

# 分数布朗运动驱动的分数量 Benjamin-Ono 方程的适定性

黄建华<sup>1</sup>, 陈涌<sup>2</sup>, 闫威<sup>3</sup>

(1. 国防科技大学 理学院, 长沙 410072; 2. 浙江理工大学 理学院, 杭州 310018;

3. 河南师范大学 数学与信息科学学院, 河南 新乡 453007)

**摘要:**主要考虑分数次布朗运动驱动的随机分数量 Benjamin-Ono 方程, 利用随机卷积在空间  $X_{s,b}$  中的估计, 三线性和估计和压缩映射原理得到了随机分数量 Benjamin-Ono 方程的适定性.

**关键词:**适定性; 分数次 Benjamin-Ono 方程; 分数次布朗运动

**中图分类号:** O175.5

**文献标志码:** A

本文考虑如下分数次布朗运动驱动的随机分数量 Benjamin-Ono 方程:

$$\begin{cases} du = [-|D_x|^{\alpha+1}u_x + u^2u_x]dt + \phi(t)dB^H(t), x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), x \in \mathbf{R}, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $|D_x|$  为傅里叶乘子算子,  $\Phi(t)$  是线性算子,  $B^H = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i^H(t)e_i(x)$ ,  $(e_i(x))_{i \in \mathbf{N}}$  是  $L^2(\mathbf{R})$  中的标准正交基,  $(\beta_i^H(t))_{i \in \mathbf{N}}$  是概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上的双边独立分数次布朗运动.

当  $\alpha = 1, \Phi = 0$  时, 方程(1)修正的 Korteweg-de Vries (mKdV) 方程. 文献[1]证明了当  $s \geq 1/4$  时, mKdV 方程在  $H^s$  中局部适定, 当  $s \geq 1$  时是整体适定的. 文献[2-3]证明了 mKdV 方程当  $s = \frac{1}{4}$  是整体适定的,

当  $s < \frac{1}{4}$  是不适定的. 文献[4]讨论了在几乎临界空间中的适定性. 当  $0 < \alpha \leq 1$  时, 利用三线性估计, 文献

[5]考虑了布朗运动( $H = \frac{1}{2}$ )驱动的随机广义分数量 Benjamin-Ono 方程在 Bourgain 空间中的适定性. 通过修正文献[6]中随机卷积在 Bourgain 空间中的估计, 文献[7]建立了分数次布朗运动驱动的 KdV-BO 方程的适定性. 本文将文献[5]中的噪声推广到更一般的分数次噪声, 建立方程(1)的适定性.

方程(1)的适度解为

$$u(t) = U(t)u_0 + \frac{1}{3} \int_0^t U(t-s)(u^3)_x ds + \int_0^t U(t-s)\Phi dB^H(s), \quad (2)$$

其中  $U(t) = \mathcal{F}_x^{-1} e^{-i\phi(\xi)t} \mathcal{F}_x$ ,  $\phi(\xi) = \xi |\xi|^{\alpha+1}$ .

对于  $s, b \in \mathbf{R}$ , 定义 Schwartz 函数空间在  $\mathbf{R}^2$  上的完备化空间  $X_{s,b}$ , 其上的范数为

$$\|u\|_{X_{s,b}} = \|U(-t)u\|_{H_x^s H_t^b} = \|\langle \xi \rangle^s \langle \sigma \rangle^b \mathcal{F}u\|_{L_x^2 L_t^2},$$

其中  $\sigma = \tau + \phi(\xi)$ ,  $\langle \cdot \rangle = 1 + |\cdot|$ . 当  $T > 0$ , 考虑  $X_{s,b}$  上函数限制在区间  $[0, T]$  上的  $X_{s,b}^T$ , 相应的范数为

$$\|u\|_{X_{s,b}^T} = \inf\{\|\bar{u}\|_{X_{s,b}}, \bar{u} \in X_{s,b}, \text{且 } u = \bar{u}|_{[0,T]}\}.$$

**定理 1** 假设  $s > \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{4}$ ,  $u_0(x) \in H^s(\mathbf{R})$ . 当  $\frac{\alpha+4}{3\alpha+8} < H < \frac{1}{2}$  时,  $\Phi \in L_2^{0, s+\frac{\alpha(\alpha+2)}{4(\alpha+8)}}$ ; 当  $\frac{1}{2} < H < 1$  时,

收稿日期: 2017-03-08; 修回日期: 2017-03-23.

