

偏缠绕模的 Maschke 型定理

郭双建¹, 董丽红²

(1. 贵州财经大学 数学与统计学院, 贵阳 550025; 2. 河南师范大学 数学与信息科学学院, 河南 新乡 453007)

摘 要: 设 (A, C, φ) , (A', C', φ') 为两偏缠绕结构, 给定 $\alpha: A \rightarrow A'$ 和 $\gamma: C \rightarrow C'$. 引入两个偏缠绕模范畴 $\mathcal{M}(\varphi)_A^C$ 和 $\mathcal{M}(\varphi')_{A'}^{C'}$ 的导出函子 F , 并证明此导出函子 F 有右伴随函子 $G: \mathcal{M}(\varphi')_{A'}^{C'} \rightarrow \mathcal{M}(\varphi)_A^C$. 最后, 引入偏正规化余积分 $\theta: C \rightarrow A \otimes A$ 的概念并证明了偏缠绕模范畴的 Maschke 型定理, 也就是说, 假设存在偏正规化余积分, 给定 $\mathcal{M}_A^C(\varphi)$ 中态射 $f: M \rightarrow N$, 则有当单(满)态射 f 看作 C -余模态射可分裂时, 必有单(满)态射 f 在 $\mathcal{M}_A^C(\varphi)$ 中可分裂.

关键词: 偏缠绕模; 伴随函子; 偏正规化余积分; Maschke 型定理

中图分类号: O153.3

文献标志码: A

在本文中, 假设 k 是一个域, 有关 Hopf 代数以及范畴方面的内容可参见文献[1-3].

群的偏作用是由文献[4]在研究 Hilbert 空间上算子代数时引入的, 偏群作用在研究 Hilbert 空间偏等距生成的 C^* 代数时是一个强有力的工具, 此概念的发展经历了交叉积^[5]和偏表示^[6]的研究阶段, 最终成为环论中一个独立的分支. 文献[7]借助偏缠绕结构的概念引入了偏 Hopf 作用. 决定函子是否可分是一个非常棘手的问题, 常用的判别准则是 Refael 定理^[8]. 给定一个缠绕结构 (A, C, φ) , 自然得到缠绕模范畴 $\mathcal{M}_A^C(\varphi)$ 到右 A -模范畴 $\mathcal{M}_A(\varphi)$ 间的忘却函子 F , 在讨论忘却函子 F 的可分性时, 文献[9]引入 A -积分概念, 证明了 A -积分的存在性是刻画忘却函子 F 是否可分的标准. 受文献[9]的启发, 郭双建和王栓宏^[10]对偏缠绕模进行了研究, 刻画了忘却函子 $F: \mathcal{M}_A^C(\varphi) \rightarrow \mathcal{M}_A(\varphi)$ 的可分性. 继续对偏缠绕模进行研究, 引入两个偏缠绕模范畴之间的导出函子, 并证明此导出函子有右伴随函子. 最后, 作为应用引入正规化余积分的概念, 并证明了偏缠绕模范畴的 Maschke 型定理.

1. 预备知识

定义 1 设 C 为 k 上的余代数, A 为 k 上的代数, 设 φ 为 k -线性映射 $\varphi: C \otimes A \rightarrow A \otimes C$, 满足下列条件:

1) 对任意的 $a, b \in A$ 和 $c \in C$,

$$(ab)_\varphi \otimes c^\varphi = a_\varphi b_{\varphi'} \otimes c^{\varphi\varphi'};$$

2) 对任意的 $a \in A$ 和 $d \in C$,

$$\alpha_\varphi 1_A \otimes d^\varphi(1)^\varphi \otimes d^\varphi(2) = a_{\varphi\varphi} \otimes d_{\varphi(1)} \otimes d_{\varphi(2)};$$

3) 对任意的 $c \in C, a \in A$,

$$\varepsilon(c^\varphi) a_\varphi = \varepsilon(c) a.$$

则二元组 (A, C, φ) 称为右-右偏缠绕结构, 记为 $(A, C)_\varphi$. 映射 φ 称为偏缠绕映射. 对任意的 $c \in C$ 和 $a \in A$, 记 $\varphi(c \otimes a) = \sum a_\varphi \otimes c^\varphi$.

