu(\rho - \sigma)} \right) - K\sigma^{n_{e_1}(1)}\sigma_1 P_{fo}(1, 2) - B_2 \rho^{n_{e_1}(1)+2} + C_2 \sigma_2^{n_{e_1}(1)+2}.$$

由(15)式和(18)式可以得出  $\{P_{fo}(n, 2) : n = n_{e_1}(2) + 2, n_{e_1}(2) + 3, \dots, n_{e_2}(1) + 1\}$  是常系数非齐次线性差分方程

$$\mu x_{n+1} - (\lambda_2 + \mu)x_n + \lambda_2 x_{n-1} = -\theta P_{fo}(n, 1) = -HK\sigma^{n_{e_1}(1)}\sigma_1\sigma_2^{n-n_{e_1}(1)-1}, n = n_{e_1}(2) + 2, n_{e_1}(2) + 3, \dots, n_{e_2}(1) + 1 \quad (29)$$

的解, 则(29)式的通解表达式为  $x_n^{gen} = A_3 1 + B_3 \rho^n + C_3 \sigma_2^{n-n_{e_1}(1)-1}, n = n_{e_1}(2) + 2, n_{e_1}(2) + 3, \dots, n_{e_2}(1) + 1$ , 其中

$$A_3 = A_2(\rho_1 + 1 - \rho) + B_2 \rho_1 \rho^{n_{e_1}(2)+1} - H \frac{K\sigma_1 \sigma^{n_{e_1}(1)} \sigma_2^{n_{e_1}(2)-n_{e_1}(1)-1} (\rho_1 + 1 - \sigma)}{\mu} - B_3 \rho^{n_{e_1}(2)+2} - C_3 \sigma_2^{n_{e_1}(1)+2},$$

$$B_3 = \frac{-HK\sigma^{n_{e_1}(1)}\sigma_1\sigma_2^{n_{e_1}(2)-n_{e_1}(1)+1} - C_3\sigma^{n_{e_1}(2)+1}(\mu\sigma_2^2 - (\lambda_2 + \mu)\sigma_2 + \lambda_2)}{\rho^{n_{e_1}(2)+1}(\mu\rho^2 - (\lambda_2 + \mu)\rho + \lambda_2)}, C_3 = -H \frac{K\sigma^{n_{e_1}(1)}\sigma_1\sigma_2}{\mu\sigma_2^2 - (\lambda_2 + \mu)\sigma_2 + \lambda_2}.$$

由(16)式和(17)式递推可得

$$P_{fo}(n, 2) = \rho_1 P_{fo}(n-1, 2) = \rho_1^{n-n_{e_2}(1)-1} (A_3 + B_3 \rho^{n_{e_1}(1)+1} + C_3 \sigma_2^{n_{e_2}(1)+1}), n = n_{e_2}(1) + 2, n_{e_2}(1) + 3, \dots, n_{e_2}(2) + 1.$$

根据(18)式可得  $P_{fo}(n, 3) = \frac{\varepsilon}{\eta} P_{fo}(n, 2), n = 1, 2, \dots, n_{e_2}(2) + 1$ .

最后,  $P_{fo}(1, 2)$  可由正规化条件  $\sum_{n=0}^{n_{e_2}(1)+1} P_{fo}(n, 1) + \sum_{n=1}^{n_{e_2}(2)+1} P_{fo}(n, 2) + \sum_{n=1}^{n_{e_2}(2)+1} P_{fo}(n, 3) + P_{fo}(0, 0) = 1$

确定.

另一方面,记每类顾客的平均社会收益为  $W_{foj} = \lambda_{ej}R_j - C_jE_{fo}(L_j), j = 1, 2$ , 两类顾客的到达率分别为  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ , 则两类顾客到达的概率分别为  $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ .

**定理 3** 在完全可见情形下, 两类平行顾客到达可中断启动关闭策略具有完全故障特性的排队系统中, 如果所有的顾客都遵循门限策略为  $(n_{ej}(1), n_{ej}(2)), j = 1, 2$ , 那么单位时间内的总均衡社会收益为

$$W_{fo} = \sum_{j=1}^2 (\lambda_{ej}R_j - C_jE_{fo}(L_j)), j = 1, 2,$$

其中,  $\lambda_{ej}, j = 1, 2$  表示第  $j$  类顾客的有效到达率,  $E_{fo}(L_j), j = 1, 2$  表示第  $j$  类顾客的平均队长. 且

$$\lambda_{e1} = \lambda_1 \left( \sum_{n=0}^{n_{e1}(1)} P_{fo}(n, 1) + \sum_{n=1}^{n_{e1}(2)} P_{fo}(n, 2) + P_{fo}(0, 0) \right), \lambda_{e2} = \lambda_2 \left( \sum_{n=0}^{n_{e2}(1)} P_{fo}(n, 1) + \sum_{n=1}^{n_{e2}(2)} P_{fo}(n, 2) \right),$$