基金项目: 国家自然科学基金(11401532; 11501511; 11671359; 11371367); 浙江省自然科学基金(LQ14A010015; LQ15A010012).

作者简介: 黄建华(1968-), 男, 湖北随州人, 国防科技大学教授, 博士生导师, 主要从事非自治与随机动力系统的研究, E-mail: jhhuang32@nudt.edu.cn.

通信作者: 闫威(1982-), 男, 河南周口人, 河南师范大学副教授, 主要从事偏微分方程的研究, E-mail: yanwei19821115@sina.cn.

$\Phi \in L^{\alpha, s}_2$ . 那么对于  $P$ -a. e.  $\omega \in \Omega$ , 存在  $T > 0$  使得柯西问题 1 有唯一的解  $u \in C([0, T]; H^s(\mathbf{R})) \cap X^T_{s,b}$ .

### 1 对分数次布朗运动的积分

这部分的内容可参考文献[8-10]. 给定区间  $[0, T]$ , 令分数次布朗运动  $B^H(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i^H(t) e_i(x)$  的 Hurst 参数  $H \in (0, 1)$ . 从而  $B^H(t)$  是中心高斯过程, 其协方差为

$$R(s, t) = E(B^H(s)B^H(t)) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}) = \int_0^{t \wedge s} K_H(t, r)K_H(s, r)dr,$$

其中  $K_H$  是均方可积核, 满足

$$K_H(t, s) = c_H(t - s)^{H-\frac{1}{2}} + c_H\left(\frac{1}{2} - H\right) \int_s^t (u - s)^{H-\frac{3}{2}} \left[1 - \left(\frac{s}{u}\right)^{\frac{1}{2}-H}\right] du, \tag{3}$$

其中常数  $c_H = \left[\frac{2H\Gamma(\frac{3}{2} - H)}{\Gamma(H + \frac{1}{2})\Gamma(2 - 2H)}\right]^{\frac{1}{2}}$ . 令  $K_T^*$  是从  $\epsilon$  ( $\epsilon$  表示  $[0, T] \times [0, 1]$  上的所有阶梯函数) 到  $L^2([0, T])$  的线性算子, 定义如下:

$$[K_T^* \varphi](s, x) = K_H(T, s)\varphi(s, x) + \int_s^T (\varphi(r, x) - \varphi(s, x)) \frac{\partial K_H(r, s)}{\partial r} dr, \quad \forall \varphi \in \epsilon. \tag{4}$$

进一步  $B^H(t)$  有如下的维纳积分

$$B^H(t) = \int_0^t K_H(t, s) dW(s), \tag{5}$$

其中  $W$  是维纳过程. 令  $\mathcal{H}$  是  $\epsilon$  关于数量积  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}} = R(s, t)$  的闭. 对于  $\varphi \in \epsilon, h \in L^2(0, T)$ , 以下对偶成立  $\int_s^T (K_T^* \varphi)(t)h(t) dt = \int_0^T \varphi(t)(K_H h)(dt)$ . 从而对分数次布朗运动的维纳积分和对维纳过程的 Itô 积分有如下关系

$$\int_0^t \varphi(s) dB^H(s) = \int_0^t (K_s^* \varphi)(s) dW(s), \quad \varphi \in \mathcal{H}. \tag{6}$$

令  $\Lambda$  是从希尔伯特空间  $E$  到  $F$  的有界算子, 相应的积分定义为

$$\int_0^t \Lambda(s) dB^H(s) = \sum_{i \in \mathbf{N}} \int_0^t \Lambda(s) \Phi e_i d\beta_i^H(s) = \sum_{i \in \mathbf{N}} \int_0^t (K_s^* \Lambda(\cdot) \Phi e_i)(s) d\beta_i(s), \tag{7}$$

其中  $(\Lambda(t))_{t \in [0, T]}$  满足  $\sum_{i \in \mathbf{N}} \int_0^t \|(K_s^* \Lambda(\cdot) \Phi e_i)(s)\|_F^2 ds < \infty$ .