给定一个右-右偏缠绕结构 $(A, C)_\varphi$, 则可以得到一个右 $(A, C)_\varphi$ -模范畴 $\mathcal{M}_A^C(\varphi)$, 称向量空间 M 为 $\mathcal{M}_A^C(\varphi)$

收稿日期: 2015-03-17; 修回日期: 2015-12-27.

基金项目: 国家自然科学基金(11371088); 国家数学天元基金(11426073); 河南省基础与前沿技术研究计划(152300410086); 江苏省自然科学基金(BK2012736); 贵州省科技厅基金项目(2014GZ81365).

第 1 作者简介(通信作者): 郭双建(1981-), 男, 山东菏泽人, 贵州财经大学副教授, 博士, 主要从事 Hopf 代数和量子群的研究, E-mail: shuangguo@gmail.com.

中的对象,如果存在结合 k - 线性映射 $\phi: M \otimes A \rightarrow M$ 和 k - 线性映射 $\rho^M: M \rightarrow \mathcal{M} \otimes C$ (称为在 M 上的偏 C - 余作用) 满足下列条件:

(C1) (M, ϕ) 是右 A - 模;

(C2) 对任意的 $m \in M$,

$$m_{[0][0]} \otimes m_{[0][1]} \otimes m_{[1]} = m_{[0]} \cdot 1_{A_{\psi}} \otimes m_{1}^{\psi} \otimes m_{[1](2)}^{\psi};$$

(C3) 对任意的 $m \in M$ 和 $a \in A$,

$$\rho^M(m \cdot a) = m_{[0]} \cdot a_{\psi} \otimes m_{[1]}^{\psi},$$

(C4) 对任意的 $m \in M, \epsilon(m_{[1]})m_{[0]} = m$.

采用下列符号:对任意的 $m \in M, \rho^M(m) = m_{[0]} \otimes m_{[1]}$. 在 \mathcal{M}_A^{ψ} 中两个偏缠绕模 M 和 N 之间的同态 $f: M \rightarrow N$ 既是右 A - 线性映射又是右 C - 余线性映射,即满足: $f(m)_{[0]} \otimes f(m)_{[1]} = f(m_{[0]}) \otimes m_{[1]}$.

定义 2 设 \mathcal{C}, \mathcal{D} 为两个范畴, $F: C \rightarrow D$ 为双函子. 注意到两个共变函子

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot): C^{\text{op}} \times C \rightarrow \text{Sets}, \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(\cdot), F(\cdot)): C^{\text{op}} \times C \rightarrow \text{Sets}$$

和一个自然变换

$$\mathcal{F}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(\cdot), F(\cdot)),$$

称 F 是可分的,如果 \mathcal{F} 是可分裂的. 假设 $F: C \rightarrow D$ 存在右伴随函子 $G: D \rightarrow C$, 设 $\eta: 1_C \rightarrow GF, \delta: FG \rightarrow 1_D$ 为 (F, G) 的单位与余单位.

Rafael's 定理 设 $G: D \rightarrow C$ 为 $F: C \rightarrow D$ 的右伴随函子. 则 F 是可分的当且仅当 η 可分裂的,也就是存在自然变换 $\nu: GF \rightarrow 1_C$ 使得 $\nu \circ \eta$ 为 C 上的恒等自然变换.

2 导出函子

定理 1 给定两个偏缠绕结构 (A, C, ψ) 和 (A', C', ψ') , 假设存在线性映射 $\alpha: A \rightarrow A'$ 和 $\gamma: C \rightarrow C'$ 分别为代数和余代数同态,且满足:对任意的 $c \in C, a \in A$,

$$\alpha(a_{\psi}) \otimes \gamma(c^{\psi}) = \alpha(a)_{\psi'} \otimes \gamma(c)^{\psi'}, \tag{1}$$

则定义函子 $F: \mathcal{M}(\psi)_A^{\psi} \rightarrow \mathcal{M}(\psi')_{A'}^{\psi'}$ 如下:

$$F(M) = M \otimes_{A'} A',$$

这里 A' 的左 A - 模是由 α 诱导出的, $F(M)$ 上的偏缠绕结构为:对任意的 $a', b' \in A', m \in M$,

$$(m \otimes_{A'} a') \cdot b' = m \otimes_{A'} a' b',$$

$$\rho_{F(M)}(m \otimes_{A'} a') = m_{[0]} \otimes_{A'} a'_{\psi'} \otimes \gamma(m_{[1]})^{\psi'},$$

称函子 F 为导出函子.

