

分数阶多时滞混沌系统的同步

梁 松,张云雷,吴然超

(安徽大学 数学科学学院,合肥 230601)

摘 要:研究了一类分数阶多时滞的混沌系统的同步.根据分数阶时滞系统的稳定性的理论,利用一个非线性控制器,结合 Laplace 变换,使得两个混沌系统达到同步,并给出了数值结果验证了理论的正确性.

关键词:分数阶;多时滞;混沌;同步

中图分类号:O175

文献标志码:A

自从美国麻省理工学院教授洛伦兹研究混沌以来,混沌由于它确定的但不可预测的运动状态而成为了非线性科学领域的热门课题.虽然科学家给出了混沌的多种科学定义,但证明系统是混沌的确是不易的.即使这样,这也并不妨碍混沌学在实际生活中的应用.

分数阶微积分是微积分的一个分支,自今已有 300 多年的历史.分数阶导数是一种广义上的导数,它包括了经典的整数导数.分数阶系统的动力行为较整数阶更为复杂,由于具有非局限特性,可以更好描述具有历史依赖性的发展过程,是现如今方程研究领域的重要课题之一.过去的几十年中,人们将分数阶理论越来越多的应用到应用科学领域,如热学、声学、电气化学、流体学以及高分子学等,也逐渐将分数阶发展到控制领域^[1-4].由于混沌同步在保密通信中的应用,所以分数阶混沌系统的同步也受到很多学者的关注.如文献[5]研究了分数阶混沌系统的混合投影同步;文献[6]研究了分数阶混沌系统的广义投影同步;文献[7]研究了分数阶混沌系统的函数投影同步;文献[8]研究了分数阶混沌系统的滞后投影同步.但是对于分数阶时滞系统的同步研究很少.文献[9]研究了分数阶时滞混沌系统混合投影同步.本文研究了较一般形式的分数阶时滞系统,具有多时滞,且系统矩阵为非单位阵.由于具有时滞项和非时滞项共存,所以不能直接运用文献[10]的结果,结合 Laplace 变换,给出了同步理论.本文给出的模型更加一般,结论更加优化,这样则减少了控制的成本及不必要的控制.

1 预备知识

Caputo 分数阶导数当 $0 < \alpha < 1$ 时的定义为: ${}^c_0 D_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{x'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, (t_0 < t)$,其中 $\Gamma(*)$ 是 Gamma 函数.当 $0 < \alpha < 1$ 时, Caputo 分数阶导算子的 Laplace 变换为: $L[{}^c_0 D_t^\alpha x(t)] = s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1} x(t_0)$,其中, $X(s) = L[x(t)], L(f(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$.

考虑如下分数阶时滞驱动系统:

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + F(x(t), x(t-\tau)), \\ x(t) = \varphi(t), t \in [-\bar{\tau}, 0], \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbf{R}^n, x(t-\tau) = (x_1(t-\tau_1), x_2(t-\tau_2), \dots, x_n(t-\tau_n))^T \in \mathbf{R}^n$ 是状态变量; $0 < \alpha < 1$ 表示分数阶微分方程的阶数; $F: \mathbf{R}^{2n} \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是连续的向量函数; $\tau_i > 0$ 表示方程的时滞; $\bar{\tau} = \max\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$; $\varphi(t)$ 表示时滞方程所给定的初值.取响应系统:

收稿日期:2014-05-28;修回日期:2014-11-26.

基金项目:高等学校博士学科点专项科研基金(20093401120001);安徽省自然科学基金(11040606M12).

作者简介:梁 松(1989-),男,安徽无为,安徽大学硕士研究生,主要从事分数阶微分方程研究, E-mail: songliangeq@163.com.