### 2 随机卷积估计

令  $\phi(t)$  代表支集在  $[-1, 2]$  上的光滑函数且在  $[0, 1]$  上  $\phi(t) \equiv 1$ . 下面给出如下随机卷积估计:

$$Z(t) = \int_0^t U(t - s) \Phi dB^H(s). \tag{8}$$

首先, 给出以下基本不等式.

**引理 1** 对任意  $x, y \in \mathbf{R}, \gamma \in (0, 1)$ , 有  $|e^{-ix} - e^{-iy}| \leq C(\gamma) |x - y|^\gamma$ .

**性质 1** 令  $s, b \in \nabla, \gamma \in (0, 1), 0 < b \leq H < \frac{1}{2}, H + \gamma > \frac{1}{2}$ , 假设  $\Phi \in L^{\alpha, s+\frac{\gamma}{2}(\alpha+2)}_2$ . 则  $\phi Z(t) \in L^2(\Omega, X_{s,b})$  且

$$E(\|\phi Z\|_{X_{s,b}}^2) \leq M(b, \gamma, H, \phi) \|\Phi\|_{L^{\alpha, s+\frac{\gamma}{2}(\alpha+2)}_2}^2, \tag{9}$$

其中  $M(b, \gamma, H, \phi)$  只依赖  $b, \gamma, H, \|\cdot\|_{L^2_t}^{1/2} \phi(t), \|\cdot\|_{L^2_t}$  及  $\|\cdot\|_{L^\infty_t}^{1/2} \phi(t)$  的常数.

**证明** 定义  $g(t, \cdot) = \phi(t) \int_0^t U(t - s) \Phi dB^H(s)$ , 则  $\phi(t)Z(t) = U(t)g(t, \cdot)$ . 从而

$$\|\phi Z\|_{X_{s,b}}^2 = \|(1 + |\xi|)^s (1 + |\tau + \phi(\xi)|)^b \mathcal{F}_t(e^{-i\phi(\xi)} g(t, \xi))\|_{L^2_t L^2_\xi} = \|(1 + |\xi|)^s (1 + |\tau +$$

$$\phi(\xi) \|\cdot\|^b \hat{g}(\tau + \phi(\xi), \xi) \|_{L^2_t L^2_\xi} = \|(1 + |\xi|)^s (1 + |\tau|)^b \hat{g}(\tau, \xi)\|_{L^2_t L^2_\xi}.$$

因此

$$E \|\psi Z\|_{X_{s,b}}^2 = \iint_{\mathbf{R}^2} (1 + |\xi|)^{2s} (1 + |\tau|)^{2b} |\hat{g}(\tau, \xi)|^2 d\tau d\xi = \int_{\mathbf{R}} (1 + |\xi|)^{2s} E |\mathcal{F}_x g(\cdot, \xi)|_{H_t^b}^2 d\xi, \quad (10)$$

其中  $\mathcal{F}_x g(t, \xi) = \psi(t) \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t e^{-is\phi(\xi)} \widehat{\Phi e}_k(\xi) d\beta_k^{II}(s)$ .

利用  $H_t^b$  上的等价范数  $\|h\|_{H_t^b}^2 = \iint_{\mathbf{R}^2} \frac{|h(t) - h(s)|^2}{|t - s|^{1+2b}} dt ds + \|h\|_{L^2}^2, \forall h \in H_t^b$ .

可以得到

$$E |\mathcal{F}_x g(\cdot, \xi)|_{H_t^b}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\widehat{\Phi e}_k|^2 (E |\psi(t) \int_0^t e^{-is\phi(\xi)} d\beta_k^{II}|_{H_t^b}^2) = \sum_{k=0}^{\infty} |\widehat{\Phi e}_k|^2 E |\psi(t) \int_0^t e^{-is\phi(\xi)} d\beta_k^{II}|_{L^2}^2 + E \iint_{\mathbf{R}^2} \frac{|\psi(t_1) \int_0^{t_1} e^{-is\phi(\xi)} d\beta_k^{II}(s) - \psi(t_2) \int_0^{t_2} e^{-is\phi(\xi)} d\beta_k^{II}(s)|^2}{|t_1 - t_2|^{1+2b}} dt_1 dt_2 := \sum_{k=0}^{\infty} |\widehat{\Phi e}_k|^2 (I_1 + I_2). \quad (11)$$