证明 为了证明 $M \otimes_{A'} A'$ 为 $\mathcal{M}(\psi')_{A'}^{\psi'}$ 中的对象,只需证 $M \otimes_{A'} A'$ 满足条件(C2) ~ (C4). 即注意到 $M \otimes_{A'} A'$ 显然满足条件(C4). 下证 $M \otimes_{A'} A'$ 满足(C2) 和(C3). 取 $m \in M, a', b' \in A'$, 则有

$$\begin{aligned} \rho_{F(M)}((m \otimes_{A'} a') \cdot b') &= m_{[0]} \otimes_{A'} (a' b')_{\psi'} \otimes \gamma(m_{[1]})^{\psi'} = m_{[0]} \otimes_{A'} a'_{\psi'} b'_{\psi'} \otimes \gamma(m_{[1]})^{\psi'} = \\ &= (m_{[0]} \otimes_{A'} a'_{[0]}) \cdot b'_{\psi'} \otimes (\gamma(m_{[1]}) \cdot a'_{[1]})^{\psi'}, \end{aligned}$$

即(C3) 成立. 对于(C2), 对任意 $m \in M, a' \in A'$, 便有

$$\begin{aligned} \rho_{F(M)}^2(m \otimes_{A'} a') &= m_{[0][0]} \otimes_{A'} a'_{\psi'} \otimes \gamma(m_{[0][1]})^{\psi'} \otimes \gamma(m_{[1]})^{\psi'} = \\ &= m_{[0]} \cdot 1_{A_{\psi}} \otimes_{A'} a'_{\psi'} \otimes \gamma(m_{[1]1})^{\psi'} \otimes \gamma(m_{[1]2})^{\psi'} = \\ &= m_{[0]} \otimes_{A'} \alpha(1_{A_{\psi}}) a'_{\psi'} \otimes \gamma(m_{[1]1})^{\psi'} \otimes \gamma(m_{[1]2})^{\psi'} = \\ &= m_{[0]} \otimes_{A'} 1_{A_{\psi}} a'_{\psi'} \otimes \gamma(m_{[1]1})^{\psi'} \otimes \gamma(m_{[1]2})^{\psi'} = \\ &= m_{[0]} \otimes_{A'} a'_{\psi'} \otimes \gamma(m_{[1]1})^{\psi'} \otimes \gamma(m_{[1]2})^{\psi'} = \\ &= m_{[0]} \otimes_{A'} a'_{\psi'} 1_{A'_{\psi'}} \otimes (\gamma(m_{[1]})^{\psi'})_1 \otimes (\gamma(m_{[1]})^{\psi'})_2 = \\ &= (m_{[0]} \otimes_{A'} a'_{\psi'}) \cdot 1_{A'_{\psi'}} \otimes (\gamma(m_{[1]})^{\psi'})_1 \otimes (\gamma(m_{[1]})^{\psi'})_2. \end{aligned}$$

定理 2 如定理 1 假设, 则导出函子 F 有右伴随函子: $G: \mathcal{M}(\psi')_{A'}^{\psi'} \rightarrow \mathcal{M}(\psi)_A^{\psi}$ 定义如下: 对任意 $M' \in \mathcal{M}(\psi')_{A'}^{\psi'}$,

$$G(M') = \overline{M' \square_C C} = \{m' \cdot \alpha(1_{A_\psi}) \otimes c^\psi\},$$

这里 $m' \otimes c \in M' \otimes C$ 满足下列条件:

$$m'_{[0]} \cdot \alpha(1_{A_\psi}) \otimes m'_{[1]} \otimes c^\psi = m' \cdot \alpha(1_{A_\psi}) \otimes \gamma(c_1)^\psi \otimes c_2^\psi. \quad (2)$$

$G(M')$ 上的结构映射为:对任意的 $a \in A, m' \in M', c \in C$,

$$\begin{cases} \rho_G(M')(m' \cdot \alpha(1_{A_\psi}) \otimes c^\psi) = m' \cdot \alpha(1_{A_\psi}) \otimes c_1^\psi \otimes c_2^\psi, \\ (m' \cdot \alpha(1_{A_\psi}) \otimes c^\psi) \cdot a = m' \cdot \alpha(a_\psi) \otimes c^\psi. \end{cases}$$

