文章编号:1000-2367(2022)03-0067-06　　**DOI**:10.16366/j.cnki.1000-2367.2022.03.008

抛物型积分微分方程的连续时空有限元方法

曲双红,郭昱杉,关宏波

(郑州轻工业大学 数学与信息科学学院,郑州 450002)

摘　要:针对抛物型积分微分方程提出了一种连续时空有限元方法,通过引入时空投影算子,得到了相应的最优误差估计结果.与传统全离散方式不同的是,该方法对时间变量和空间变量同时采用有限元逼近,且无时间离散步长和空间网格尺寸的网格比限制.所得结果对于进一步研究非定常偏微分方程的数值算法具有积极推动作用.

关键词:抛物型积分微分方程;时空有限元方法;最优误差估计

中图分类号:O242.21　　**文献标志码**:A

本文考虑如下的抛物型积分微分方程:

$$\begin{cases} u_t-\Delta u-\int_0^t \Delta u(x,\tau)\mathrm{d}\tau=f,\forall (x,t)\in \Omega\times[0,T], \\ u(x,t)=0,\forall (x,t)\in \partial\Omega\times[0,T], \\ u(x,0)=u_0,\forall x\in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega\subset \mathbf{R}^2$ 为有界凸区域,$\partial\Omega$ 为 Ω 的边界,T 是总时间,$u_0=u_0(x)$ 是 $t=0$ 时刻的初值,u 为未知函数,f 为已知的右端源项.本文所用到的 Sobolev 空间及范数的记号都是标准的,见文献[1].

抛物型积分微分方程常应用于物理和工程领域,特别是需要考虑先前状态对当前状态产生影响的相关模型问题,如黏弹性体压缩问题、气体扩散问题、流动流体衰变问题、热传导问题等.由于其积分项的出现与传统的抛物方程产生了本质上的区别,使其解析求解变得相对困难,因此该方程的数值解法倍受关注.文献[2]研究了其半离散格式下的非协调 $\mathrm{EQ}_1^{\mathrm{rot}}$ 有限元逼近,通过构造适当的插值后处理算子,得到了各向异性网格下的整体超收敛结果.文献[3]讨论了类 Wilson 元逼近格式,采用对时间导数转移技巧,并结合双线性元的高精度结果,构造了一个外推格式,得到了更高精度的逼近结果.文献[4]分别用任意次多边形或多面体有限元逼近二维或三维抛物型积分微分方程,证明了弱 Galerkin 全离散格式解的存在唯一性,并导出了相应的最优误差估计结果.文献[5-6]分别研究了带弱奇异核的抛物型积分微分方程的非协调有限元方法和 Hermite 型各向异性矩形元逼近,在半离散和全离散格式下得到了最优误差估计结果.

事实上,连续时空有限元方法在数值求解时间相关的非定常问题时,具有独特优势,与传统的全离散有限元格式[7]不同,其主要思想是同时对时间变量和空间变量进行有限元离散,可以实现在时间和空间两个维度上同时得到高精度的结果.而且连续时空有限元方法的数值计算和理论分析对任意阶的时间离散和空间离散能够进行统一处理,并且一致成立.该方法已被广泛应用于热传导方程[8]、反应扩散方程[9]、Sobolev 方程[10]、半线性奇异抛物方程[11]、对流扩散反应方程[12]等时间相关的偏微分方程,然而关于抛物型积分微分方程的连续时空有限元方法,目前尚未见到有文献报道.

收稿日期:2021-06-18;**修回日期**:2022-02-11.

基金项目:国家自然科学基金(11501527);河南省高校青年骨干教师基金(2020GGJS126);河南省自然科学基金(222300420585).

作者简介:曲双红(1973-),女,河南偃师人,郑州轻工业大学副教授,研究方向为有限元方法及应用、金融数学等,E-mail:qushh_2003@163.com.

通信作者:关宏波(1981-),男,河南渑池人,郑州轻工业大学副教授,博士,研究方向为有限元方法及应用,E-mail:guanhongbo@zzuli.edu.cn.

本文拟针对抛物型积分微分方程,研究其连续时空有限元方法,并得到相应的最优误差估计结果.写作结构如下:第 1 节介绍连续时空有限元方法的一些原理和性质;第 2 节进行详细的误差分析,得到有限元解在时间节点处的最优误差估计结果;第 3 节对结论进行了总结与推广.

1 连续时空有限元方法

原问题(1)对应的变分形式为:求 $u\in U$,使得

$$\begin{cases}\int_0^T[(u_t,v)+(\nabla u,\nabla v)+\int_0^t(\nabla u,\nabla v)\mathrm{d}\tau]\mathrm{d}t=\int_0^T(f,v)\mathrm{d}t,\forall v\in U,\\ u(x,0)=u_0,\forall x\in\Omega,\end{cases}\tag{2}$$

其中 $U=H^1(0,T;H_0^1(\Omega))$,L^2 内积 $(f,v)=\int_\Omega fv\mathrm{d}x$.