由(6)、(7)式和 Itô 等距公式有

$$I_1 = \int_0^2 |\psi(t)|^2 E \left| \int_0^t e^{-is\phi(\xi)} d\beta_k^{II} \right|^2 dt = \int_0^2 |\psi(t)|^2 E \left| \int_0^t K_s^* e^{-is\phi(\xi)} d\beta_k(s) \right|^2 dt = \int_0^2 |\psi(t)|^2 E \left| \int_0^t |K_s^* e^{-is\phi(\xi)}|^2 ds dt.$$

结合(4)式,得

$$\int_0^t |K_s^* e^{-is\phi(\xi)}|^2 ds = \int_0^t |e^{-is\phi(\xi)} K(t, s) + \int_s^t (e^{-is\phi(\xi)} - e^{-is\phi(\xi)}) \frac{\partial K^*}{\partial \tau}(\tau, s) d\tau|^2 ds \leq 2 \left( \int_0^t |e^{-is\phi(\xi)} K(t, s)|^2 ds + \int_0^t \left| \int_s^t (e^{-is\phi(\xi)} - e^{-is\phi(\xi)}) \frac{\partial K^*}{\partial \tau}(\tau, s) d\tau \right|^2 ds \right) := 2(T_1 + T_2).$$

由(5)式和 Itô 等距公式得  $T_1 = E[(\beta^{II}(t))^2] = t^{2H}$ . 由引理 1 得

$$T_2 \leq C(\gamma) |\phi(\xi)|^\gamma \int_0^t \left| \int_s^t (\tau - s)^{H-\frac{3}{2}+\gamma} \left(\frac{\tau}{s}\right)^{H-\frac{1}{2}} d\tau \right|^2 ds \leq C(\gamma) |\phi(\xi)|^\gamma \int_0^t \left| \int_s^t (\tau - s)^{H-\frac{3}{2}+\gamma} d\tau \right|^2 ds.$$

对于  $\gamma \in (0, 1)$ , 令  $H - \frac{3}{2} + \gamma > -1$ , 可得  $T_2 \leq C(\gamma) |\phi(\xi)|^\gamma t^{2H+2\gamma}$ .

因此,得到

$$I_1 \leq C(\gamma) (|t^{2H} \psi(t)|_{L_t^2}^2 + |\phi(\xi)|^\gamma |t^{2H+2\gamma} \psi(t)|_{L_t^2}^2). \quad (12)$$

对于  $I_2$ , 有

$$I_2 = 2 \int_0^\infty \int_{t_1 < t_2} \frac{E |\psi(t_1) \int_0^{t_1} e^{-is\phi(\xi)} d\beta_k^{II}(s) - \psi(t_2) \int_0^{t_2} e^{-is\phi(\xi)} d\beta_k^{II}(s)|^2}{|t_1 - t_2|^{1+2b}} dt_1 dt_2 \leq 2 \int_0^\infty \int_{t_1 < 0} \frac{|\psi(t_2)|^2 E \left| \int_0^{t_2} e^{-is\phi(\xi)} d\beta_k^{II}(s) \right|^2}{|t_1 - t_2|^{1+2b}} dt_1 dt_2 + 2 \int_0^\infty \int_{0 < t_1 < t_2} \frac{|\psi(t_1) - \psi(t_2)|^2 E \left| \int_0^{t_1} e^{-is\phi(\xi)} d\beta_k^{II}(s) \right|^2}{|t_1 - t_2|^{1+2b}} dt_1 dt_2 + 2 \int_0^\infty \int_{0 < t_1 < t_2} \frac{|\psi(t_2)|^2 E \left| \int_{t_1}^{t_2} e^{-is\phi(\xi)} d\beta_k^{II}(s) \right|^2}{|t_1 - t_2|^{1+2b}} dt_1 dt_2 := 2(I_{2,1} + I_{2,2} + I_{2,3}).$$