证明 首先证明 $G(M')$ 为 $\mathcal{M}(\psi)_A^C$ 中的对象. 容易验证 $G(M')$ 为右 C -余模. 为了证明 M 为右 A -模, 需要证明 $m' \cdot \alpha(a_\psi) \otimes c^\psi \in \overline{M' \square_C C}, \forall a \in A$. 事实上,

$$\begin{aligned} & (m' \cdot \alpha(a_\psi))_{[0]} \cdot \alpha(1_{A_\psi}) \otimes (m' \cdot \alpha(a_\psi))_{[1]}^\psi \otimes c^{\psi\psi} = \\ & m'_{[0]} \cdot \alpha(a_\psi)_\psi(1_{A_\psi}) \otimes m'_{[1]}^{\psi\psi} \otimes c^{\psi\psi} = \\ & m'_{[0]} \cdot \alpha(a_{\psi\psi})\alpha(1_{A_\psi}) \otimes m'_{[1]}^{\psi\psi} \otimes c^{\psi\psi} = \\ & m'_{[0]} \cdot \alpha(1_{A_\psi})\alpha(a_{\psi\psi}) \otimes m'_{[1]}^{\psi\psi} \otimes c^{\psi\psi} = \\ & m' \cdot \alpha(1_{A_\psi})\alpha(a_{\psi\psi}) \otimes \gamma(c_1)^{\psi\psi} \otimes c_2^{\psi\psi} = \\ & m' \cdot \alpha(a_\psi)\alpha(1_{A_\psi}) \otimes \gamma(c_1)^\psi \otimes c_2^{\psi\psi} = \\ & m' \cdot \alpha(a_\psi)\alpha(1_{A_\psi}) \otimes \gamma((c^\psi)_1)^\psi \otimes (c^\psi)_2^\psi. \end{aligned}$$

接着证明 G 为 F 的右伴随. 取 $M \in \mathcal{M}(\psi)_A^C$, 定义 $\eta_M: M \rightarrow GF(M) = \overline{(M \otimes_{AA'}) \square_C C}$ 如下: 对任意的 $m \in M$,

$$\eta_M(m) = m_{[0]} \otimes_{AA'} \alpha(1_{A_\psi}) \otimes m_{[1]}^\psi.$$

对任意的 $a \in A$, 便有

$$\begin{aligned} \eta_M(m \cdot a) &= (m \cdot a)_{[0]} \otimes_{AA'} \alpha(1_{A_\psi}) \otimes (m \cdot a)_{[1]}^\psi = m_{[0]} \cdot a_\psi \otimes_{AA'} \alpha(1_{A_\psi}) \otimes m_{[1]}^{\psi\psi} = \\ & m_{[0]} \otimes_{AA'} \alpha(a_\psi)\alpha(1_{A_\psi}) \otimes m_{[1]}^{\psi\psi} = m_{[0]} \otimes_{AA'} \alpha(1_{A_\psi})\alpha(a_\psi) \otimes m_{[1]}^{\psi\psi} = \\ & (m_{[0]} \otimes_{AA'} \alpha(1_{A_\psi}) \otimes m_{[1]}^\psi) \cdot a, \\ (\eta_M \otimes id_C) \circ \rho_M(m) &= m_{[0][0]} \otimes_{AA'} \alpha(1_{A_\psi}) \otimes m_{[0][1]}^\psi \otimes m_{[1]} = m_{[0]} \cdot 1_{A_\psi} \otimes_{AA'} \alpha(1_{A_\psi}) \otimes \\ & m_{[1]} 1^{\psi\psi} \otimes m_{[1]2} = m_{[0]} \otimes_{AA'} \alpha(1_{A_\psi}) 1_{A_\psi} \otimes m_{[1]1}^{\psi\psi} \otimes m_{[1]2} = \\ & m_{[0]} \otimes_{AA'} \alpha(1_{A_\psi}) \otimes m_{[1]1}^{\psi\psi} \otimes m_{[1]2} = \rho_{GF(M)} \circ \eta_M(m). \end{aligned}$$

即证明了 $\eta_M \in \mathcal{M}(\psi)_A^C$.