和

$$E_{fo}(L_1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left( \sum_{n=0}^{n_{e1}(1)+1} nP_{fo}(n, 1) + \sum_{n=1}^{n_{e1}(2)+1} n(P_{fo}(n, 2) + P_{fo}(n, 3)) + P_{fo}(0, 0) \right),$$
$$E_{fo}(L_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left( \sum_{n=0}^{n_{e1}(1)+1} nP_{fo}(n, 1) + \sum_{n=1}^{n_{e1}(2)+1} n(P_{fo}(n, 2) + P_{fo}(n, 3)) + P_{fo}(0, 0) \right) + \sum_{n=n_{e1}(1)+2}^{n_{e2}(1)} nP_{fo}(n, 1) + \sum_{n=n_{e1}(2)+2}^{n_{e1}(2)+1} n(P_{fo}(n, 2) + P_{fo}(n, 3)).$$

### 3 数值分析

基于上述结果, 本节通过数值分析讨论在完全可见的情况下, 系统发生故障、启动时间、维修时间和服务时间这些因素对个体进队策略的影响, 不妨假设  $R_1 = 9, R_2 = 10, C_1 = 1, C_2 = 2$ .

① 当  $\mu = 2, \eta = 2, \theta = 2, \alpha = 0.05$  时, 图 2 为均衡阈值策略随  $\epsilon$  的变化状况. 从图 2 可以看出随着  $\epsilon$  的增加, 两类平行顾客在两种状态下均呈现出递减的趋势, 则减少故障的发生, 将会使系统容纳更多的客户.

② 当  $\mu = 2, \eta = 2, \epsilon = 2, \alpha = 0.05$  时, 图 3 为均衡阈值策略随  $\theta$  的变化状况. 从图 3 可见看出在状态 2 的情况下, 均衡阈值策略不受启动时间变化的影响, 但当系统处于状态 1 时, 随着  $\theta$  的增加, 系统中的均衡阈值策略呈递增趋势, 则降低启动时间可以使更多的客户愿意进入系统.

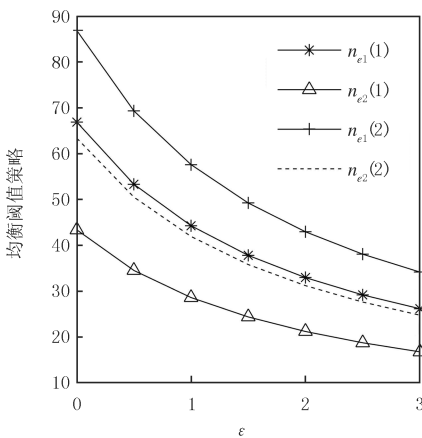


图2 均衡阈值策略随  $\epsilon$  的变化图

Fig.2 Equilibrium thresholds with respect to  $\epsilon$

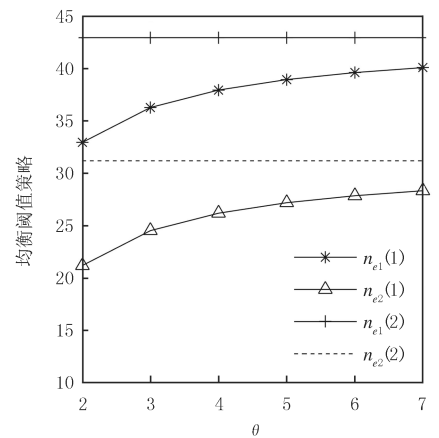


图3 均衡阈值策略随  $\theta$  的变化图

Fig.3 Equilibrium thresholds with respect to  $\theta$

③ 当  $\mu = 2, \epsilon = 2, \theta = 2, \alpha = 0.05$  时, 图 4 为均衡阈值策略随  $\eta$  的变化状况. 从图 4 可以看出随着  $\eta$  的增加, 均衡阈值策略也呈现递增趋势, 则维修效率的提高可以增加系统中的顾客数.