类似  $I_1$ , 分别估计  $I_{2,1}, I_{2,2}, I_{2,3}$ . 对于  $\gamma \in (0, 1), H - \frac{3}{2} + \gamma > -1$ , 由(6)、(7)式, Itô 等距公式及引理 1, 有

$$I_{2,1} \leq C(\gamma) \int_0^2 (t_2^{2H} + |\phi(\xi)|^\gamma t_2^{2H+2\gamma}) |\psi(t_2)|^2 \int_{-\infty}^0 \frac{dt_1}{|t_1 - t_2|^{1+2b}} dt_2 \leq C(\gamma, b) \int_0^2 (t_2^{2(H-b)} + |\phi(\xi)|^\gamma t_2^{2(H+\gamma-b)}) |\psi(t_2)|^2 dt_2 \leq C(\gamma, b) |\phi(\xi)|^\gamma (|t|^{H-b} \psi(t)|_{L_t^2}^2 + |t|^{H+\gamma-b} \psi(t)|_{L_t^2}^2), \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
 I_{2,2} &\leq C(\gamma) \int_0^\infty \int_{0 < t_1 < t_2} \frac{(t_1^{2H} + |\phi(\xi)|^\gamma t_1^{2H+2\gamma}) |\phi(t_1) - \phi(t_2)|^2}{|t_1 - t_2|^{1+2b}} dt_1 dt_2 \leq \\
 &C(\gamma) \left( \int_0^2 \int_0^{t_2} \frac{(t_1^{2H} + |\phi(\xi)|^\gamma t_1^{2H+2\gamma}) |\phi(t_1) - \phi(t_2)|^2}{|t_1 - t_2|^{1+2b}} dt_1 dt_2 + \right. \\
 &\quad \left. \int_2^\infty \int_0^2 \frac{(t_1^{2H} + |\phi(\xi)|^\gamma t_1^{2H+2\gamma}) |\phi(t_1)|^2}{|t_1 - t_2|^{1+2b}} dt_1 dt_2 \leq \right. \\
 &C(\gamma, H) |\phi(\xi)|^\gamma \left( \int_0^2 \int_0^{t_2} \frac{|\phi(t_1) - \phi(t_2)|^2}{|t_1 - t_2|^{1+2b}} dt_1 dt_2 + \right. \\
 &\quad \left. \left\| |t|^H \phi(t) \right\|_{L^\infty}^2 \int_2^\infty \int_0^2 \frac{1}{|t_1 - t_2|^{1+2b}} dt_1 dt_2 \right) \leq \\
 &C(\gamma, H) |\phi(\xi)|^\gamma \left( \left\| \phi(t) \right\|_{H_t^b}^2 + C_b \left\| |t|^H \phi(t) \right\|_{L_t^\infty}^2 \right). \tag{15}
 \end{aligned}$$

最后计算  $I_{2,3}$  :

$$\begin{aligned}
 I_{2,3} &\leq C(\gamma) \int_0^2 \int_0^{t_2} |\phi(t_2)|^2 (|t_1 - t_2|^{2H-1-2b} + |t_1 - t_2|^{2H+2\gamma-1-2b} |\phi(\xi)|^\gamma) dt_1 dt_2 \leq \\
 &C(\gamma, b, H) |\phi(\xi)|^\gamma \left\| |t|^{H-b} \phi(t) \right\|_{L_t^2}^2. \tag{16}
 \end{aligned}$$

由(13)~(16)式,有

$$I_2 \leq M(\gamma, b, H, \phi) |\phi(\xi)|^\gamma, \tag{17}$$

其中  $M(\gamma, b, H, \phi) = C(\gamma, b, H) (\left\| |t|^{1/2} \phi(t) \right\|_{L_t^2}^2 + \left\| \phi(t) \right\|_{H_t^b}^2 + C_b \left\| |t|^{1/2} \phi(t) \right\|_{L_t^\infty}^2)$ .

由(10)、(11)、(12)及(17)式,得到(18)式.

下面给出  $\frac{1}{2} < b \leq H < 1$  时的随机卷积估计. 证明过程与性质 1 类似,此时  $H + \gamma > \frac{1}{2}$  恒成立.