下面引入连续时空有限元方法.首先在时间轴 $J=[0,T]$ 中插入 $(N-1)$ 个节点,$0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_N=T$,将其分割为 N 个小区间,令 $J_n=[t_{n-1},t_n]$,$k=\max\limits_{1\leq n\leq N}|t_n-t_{n-1}|$;同时对空间区域进行拟一致三角剖分 $T_h=\{K\}$,$h=\max\limits_{K\in T_h}h_K$,其中 h_K 为三角形单元 K 的最大直径.用 $S_{kl}([0,T])$ 表示关于时间变量的 l 次一维有限元空间,即 $S_{kl}([0,T])=\{v\in C^0([0,T]):v|_{[t_{j-1},t_j]}\in P_l([t_{j-1},t_j]),j=1,2,\cdots,N\}$,而 $S_{hm}(\Omega)\subset H_0^1(\Omega)$ 表示关于空间变量的 m 次二维协调有限元空间,最后定义连续时空有限元空间 $U_{hk}=S_{hm}(\Omega)\otimes S_{kl}([0,T])$.

于是,问题(2)所对应的连续时空有限元格式为:求 $u^{hk}\in U_{hk}$,使得

$$\begin{cases}\int_0^T[(u_t^{hk},v^{hk})+(\nabla u^{hk},\nabla v^{hk})+\int_0^t(\nabla u^{hk},\nabla v^{hk})\mathrm{d}\tau]\mathrm{d}t=\int_0^T(f,v^{hk})\mathrm{d}t,\forall v^{hk}\in U_{hk},\\ u^{hk}(x,0)=P_xu_0,\forall x\in\Omega,\end{cases}\tag{3}$$

其中 $P_x:H_0^1(\Omega)\to S_{hm}(\Omega)$ 为针对空间变量的椭圆投影算子,如果 $u\in H_0^1(\Omega)$,则满足:

$$(\nabla P_xu,\nabla v^h)=(\nabla u,\nabla v^h),\forall v^h\in S_{hm}(\Omega).\tag{4}$$

更进一步,对任意的 $u\in H_0^1(\Omega)\cap H^S(\Omega)$,成立如下误差估计[1]:

$$\|P_xu-u\|_r\leq Ch^{s-r}\|u\|_S,0\leq r\leq s\leq m+1,\tag{5}$$

其中 C 是与网格剖分尺寸 h 及时间离散步长 k 无关的正常数,不同的地方取值可能不同.

由于 u^{hk} 是经过时间层的连续推移得到的,所以,对于 $n=1,2,\cdots,N$,u^{hk} 满足

$$\int_{J_n}[(u_t^{hk},v^{hk})+(\nabla u^{hk},\nabla v^{hk})+\int_0^t(\nabla u^{hk},\nabla v^{hk})\mathrm{d}\tau]\mathrm{d}t=$$
$$\int_{J_n}(f,v^{hk})\mathrm{d}t,\forall v^{hk}\in S_{hm}(\Omega)\otimes P_l(J_n),\tag{6}$$

其中,$P_l(J_n)$ 表示定义在 J_n 上次数为 l 的多项式的集合,$u^{hk}(x,0)=P_xu_0$,而 $u^{hk}(x,t_n)(n=1,2,\cdots,N)$ 可以通过前面的时间层求出.

此外,定义关于时间方向的投影算子 $P_t:H^1(0,T)\to S_{kl}([0,T])$,易知 $P_tu(t_n)=u(t_n)(n=0,1,\cdots,N)$.如果 $u\in H^1(0,T)$,则成立:

$$\int_0^T(P_tu)_tv_t\mathrm{d}t=\int_0^Tu_tv_t\mathrm{d}t,\forall v\in S_{kl}([0,T]).\tag{7}$$

同时,对任意的 $u\in H^s(0,T)$,则:

$$\|P_tu-u\|_{H^r(0,T)}\leq Ck^{s-r}\|u\|_{H^s(0,T)},0\leq r\leq s\leq l+1.\tag{8}$$

另外,关于上面投影算子 P_x 和 P_t,文献[13]还证明了如下逼近性质:

当 $v\in L^2(0,t_n;H^s(\Omega))\cap H^1(0,t_n;H_0^1(\Omega))$ 时,有

$$\|(v-P_xv)(t)\|_{L^2(0,t_n;L^2)}\leq Ch^s\|v(t)\|_{L^2(0,t_n;H^s)},1\leq s\leq m+1.\tag{9}$$

当 $v\in H^r(0,t_n;H^{m+1}(\Omega))\cap H^{l+1}(0,t_n;H^s(\Omega))$ 时,有

$$\|v-P_tP_xv\|_{H^r(0,t_n;H^s)}\leq C(h^{m+1-s}\|v\|_{H^r(0,t_n;H^{m+1})}+k^{l+1-r}\|v\|_{H^{l+1}(0,t_n;H^s)}),r,s=0,1.\tag{10}$$

2　误差估计

本节对抛物型积分微分方程的连续时空有限元方法进行详细的误差分析，得到如下主要结论.