取 $M' \in \mathcal{M}(\psi')_{A'}^C$, 定义 $\delta_{M'}: FG(M') \rightarrow M'$, 这里

$$\delta_{M'}((m' \cdot \alpha(1_{A_\psi}) \otimes c^\psi) \otimes_{AA'} a') = \varepsilon_C(c)m' \cdot a'.$$

注意到 $\delta_{M'}$ 是 A' -线性的. 下面验证 $\delta_{M'}$ 是 C' -余线性的. 事实上,

$$\begin{aligned} (\delta_{M'} \otimes id_C) \circ (\rho_{FG(M')}) &((m' \cdot \alpha(1_{A_\psi}) \otimes c^\psi) \otimes_{AA'} a') = \delta_{M'}((m' \cdot \alpha(1_{A_\psi}) \otimes c_1^\psi) \otimes_{AA'} a') \otimes \\ & \gamma(c_2^{\psi'}) = m' \cdot \alpha(1_{A_\psi}) a'_\psi \otimes \gamma(c^\psi)^\psi, \end{aligned}$$

把 $id_{M'} \otimes id_C \otimes \varepsilon_C$ 作用到等式(2)两边上, 可得

$$\begin{aligned} m' \cdot \alpha(1_{A_\psi}) \otimes \gamma(c^\psi) &= \varepsilon(c)m'_{[0]} \cdot \alpha(1_{A_\psi}) \otimes m'_{[1]}^\psi = \\ & \varepsilon(c)m'_{[0]} \cdot \alpha(1_{A_\psi}) \otimes m'_{[1]}^\psi, \end{aligned}$$

利用上面等式可以推出

$$\begin{aligned} m' \cdot \alpha(1_{A_\psi}) a'_\psi \otimes \gamma(c^\psi)^\psi &= \varepsilon(c)m'_{[0]} \cdot \beta(1_{A_\psi}) a'_\psi \otimes m'_{[1]}^{\psi\psi} = \varepsilon(c)m'_{[0]} \cdot 1_{A_\psi} a'_\psi \otimes m'_{[1]}^{\psi\psi} \\ &= \varepsilon(c)m'_{[0]} \cdot a'_\psi \otimes m'_{[1]}^\psi = \rho_{M'} \circ \delta_{M'}((m' \cdot \alpha(1_{A_\psi}) \otimes c^\psi) \otimes_{AA'} a'), \end{aligned}$$

常规计算可以证明 η, δ 均是自然变换, 且满足如下关系

$$G(\delta_{M'}) \cdot \eta_G(M') = I, \delta_{F(M)} \circ F(\eta_M) = I,$$

对所有的 $M \in \mathcal{M}(\psi)_A^C, M' \in \mathcal{M}(\psi')_{A'}^C$.

记1 考虑偏缠绕结构 (k, C) 及同态 id_C 和 $\eta_A: k \rightarrow A'$. 则范畴 $\mathcal{M}(\psi)^C$ 是 C -余模构成的范畴, 导出函子 G 就是忘却函子. 由定理2可知, $F(M') = M' \otimes A$ 其上的偏缠绕模结构为: 对任意的 $a \in A', M' \in \mathcal{M}(\psi)^C$,

$$(m \otimes a') \cdot b' = m \otimes a'b',$$

$$\rho_{F(M)}(m \otimes a') = m_{[0]} \otimes a'_{\psi} \otimes m'_{[1]}.$$

注记 2 考虑偏缠绕结构 (A, k) 及同态 id_A 和 $\epsilon_C: C \rightarrow k$. 则范畴 $\mathcal{M}(\psi)_A$ 是 A - 模构成的范畴, 导出函子 F 就是忘却函子. 由定理 2 可知, $G(M') = \overline{M' \otimes C} = \{m' \cdot 1_{A_{\psi}} \otimes c^{\psi}\}$ 其上的偏缠绕模结构为: 对任意的 $a \in A, M' \in \mathcal{M}(\psi)_A$,

$$\begin{aligned} \rho_G(M')(m' \cdot 1_{A_{\psi}} \otimes c^{\psi}) &= m' \cdot 1_{A_{\psi\psi}} \otimes c_1^{\psi} \otimes c_2^{\psi}, \\ (m' \cdot 1_{A_{\psi}} c^{\psi}) \cdot a &= m' \cdot a_{\psi} \otimes c^{\psi}. \end{aligned}$$

定义 3 设 $(A, C)_{\psi}$ 是偏缠绕结构. k - 线性映射

$$\theta: C \rightarrow A \otimes A,$$

称为偏正规化余积分, 如果 θ 满足下列条件(其中 $\theta(c) = \theta^1(c) \otimes \theta^2(c) \in A \otimes A$):