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha y(t) = Ay(t) + By(t-\tau) + G(y(t), y(t-\tau)) + U, \\ y(t) = \phi(t), t \in [-\bar{\tau}, 0], \end{cases} \quad (2)$$

其中 $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T \in \mathbf{R}^n$, $y(t-\tau) = (y_1(t-\tau_1), y_2(t-\tau_2), \dots, y_n(t-\tau_n))^T \in \mathbf{R}^n$ 是状态变量; $G: \mathbf{R}^{2n} \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是连续的向量函数; $\phi(t)$ 表示时滞方程所给定的初值; $U = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$ 是上述方程的控制器, 它将决定该响应系统能否与驱动系统达到投影同步.

系统(1)和系统(2)之间的误差状态向量可以写成: $e(t) = y(t) - Cx(t)$, 其中, $e(t) = (e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t))^T \in \mathbf{R}^n$, $C = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n)$.

定义 1 如果存在控制器 U , 使得 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|y(t) - Cx(t)\| = 0$, 则称驱动系统(1)和响应系统(2)是混合投影同步的; 若 $C = I$, 即 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|y(t) - x(t)\| = 0$, 则称驱动系统(1)和响应系统(2)是完全同步的.

对于系统(1)与(2)之间的完全同步, 考虑取如下非线性的控制器:

$$U = Ke(t) + F(x(t), x(t-\tau)) - G(y(t), y(t-\tau)), \quad (3)$$

其中, $K = \text{diag}(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是一个反馈增益矩阵. 根据(1)、(2)和(3)可以得到下列的误差系统:

$${}^c D_t^\alpha e(t) = (A + K)e(t) + Be(t-\tau), \quad (4)$$

其中, $e(t-\tau) = (e_1(t-\tau_1), e_2(t-\tau_2), \dots, e_n(t-\tau_n))^T \in \mathbf{R}^n$.

对于系统(1)和(2)之间的混合投影同步, 鉴于对角矩阵乘积的可交换性, 取 A, B 为对角矩阵. 令控制器 U 为

$$U = Ke(t) + CF(x(t), x(t-\tau)) - G(y(t), y(t-\tau)), \quad (5)$$

由(1)、(2)和(5)可以得到下列的误差系统:

$${}^c D_t^\alpha e(t) = (A + K)e(t) + Be(t-\tau). \quad (6)$$

于是, 系统(1)、(2)之间的完全同步或混合投影同步问题, 就转化为误差系统(4)或(6)是否稳定的问题.

2 同步理论

不妨设 $A + K = \tilde{K} = (\tilde{k}_{ij})_{n \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times n}$, 把(4)写成带初值形式,

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha e(t) = (A + K)e(t) + Be(t-\tau), \\ e(t) = \psi(t), t \in [-\bar{\tau}, 0], \end{cases} \quad (7)$$

其中 $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t))^T$. 对(7)两边进行 Laplace 变换得到:

$$s^\alpha E(s) - s^{\alpha-1} \psi(0) = \tilde{K}E(s) + BL(e(t-\tau)),$$

其中, $E(s) = L(e(t))$, 令 $\tilde{B} = (b_{ij}(\exp)^{-s\tau_j})_{n \times n}$, 则

$$s^\alpha E(s) - s^{\alpha-1} \psi(0) = \tilde{K}E(s) + \tilde{B}E(s) + \tilde{B} \int_{-\tau}^0 (\exp)^{-s't} \psi(t) dt.$$

其中 $\int_{-\tau}^0 (\exp)^{-s't} \psi(t) dt = \left(\int_{-\tau_1}^0 (\exp)^{-s't} \psi_1(t) dt, \int_{-\tau_2}^0 (\exp)^{-s't} \psi_2(t) dt, \dots, \int_{-\tau_n}^0 (\exp)^{-s't} \psi_n(t) dt \right)^T$. 则

$$(s^\alpha I - \tilde{K} - \tilde{B})E(s) = \tilde{B} \int_{-\tau}^0 (\exp)^{-s't} \psi(t) dt + s^{\alpha-1} \psi(0),$$

即 $(s^\alpha I - \tilde{K} - \tilde{B})(sE(s)) = s \left(\tilde{B} \int_{-\tau}^0 (\exp)^{-s't} \psi(t) dt + s^{\alpha-1} \psi(0) \right)$.