**性质 2** 令  $s, b \in \nabla, \frac{1}{2} < b \leq H < 1$ , 假设  $\Phi \in L_2^{0,s}$ . 则  $\phi Z(t) \in L^2(\Omega, X_{s,b})$  且

$$E \left( \left\| \phi Z \right\|_{X_{s,b}}^2 \leq M(b, H, \phi) \left\| \Phi \right\|_{L_2^{0,s+\gamma}}^2 \right), \tag{18}$$

其中  $M(b, H, \phi)$  只依赖  $b, H, \left\| |t|^{1/2} \phi(t) \right\|_{L_t^2}^2, \left\| \phi(t) \right\|_{H_t^b}^2$  及  $\left\| |t|^{1/2} \phi(t) \right\|_{L_t^\infty}^2$  的常数.

### 3 局部适定性

首先,以下三线性估计在文献[5]得到.

**引理 2** 令  $s \geq \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{4}, b = \frac{1}{2} - \epsilon$  且  $0 < \epsilon \leq \frac{\alpha}{2(3\alpha+8)}$ , 有  $\left\| (u_1 u_2 u_3)_x \right\|_{X_{s,-b}} \leq C \prod_{j=1}^3 \left\| u_j \right\|_{X_{s,b}}$ .

**注 1** 在性质 1 中要求  $H \geq b$  且  $H > \frac{1}{2} - \gamma$ . 结合引理 2, 如  $H \geq b > \frac{1}{2} - \epsilon$ , 可取  $\gamma = \frac{\alpha}{2(3\alpha+8)}$ . 从而

当  $\frac{\alpha+4}{3\alpha+8} < H < \frac{1}{2}$  时,  $\Phi \in L_2^{0, s+\frac{\alpha(\alpha+2)}{4(3\alpha+8)}}$ .

**引理 3** 令  $0 < a, b < \frac{1}{2}, c > \frac{1}{2}, s \in \mathbf{R}, u_0 \in H^s, f \in X_{s,-a}$ . 则

$$\left\| U(t) u_0 \right\|_{X_{s,c}} \leq C \left\| u_0 \right\|_{H^s}, \tag{19}$$

$$\left\| \int_0^t U(t-\tau) f(\tau) d\tau \right\|_{X_{s,b}} \leq C T^{1-a-b} \left\| f \right\|_{X_{s,-a}}. \tag{20}$$

**定理 1 的证明** 首先考虑  $\frac{\alpha+4}{3\alpha+8} < H < \frac{1}{2}$  情形. 令  $Z(t)$  由(8)式给定,  $z(t) = U(t)u_0, v(t) = u(t) - Z(t) - z(t)$ , 则

$$\begin{aligned}
 v(t) &= \mathcal{F}v(t) = -\frac{1}{3} \int_0^t U(t-s) (v^3 + Z^3 + z^3 + 3v^2 Z + 3v Z^2 + \\
 &\quad 3v^2 z + 3v z^2 + 3Z z^2 + 3Z z^2 + 6v Z z)_x ds. \tag{21}
 \end{aligned}$$

令  $B_R = \{v \in X_{s,b}^T, \left\| v \right\|_{X_{s,b}^T} \leq R\}$ . 由性质 1、引理 2 和引理 3, 得到

$$\|\mathcal{F}v(t)\|_{X_{s,b}^T} \leq CT^{1-a-b}(R^3 + \|Z\|_{X_{s,b}^T}^3 + \|u_0\|_{H^s}^3).$$

对于  $v_1, v_2 \in B_R$ , 有  $\|\mathcal{F}v_1 - \mathcal{F}v_2\|_{X_{s,b}^T} \leq CT^{1-a-b}(R^2 + \|Z\|_{X_{s,b}^T}^2 + \|u_0\|_{H^s}^2)\|v_1 - v_2\|_{X_{s,b}^T}$ .

令  $R_0 = \|Z\|_{X_{s,b}} + \|u_0\|_{H^s} \leq R, T = \inf\{t > 0, 2CT^{1-a-b}R_0^2 \leq \frac{1}{2}\}$ . 则  $\mathcal{F}$  在空间  $X_{s,b}^T$  映  $B_R$  到自身且

$\|\mathcal{F}v_1 - \mathcal{F}v_2\|_{X_{s,b}^T} \leq \frac{1}{2}\|v_1 - v_2\|_{X_{s,b}^T}$ . 因此  $\mathcal{F}$  有一个唯一的不动点即是方程(21) 在空间  $X_{s,b}^T$  中的唯一解.