1) 对任意的 $c \in C$ 和 $a \in A$,

$$\theta^1(c) \otimes \theta^2(c)a = a_{\psi} \theta^1(c^{\psi}) \otimes \theta^2(c^{\psi});$$

2) 对任意的 $c \in C$,

$$\theta^1(c) \theta^2(c) = \epsilon(c) 1_A;$$

3) 对任意的 $c \in C$,

$$1_{A_{\psi\psi}} \theta^1(c_{(1)\psi}) \otimes \theta^2(c_{(1)\psi}) \otimes c_{(2)\psi} = 1_{A_{\psi\psi}} \theta^1(c_{(2)\psi})_{\psi} \otimes \theta^2(c_{(2)\psi})_{\psi} \otimes c_{(1)\psi\psi}.$$

引理 1 设 $(A, C)_{\psi}$ 是偏缠绕结构, $M, N \in \mathcal{M}_A^C(\cdot)$. 设 $M, N \in \mathcal{M}_A^C(\psi), g \in \text{Hom}^C(N, M)$, 假设存在偏正规化余积分 $\theta: C \rightarrow A \otimes A$. 则 \hat{g} 是范畴 $\mathcal{M}_A^C(\psi)$ 中的态射, 其中

$$\hat{g}: N \rightarrow M, \hat{g}(n) = g(n_{[0]} \cdot \theta^1(n_{[1]})) \cdot \theta^2(n_{[1]}).$$

证明 欲证 \hat{g} 是右 A - 模同态, 对任意的 $n \in N$ 和 $a \in A$, 可得

$$\begin{aligned} \hat{g}(n \cdot a) &= g((n_{[0]} \cdot a_{\psi}) \cdot \theta^1(n_{[1]})) \cdot \theta^2(n_{[1]}) = \\ &= g((n_{[0]}) \cdot \theta^1(n_{[1]})) \cdot \theta^2(n_{[1]}) \cdot a = \hat{g}(n) \cdot a. \end{aligned}$$

对任意的 $n \in N$, 可得

$$\begin{aligned} \rho \circ \hat{g}(n) &= \rho(g(n_{[0]} \cdot \theta^1(n_{[1]})) \cdot \theta^2(n_{[1]})) = g(n_{[0]} \cdot \\ &\theta^1(n_{[1]}))_{[0]} \cdot \theta^2(n_{[1]})_{\psi} \otimes g(n_{[0]} \cdot \theta^1(n_{[1]}))_{[1]} = g(n_{[0][0]} \cdot \\ &\theta^1(n_{[1]})_{\psi}) \cdot \theta^2(n_{[1]})_{\psi} \otimes n_{[0][1]}^{\psi\psi} = g(n_{[0]} \cdot 1_{A_{\psi\psi}} \theta^1(n_{[1](2)}))_{\psi} \cdot \\ &\theta^2(n_{[1](2)}))_{\psi} \otimes n_{1}^{\psi\psi} = g(n_{[0]} \cdot 1_{A_{\psi\psi}} \theta^1(n_{1})) \cdot \\ &\theta^2(\theta^1(n_{1})) \otimes n_{[1](2)} = g(n_{[0][0]} \cdot \theta^1(n_{[0][1]})) \cdot \\ &\theta^2(n_{[0][1]}) \otimes n_{[1]} = (\hat{g} \otimes id_C) \circ (n), \end{aligned}$$

于是 \hat{g} 是右 C - 余线性的.

定理 3 设 $(A, C)_{\psi}$ 是偏缠绕结构, $M, N \in \mathcal{M}_A^C(\psi)$. 假设存在偏正规化余积分 $\theta: C \rightarrow A \otimes A$. 给定 $\mathcal{M}_A^C(\psi)$ 中态射 $f: M \rightarrow N$, 则有

- 1) 当单态射 f 看作 C - 余模态射可分裂时, 必有单态射 f 在 $\mathcal{M}_A^C(\psi)$ 中可分裂;
- 2) 当满态射 f 看作 C - 余模态射可分裂时, 必有满态射 f 在 $\mathcal{M}_A^C(\psi)$ 中可分裂.