当 $\det(s^\alpha I - \tilde{K} - \tilde{B}) = 0$ 所有的根 s 都具有负实部时, 由终值定理知 $\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0, \text{Re}(s) \geq 0} sE(s) = 0$.

即可以得到下列定理.

定理 1 如果 $\det(s^\alpha I - \tilde{K} - \tilde{B}) = 0$ 的所有的根都只有负实部, 则系统(4)或(6)的零解是渐近稳定的. 根据文献[8], 可以得到下列推论.

推论 1 如果矩阵 $A + B$ 所有的特征根 λ 都满足 $|\arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2}$, 且方程 $\det(s^\alpha I - \tilde{K} - \tilde{B}) = 0$ 对于任意的 $\tau_i > 0$ 没有纯虚根, 则系统(4)或(6)是稳定的.

定理 2 若 A, B 同时是上(下)三角矩阵,且当 $k_i < -(a_{ii} + |b_{ii}|)$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) 成立时,驱动系统(1)和响应系统(2)在 $U = Ke(t) + F(x(t), x(t-\tau)) - G(y(t), y(t-\tau))$ 控制下是完全同步的.

证明 当 A, B 同时是上(下)三角矩阵时,假设 λ 是 $A + B$ 所有的特征根,则易知 $\lambda_i = k_i + a_{ii} + b_{ii}$, $i = (1, 2, \dots, n)$,即知,当 $k_i < -(a_{ii} + b_{ii})$ 时, $\lambda_i < 0$.

同样很容易得到: $\det(s^a I - \tilde{K} - \tilde{B}) = \prod_{i=1}^n (s^a - a_{ii} - k_i - b_{ii} e^{-s\tau_i}) = 0$, 假设 s 存在纯虚根使得上式成立,不妨设为 $s = \omega i = |w| (\cos(\pi/2) + i \sin(\pm \pi/2))$ (w 是实数), 则 $s^a - a_{ii} - k_i - b_{ii} e^{-s\tau_i} = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, 即得 $|w|^a (\cos(\alpha\pi/2) + i \sin(\pm \alpha\pi/2)) - a_{ii} - k_i - b_{ii} [\cos(\omega\tau_i) - i \sin(\omega\tau_i)] = 0$

把实部和虚部分离,即得

$$\begin{cases} |w|^a \cos(\alpha\pi/2) - a_{ii} - k_i = b_{ii} \cos(\omega\tau_i), \\ |w|^a \sin(\pm \alpha\pi/2) = -b_{ii} \sin(\omega\tau_i). \end{cases}$$

通过计算,得到

$$|w|^{2a} - 2(a_{ii} + k_i) \cos(\alpha\pi/2) |w|^a + (a_{ii} + k_i)^2 - b_{ii}^2 = 0. \quad (8)$$

由于 $|w|^a > 0$, 令 $f(x) = x^2 - 2(a_{ii} + k_i) \cos(\alpha\pi/2)x + (a_{ii} + k_i)^2 - b_{ii}^2$, 所以要使得(8)式无解只需

$$\begin{cases} -\frac{2(a_{ii} + k_i) \cos(\alpha\pi/2)}{2} < 0, \\ f(0) > 0 \end{cases}, \text{ 或 } \begin{cases} -\frac{2(a_{ii} + k_i) \cos(\alpha\pi/2)}{2} > 0 \\ \Delta = [2(a_{ii} + k_i) \cos(\alpha\pi/2)]^2 - 4[(a_{ii} + k_i)^2 - b_{ii}^2] < 0 \end{cases}, \quad (9)$$

很容易得到 ① $b_{ii} > 0, k_i < -(a_{ii} + b_{ii})$, ② $b_{ii} < 0, k_i < -(a_{ii} - b_{ii})$ 都满足 $k_i < -(a_{ii} + b_{ii})$ 和(9). 易知当 $b_{ii} = 0$ 时, 当 $k_i < -a_{ii}$ 系统(4)也是渐近稳定的, 即当 $k_i < -(a_{ii} + |b_{ii}|)$ 时, 驱动系统(1)和响应系统(2)是完全同步的.