④ 当  $\theta=2, \eta=2, \varepsilon=2, \alpha=0.60$  时,图 5 为均衡阈值策略随  $\mu$  的变化状况.从图 5 可以看出随着  $\mu$  的增加,两类平行顾客在两种状态下的均衡阈值策略呈缓慢递增趋势,则服务效率的提高可以降低顾客的等待时间,使更多的客户愿意等待接受服务.

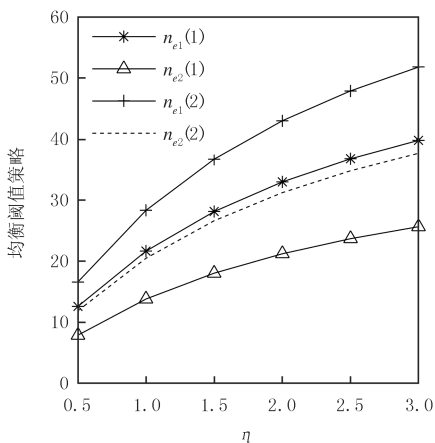


图4 均衡阈值策略随  $\eta$  的变化图

Fig.4 Equilibrium thresholds with respect to  $\eta$

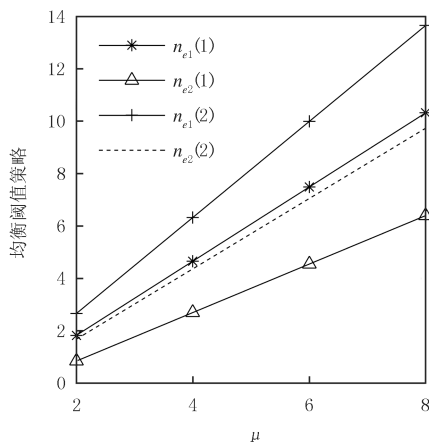


图5 均衡阈值策略随  $\mu$  的变化图

Fig.5 Equilibrium thresholds with respect to  $\mu$

## 4 结 论

本文研究完全故障且可中断启动时间 M/M/1 排队模型中两类顾客的均衡策略分析.在完全可见的情形下,基于“收益-成本”效用函数,研究顾客进队的个体最优策略.通过解平衡方程,求出系统的稳态概率分布,进而分析统筹全局的社会最优收益.最后,通过数值分析对模型的均衡阈值策略进行验证,从而为个体和管理者进行决策时提供一定的理论依据.

本文仅在完全可见的情形下,对模型进行了经济学分析,并没有考虑几乎可见及不可见情况下两类顾客且完全故障启动时间 M/M/1 排队模型的经济学分析,后续将针对该方面进行深入研究.

## 参 考 文 献

- [1] NAOR P.The Regulation of Queue Size by Levying Tolls[J].Econometrica,1969,37(1):15-24.
- [2] BURNETAS A,ECONOMOU A.Equilibrium Customer Strategies in a Single Server Markovian Queue with Setup Times[J].Queueing Systems,2007,56(3/4):213-228.
- [3] CHEN P S,ZHOU Y W.Equilibrium Balking Strategies in the Single Server Queue with Setup Times and Breakdowns[J].Operational Research:An International Journal,2015,15(2):213-231.
- [4] ECONOMOU A,KANTA S.Equilibrium Balking Strategies in the Observable Single-Server Queue with Breakdowns and Repairs[J].Operations Research Letters,2008,36(6):696-699.
- [5] 赵国喜.M/M/延迟工作休假系统的均衡策略[J].河南师范大学学报(自然科学版),2016,44(1):36-41.  
ZHAO G X.Equilibrium Strategies in M/M/1 Queuing System with Delayed Working Vacation[J].Journal of Henan Normal University (Natural Science Edition),2016,44(1):36-41.
- [6] 高娃.进化博弈视角下 M/M/1 排队系统的顾客行为分析[J].内蒙古财经大学学报,2016,14(6):1-8.  
GAO W.An Analysis of M/M/1 Queuing Performance from the Perspective of Evolutionary Game Theory[J].Journal of Inner Mongolia University of Finance and Economics,2016,14(6):1-8.
- [7] GAIL H R,HANTLER S L,Taylor B A.Analysis of a Non-preemptive Priority Multiserver Queue[J].Advances in Applied Probability,1988,20(4):852-879.
- [8] GAIL H R,HANTLER S L,Taylor B A.On a Preemptive Markovian Queue with Multiple Servers and Two Priority Classes[J].Mathematic of Operation Research,1992,17(2):364-391.
- [9] 李世斌,金彦亮,姚炜,等.优先权排队在消防物联网中的应用[J].计算测量与控制,2017,25(4):189-192.  
LI S B,JIN Y L,YAO W,et al.Application of Priority Queuing in FS IOT[J].Computer Measurement & Control,2017,25(4):189-192.