证明 已知单态射 f 看作 C - 余模态射可分裂的, 存在 f 看作 C - 余模态射 $g: N \rightarrow M$ 满足 $g \circ f = id_M$, 定义 k - 线性映射 $\hat{g}: N \rightarrow M$ 如下:

$$\hat{g}g(n) = g(n_{[0]} \cdot \theta^1(n_{[1]})) \cdot \theta^2(n_{[1]}).$$

由引理 1 可知 \hat{g} 是右 A - 线性的和右 C - 余线性, 对任意的 $m \in M$, 可得

$$\begin{aligned} \hat{g} \circ f(m) &= \hat{g}(f(m)) = g(f(m)_{[0]} \cdot \theta^1(f(m)_{[1]})) \cdot \theta^2(f(m)_{[1]}) = \\ &= g(f(m)_{[0]} \cdot \theta^1(m_{[1]})) \cdot \theta^2(m_{[1]}) = m_{[0]} \cdot \theta^1(m_{[1]}) \cdot \theta^2(m_{[1]}) = m. \end{aligned}$$

于是 $\hat{g} \circ f = id_M$.

2) 已知满态射 f 作为 C - 余模态射可分裂的, 存在 C 余模态射 $g: N \rightarrow M$ 满足 $f \circ g = id_N$, 定义 k - 线性映射如上, 由引理 1 可知 \hat{g} 是右 A - 线性的和右 C - 余线性, 对任意的 $n \in N$, 可得

$$f \circ \hat{g}(n) = f(g(n_{[0]} \cdot \theta^1(n_{[1]})) \cdot \theta^2(n_{[1]})) = (n_{[0]} \cdot \theta^1(n_{[1]})) \cdot \theta^2(n_{[1]}) = n.$$

参 考 文 献

- [1] Sweedler M E. Hopf Algebras [M]. New York: Benjamin, 1969.
- [2] Caenepeel S, Militaru G, Zhu S L. A Maschke type theorem for Doi-Hopf modules and applications [J]. J Algebra, 1997, 187: 388-412.
- [3] Caenepeel S, Militaru G, Zhu S L. Frobenius and Separable Functors for Generalized Module Categories and Nonlinear Equations [M]. Berlin: Springer Verlag, 2002.
- [4] Exel R. Circle actions on C^* -algebras, partial automorphisms and generalized Pimsner-Voiculescu exact sequences [J]. J Funct Anal, 1994, 122: 361-401.
- [5] Dokuchaev M, Exel R. Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations [J]. Trans Amer Math Soc, 2005, 357: 1931-1952.
- [6] Dokuchaev M, Ferrero M, Paques A. Partial actions and Galois theory [J]. J Pure Appl Algebra, 2007, 208: 77-87.
- [7] Caenepeel S, Janssen K. Partial (co)actions of Hopf algebras and partial Hopf-Galois theory [J]. Comm Algebra, 2008, 36: 2923-2946.
- [8] Rafael M D. Separable functors revised [J]. Comm Algebra, 1990, 18: 1445-1459.
- [9] Breziński T. Frobenius properties and Maschke-type theorems for entwined modules [J]. P Am Math Soc, 1999, 128(8): 2261-2270.
- [10] Guo S J, Wang S H. Separable functors for the category of partial entwined modules [J]. J Algebra Appl, 2012, 11(5): 1250101.

A Maschke Type Theorem of Partial Entwined Modules

GUO Shuangjian¹, DONG Lihong²

(1. School of Mathematics and Statistics, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang 550025, China;

2. College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

Abstract: Let (A, C, ψ) , (A', C', ψ') be two partial entwining structures. Given $\alpha: A \rightarrow A'$ and $\gamma: C \rightarrow C'$, we define an induction functor F between the category $\mathcal{M}(\psi')_A^C$ of all partial entwined modules and the category $\mathcal{M}(\psi)_{A'}^{C'}$, and we prove that this functor has a right adjoint $G: \mathcal{M}(\psi)_{A'}^{C'} \rightarrow \mathcal{M}(\psi)_A^C$. Finally, we introduce the definition of partial conormalized cointegral $\theta: C \rightarrow A \otimes A$ and prove a Maschke type theorem for the category of partial entwined modules, that is, suppose that there exists a partial normalized cointegral. Then $f: M \rightarrow N$ in $\mathcal{M}_A^C(\psi)$ has a section (respectively, retraction) if f has a section (respectively, retraction) as a C -comodule morphism.

Keywords: partial entwined modules; adjoint functor; partial normalized cointegral; Maschke type theorem