定理 3 若存在非奇异实矩阵 P , 使得 $A = P^{-1}A'P, B = P^{-1}B'P$, 其中 $A' = (a'_{ij})_{n \times n}, B' = (b'_{ij})_{n \times n}$ 为上(下)三角矩阵, 且令 $k_1 = k_2 = \dots = k_n = k$, 当 $k < \min_{i=1,2,\dots,n} \{-(a'_{ii} + |b'_{ii}|)\}$ 时, 驱动系统(1)和响应系统(2)在 $U = Ke(t) + F(x(t), x(t-\tau)) - G(y(t), y(t-\tau))$ 控制下是完全同步的.

证明 考虑误差系统(4): ${}^c D_t^\alpha e(t) = (A + K)e(t) + Be(t-\tau)$, 根据定理 3 的条件上式可以写成: ${}^c D_t^\alpha e(t) = (P^{-1}A'P + kI)e(t) + P^{-1}B'Pe(t-\tau)$, 即

$${}^c D_t^\alpha [Pe(t)] = (A'P + kP)e(t) + B'Pe(t-\tau), \quad (10)$$

令 $\bar{z}(t) = Pe(t)$, 则 $\bar{z}(t-\tau) = Pe(t-\tau)$, 则(10)可化为

$${}^c D_t^\alpha \bar{z}(t) = (A' + kI)\bar{z}(t) + B'\bar{z}(t-\tau), \quad (11)$$

由定理 2 知, 当 $k < \min_{i=1,2,\dots,n} \{-(a'_{ii} + |b'_{ii}|)\}$ 时, (11) 是渐近稳定的, 即 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\bar{z}(t)\| = 0$ (本文中范数是

$$\|\chi\| = \sqrt{\chi^T \chi}), \text{ 则 } \|e(t)\| = \sqrt{e^T(t)e(t)} = \sqrt{[P^{-1}\bar{z}(t)]^T P^{-1}\bar{z}(t)} = \sqrt{\bar{z}^T(t)(P^{-1})^T P^{-1}\bar{z}(t)}.$$

由于 P 非奇异, 则 $(P^{-1})^T P^{-1}$ 是正定阵, 不妨假设 $(P^{-1})^T P^{-1}$ 的特征根为 $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_n$ 且 $0 < \hat{\lambda}_1 \leq \hat{\lambda}_2 \leq \dots \leq \hat{\lambda}_n$, 根据二次型的理论知: $\hat{\lambda}_1 z^T(t)z(t) \leq z^T(t)(P^{-1})^T P^{-1}z(t) \leq \hat{\lambda}_n z^T(t)z(t)$, 则 $\sqrt{\hat{\lambda}_1} \|\bar{z}(t)\| \leq \|e(t)\| \leq \sqrt{\hat{\lambda}_n} \|\bar{z}(t)\|$, 由夹逼定理知: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{e^T(t)e(t)} = 0$.

利用类似的方法, 可以得到定理 4.

定理 4 若 A, B 同时是对角矩阵, 且当 $k_i < -(a_{ii} + |b_{ii}|)$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) 成立时, 驱动系统(1)和响应系统(2)在 $U = Ke(t) + CF(x(t), x(t-\tau)) - G(y(t), y(t-\tau))$ 控制下是混合投影同步的.

注 当定理 4 中的 A, B 都为单位矩阵时, 此时的系统为文献[9]所讨论的系统, 由文献[9]知, 当 $k_i < -1 - 1/\sin^2(\alpha\pi/2)$ 时, 系统(1)和(2)达到混合投影同步; 而对于此类系统, 由本文的定理 4 知, 当 $k_i < -2$ 时, 系统(1)和(2)就可以达到混合投影同步, 因此, 扩大了使系统同步的反馈增益矩阵取值范围, 优化了所得结论.