接下来证明  $u = z + v + Z \in X_{s,c}^T + X_{s,b}^T$  属于空间  $C([0, T]; H^s)$ . 由嵌入定理,  $z \in C([0, T]; H^s)$ . 类似文献[11]中定理 6.10 的证明, 得到  $Z(t)$  在  $H^s$  中有连续的修正. 令  $\bar{u}$  是  $u$  在  $X_{s,c} + X_{s,b}$  中的任意延拓, 由性质 1 及文献[12], 得到  $\|\varphi_T \int_0^t U(t-s)(\bar{u}^3)_x dr\|_{X_{s,1-a}} \leq C\|(\bar{u}^3)_x\|_{X_{s,-a}}$ . 因为  $1-a > 1/2$ , 所以  $\bar{u} \in X_{s,b} \subset C([0, T]; H^s)$ , 这里  $\varphi_T(\cdot) = \psi(\frac{\cdot}{T})$ .

类似  $\frac{\alpha+4}{3\alpha+8} < H < \frac{1}{2}$  情形, 利用性质 2 和引理 2 得到  $\frac{1}{2} < H < 1$  时解的存在唯一性.

### 参 考 文 献

- [1] Kenig C, Ponce G, Vega L. Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle[J]. Comm Pure Appl Math, 1993, 46: 527-620.
- [2] Birnir B, Ponce G, Svanstedt N. The local ill-posedness of the modified KdV equation[J]. Ann Inst Henri Poincaré, 1996, 34: 529-535.
- [3] Kenig C, Ponce G, Vega L. On the illposedness of some canonical dispersive equations[J]. Duke Math J, 2001, 106: 617-633.
- [4] Grünrock A, Vega L. Local well-posedness for the modified KdV equation in almost critical  $\widehat{H}_x^s$ -spaces[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2009, 361: 5681-5694.
- [5] Yan W, Huang J H, Guo B L. Well-posedness for Stochastic Generalized Fractional Benjamin-Ono Equation[EB/OL]. [2017-03-10]. [http://adsabs.harvard.edu/cgi-bin/bib\\_query? arXiv:1504.02172](http://adsabs.harvard.edu/cgi-bin/bib_query? arXiv:1504.02172).
- [6] de Bouard A, Debussche A, Tsutsumi Y. White noise driven Korteweg-de Vries equation[J]. J Funct Anal, 1999, 169: 532-558.
- [7] Bian B J, Wang G L. Well-posedness of stochastic KdV-BO equation driven by fractional Brownian motion[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 243: 657-669.
- [8] Alòs E, Mazet O, Nualart D. Stochastic calculus with respect to Gaussian processes[J]. Ann Probab, 2001, 29: 766-801.
- [9] Tindel S, Tudor C A, Viens F. Stochastic evolution equations with fractional Brownian motion[J]. Probab Theory Related Fields, 2003, 127: 186-204.
- [10] Zähle M. On the link between fractional and stochastic calculus, Stochastic Dynamics[J]. New York: Springer, 1999: 305-325.
- [11] Prato Da G, Zabczyk J. Stochastic Equations in Infinite Dimensions[D]. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
- [12] Kenig C E, Ponce G, Vega L. The Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation in Sobolev spaces of negative indices[J]. Duke Math J, 1993, 71: 1-21.

## Well-posedness for Stochastic Fractional Benjamin-Ono Equations Driven by Fractional Brownian Motion

Huang Jianhua<sup>1</sup>, Chen Yong<sup>2</sup>, Yan Wei<sup>3</sup>

(1. College of Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China; 2. College of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China; 3. College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

**Abstract:** In this paper, the stochastic fractional Benjamin-Ono equations driven by fractional Brownian motion has been discussed. The regularity of stochastic convection for fractional Brownian motions in Bourgain space is established, and the local well-posedness for the stochastic fractional Benjamin-Ono equations is established by the trilinear-estimates and the contracting mapping principle in the Bourgain space.

**Keywords:** well-posedness; fractional Brownian motion; fractional Benjamin-Ono equations

[责任编辑 陈留院]