- [10] 程保安.两类顾客排队的均衡策略研究[D].太原:山西大学,2016.  
CHENG B A.Equilibrium Strategies of Queueing System with Two Types of Customers[D].Taiyuan:Shanxi University,2016.
- [11] 张淞钰,徐秀丽.具有两类平行顾客的不完全故障排队系统均衡分析[J].系统科学与数学,2019,39(4):637-647.  
ZHAN S T,XU X L.Equilibrium Analysis of Queueing System with Two Types of Parallel Customers and Partial Failures[J].Journal of Systems Science and Mathematical Sciences,2019,39(4):637-647.
- [12] SANJEEV D,HAIM M.User Delay Cost and Internal Pricing for a Service Facility[J].Management Science,1990,36(12):1502-1517.
- [13] STRINAGESH G,VIDDYAHAR G.Self-Selecting Priority Queues with Burr Distributed Waiting Costs[J].Production and Operations Management,2016.DOI:10.1111/poms.12520.

## Equilibrium strategies of queueing system with two types of parallel customers, breakdowns and setup times in fully visible case

Xu Xiuli, Wang Rui

(School of Science, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

**Abstract:** Considering two types of parallel customers in the queuing system, equilibrium strategies of the queuing model with breakdown and interruptible type of setup/closedown policies are analyzed, thereby two types of customers arrive in parallel and follow different exponential distribution, respectively. During the busy periods, the server may breakdown, once a breakdown occurs, the server will start to be repaired immediately until the repair is completed, and enter the busy period. The equilibrium balking strategies of the two types of customers and the average social benefits of the system are discussed under the reward-cost structure in the full observable. In addition, numerical experiments are presented.

**Keywords:** parallel customers; breakdown; setup time; mean sojourn time; equilibrium strategy

[责任编辑 陈留院 赵晓华]





## 本期专家介绍



刘文安,河南师范大学教授,博士,河南省优秀教师,河南省科技创新杰出青年,河南省教育厅学术技术带头人.主要从事应用概率与统计、组合最优化、计算机数学等方面研究,兼任美国《数学评论》评论员,*International Journal of Game Theory, Discrete Math, Discrete Appl Math, Theoretical Computer Science* 等 SCI 期刊审稿人,河南省数学会常务理事,河南省应用统计学会常务理事、副秘书长,河南省统计学类教学指导委员会副主任委员.主持参与完成国家自然科学基金(面上项目)5 项,河南省高校科技创新团队及河南省基础研究等省级项目 5 项,在 *Discrete Appl Math, Theoretical Computer Science, J Statist Plann Inference* 等国内外学术期刊发表学术论文 50 余篇,出版专著《离散空间上的容错搜索理论》1 部,主编《概率论与数理统计》教材 2 部.

徐秀丽,燕山大学教授,博士,博士生导师,研究方向为随机服务系统理论及优化、流体排队模型理论及其经济学分析.中国运筹学会随机服务与运作管理分会常务理事,河北省现场统计学会副理事长,河北省统计学会常务理事,河北省统计学会学术委员会委员.主持国家自然科学基金项目和多项河北省自然科学基金项目.已在相关领域主要学术期刊上发表论文 60 余篇,其中近 30 篇在 SCI, EI 源期刊上发表,完成专著 1 部.“多服务台休假排队系统的理论和方法”获河北省自然科学三等奖.“自组织传感网络节能关键技术研究与应用”获河北省科学技术进步三等奖.2015 年入选河北省新世纪“三三人才工程”.



田建襄,广西师范大学教授,博士,博士生导师,2001 年在西北师范大学获理学硕士学位,2004 年于兰州大学化学与化工学院博士研究生毕业并获理学博士学位,主要研究方向为纳米光学探针及生物传感分析,在 *Biosensors and Bioelectronics, Chemical Communication, Analytical Chimica Acta, Sensors and Actuators B, Analyst* 等 SCI 源期刊发表论文 70 余篇,已主持国家自然科学基金 3 项,2014 年作为第二完成人获得广西壮族自治区自然科学奖二等奖.