3 数值模拟

利用文献[11]中的分数阶时滞 Chen 系统作为驱动系统, 用文献[12]中的 Liu 分数阶时滞系统作为响应系统来进行数值模拟. 取驱动系统为:

$$\begin{cases} D^\alpha x_1(t) = a(x_2(t) - x_1(t - \tau)), \\ D^\alpha x_2(t) = (c - a)x_1(t - \tau) - x_1(t)x_3(t) + cx_2(t), \\ D^\alpha x_3(t) = x_1(t)x_2(t) - bx_3(t - \tau), \\ x(t) = x(0), t \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (12)$$

其中 $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$ 是状态变量, $\alpha \in (0, 1), a, b, c > 0$. 由文献[9]知当 $\alpha = 0.97, \tau = 0.005$, $(a, b, c) = (35, 3, 27), x(0) = (0.2, 0, 0.5)$ 时, 该系统出现混沌现象. 将驱动系统写成系统(1)的形式, 则

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 \\ (c - a)x_1(t - \tau) - x_1(t)x_3(t) \\ x_1(t)x_2(t) \end{bmatrix}.$$

取响应系统为:

$$\begin{cases} D^\alpha y_1(t) = \theta(y_2(t) - y_1(t - \tau)) + u_1, \\ D^\alpha y_2(t) = \beta y_1(t - \tau) - y_1(t)y_3(t) + u_2, \\ D^\alpha y_3(t) = -\gamma y_3(t - \tau) + 4y_1^2(t) + u_3, \\ y(t) = y(0), t \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (13)$$

其中 $y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))^T$ 是状态变量, $\alpha \in (0, 1), \theta, \beta, \gamma > 0$. 由文献[10]知, 当 $\alpha = 0.92, \tau = 0.005, (\theta, \beta, \gamma) = (10, 40, 2.5), y(0) = (1.2, 2.4, 11)$ 时, 该系统出现混沌现象. 将驱动系统写成系统(2)的形式, 则

$$G = \begin{bmatrix} (\theta - a)(y_2(t) - y_1(t - \tau)) \\ -cy_2(t) + \beta y_1(t - \tau) - y_1(t)y_3(t) \\ (b - \gamma)y_3(t - \tau) + 4y_1^2(t) \end{bmatrix}.$$

通过上文所说的控制器 $U = Ke(t) + F - G$ 控制可以得到误差方程:

$${}^C D_t^\alpha e(t) = (A + K)e(t) + Be(t - \tau).$$

通过定理 2, 可以令 $K = \text{diag}(-a - 1, -c - 1, -b - 1)$, 能使得系统(1)和(2)达到完全同步.

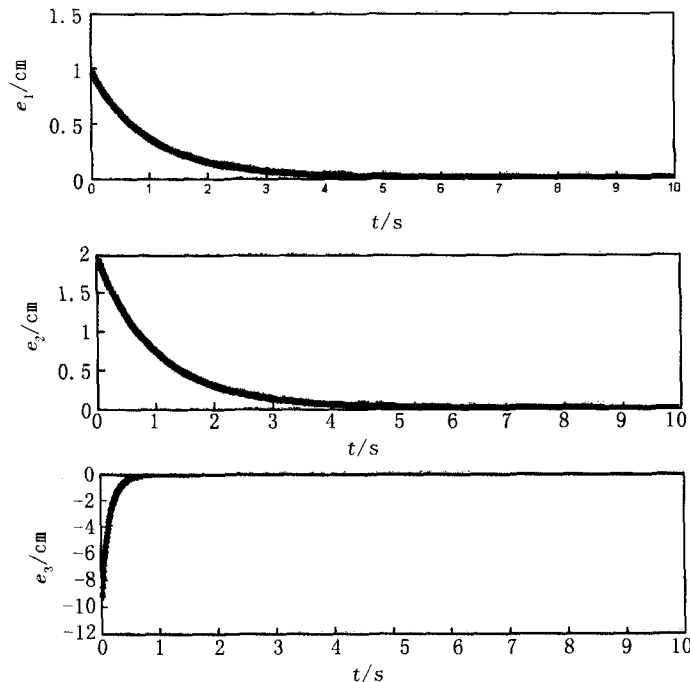


图1 误差时间序列

令 a, b, c 的参数值为系统(12)出现混沌的参数值, 可取 $(a, b, c) = (35, 3, 27), \alpha = 0.97, \tau = 0.005$, 取初值为 $(1, 2, -10.5)$, 则可以得到误差方程的时间序列图, 见图 1.

从图1中可以看出(12)与(13)的误差系统很快趋近于0,即(12)与(13)达到完全同步.

4 结论

本文研究了两个分数阶多时滞的混沌系统的同步问题.通过分数阶时滞方程的稳定性理论,利用非线性控制器,结合Laplace变换,给出了多时滞系统在系数矩阵具有不同形式下的完全同步或混合投影同步的充分条件,所得到的结论更为优化,所研究的模型更一般化.

参 考 文 献

- [1] Chen J, Zeng Z, Jiang P. Global Mittag-Leffler stability and synchronization of memristor-based fractional-order neural networks[J]. *Neural Networks*, 2014, 51: 1-8.
- [2] Wang Y, Sun K, He S. Dynamics of fractional-order sinusoidally forced simplified Lorenz system and its synchronization[J]. *The European Physical Journal Special Topics*, 2014(1): 1-10.
- [3] Yu J, Hu C, Jiang H. Projective synchronization for fractional neural networks [J]. *Neural Networks*, 2014, 49: 87-95.
- [4] Wang X Y, Song J M. Synchronization of the fractional order hyperchaos Lorenz systems with activation feedback control [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2009, 14(8): 3351-3357.
- [5] Wang S, Yu Y, Diao M. Hybrid projective synchronization of chaotic fractional order systems with different dimensions [J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2010, 389(21): 4981-4988.
- [6] Peng G, Jiang Y, Chen F. Generalized projective synchronization of fractional order chaotic systems[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2008, 387(14): 3738-3746.
- [7] Zhou P, Zhu W. Function projective synchronization for fractional-order chaotic systems[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2011, 12(2): 811-816.
- [8] Chen L, Chai Y, Wu R. Lag projective synchronization in fractional-order chaotic (hyperchaotic) systems[J]. *Physics Letters A*, 2011, 375(21): 2099-2110.
- [9] Wang S, Yu Y, Wen G. Hybrid projective synchronization of time-delayed fractional order chaotic systems[J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2014, 11: 129-138.
- [10] Deng W, Li C, LYU J. Stability analysis of linear fractional differential system with multiple time delays[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2007, 48(4): 409-416.
- [11] Daftardar-Gejji V, Bhalekar S, Gade P. Dynamics of fractional-ordered Chen system with delay [J]. *Pramana*, 2012, 79(1): 61-69.
- [12] Bhalekar S, Daftardar-Gejji V. Fractional ordered Liu system with time-delay[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, 15(8): 2178-2191.

Synchronization of Fractional Order Chaotic Systems with Multiple Time Delays

LIANG Song, ZHANG Yunlei, WU Ranchao

(School of Mathematics, Anhui University, Hefei 230601, China)

Abstract: Synchronization of a class fractional order chaotic systems with multiple time delays is investigated in this paper. According to the stability theory of fractional order systems with delays, by using a nonlinear controller, combined with Laplace transform, two different fractional order chaotic systems with multiple time delays are controlled to realize complete synchronization or hybrid projective synchronization. The corresponding numerical results show effectiveness of the scheme.

Keywords: fractional order; multiple time delays; chaos; synchronization