定理　假设 $u \in H^{l+1}(0,t_n;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,t_n;H^{m+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ 和 $u^{hk} \in U_{hk}$ 分别为方程(2)和(3)的解，则对任意的 $n=1,2,\cdots,N$，成立如下最优误差估计结果：

$$\|\nabla(u-u^{hk})(t_n)\|_0 + \|(u-u^{hk})_t\|_{L^2(0,t_n;L^2)} \leq C(h^m\|u(t_n)\|_{m+1} + h^{m+1}\|u\|_{H^1(0,t_n;H^{m+1})} + k^l\|u\|_{H^{l+1}(0,t_n;H^2)}), \tag{11}$$

和

$$\|(u-u^{hk})_t(t_n)\|_0 + \|\nabla(u-u^{hk})_t\|_{L^2(0,t_n;L^2)} \leq C(h^{m+1}\|u_t(t_n)\|_{m+1} + h^m\|u\|_{H^2(0,t_n;H^{m+1})} + k^l\|u\|_{H^{l+1}(0,t_n;H^1)}). \tag{12}$$

证明　结合(2)、(3)及(6)式，得到误差方程：

$$\int_0^{t_n}[((u-u^{hk})_t,v^{hk}) + (\nabla(u-u^{hk}),\nabla v^{hk}) + \int_0^t(\nabla(u-u^{hk})(\tau),\nabla v^{hk})\mathrm{d}\tau]\mathrm{d}t = 0. \tag{13}$$

根据 P_t 和 P_x 的定义，(13)式可变形为

$$\int_0^{t_n}[((P_tP_xu-u^{hk})_t,v^{hk}) + (\nabla(P_tP_xu-u^{hk}),\nabla v^{hk}) + \int_0^t(\nabla(P_tP_xu-u^{hk})(\tau),\nabla v^{hk})\mathrm{d}\tau]\mathrm{d}t = \int_0^{t_n}[((P_xu-u)_t,v^{hk}) + (\nabla(P_tu-u),\nabla v^{hk}) + \int_0^t(\nabla(P_tu-u)(\tau),\nabla v^{hk})\mathrm{d}\tau]\mathrm{d}t, \tag{14}$$

或

$$\int_0^{t_n}[((P_tP_xu-u^{hk})_t,v^{hk}) + (\nabla(P_tP_xu-u^{hk}),\nabla v^{hk}) + \int_0^t(\nabla(P_tP_xu-u^{hk})(\tau),\nabla v^{hk})\mathrm{d}\tau]\mathrm{d}t = \int_0^{t_n}[((P_xu-u)_t,v^{hk}) - (\Delta(P_tu-u),v^{hk}) + \int_0^t(\nabla(P_tu-u)(\tau),\nabla v^{hk})\mathrm{d}\tau]\mathrm{d}t, \tag{15}$$

在(15)式中取 $v^{hk}=(P_tP_xu-u^{hk})_t$，可得：

$$\int_0^{t_n}[((P_tP_xu-u^{hk})_t,(P_tP_xu-u^{hk})_t) + (\nabla(P_tP_xu-u^{hk}),\nabla(P_tP_xu-u^{hk})_t) + \int_0^t(\nabla(P_tP_xu-u^{hk})(\tau),\nabla(P_tP_xu-u^{hk})_t(t))\mathrm{d}\tau]\mathrm{d}t = \int_0^{t_n}[((P_xu-u)_t,(P_tP_xu-u^{hk})_t) + (\Delta(P_tu-u),(P_tP_xu-u^{hk})_t) + \int_0^t(\nabla(P_tu-u)(\tau),\nabla(P_tP_xu-u^{hk})_t(t))\mathrm{d}\tau]\mathrm{d}t, \tag{16}$$

注意到(16)式中左端第 3 项和右端第 3 项可分别变形为

$$\int_0^t(\nabla(P_tP_xu-u^{hk})(\tau),\nabla(P_tP_xu-u^{hk})_t(t))\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t(\nabla(P_tP_xu-u^{hk})(\tau),\nabla(P_tP_xu-u^{hk})_t(t))\mathrm{d}\tau - \|\nabla(P_tP_xu-u^{hk})\|_0^2 \tag{17}$$

和

$$\int_0^t(\nabla(P_tu-u)(\tau),\nabla(P_tP_xu-u^{hk})_t(t))\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t(\nabla(P_tu-u)(\tau),\nabla(P_tP_xu-u^{hk})_t(t))\mathrm{d}\tau - (\nabla(P_tu-u),\nabla(P_tP_xu-u^{hk})), \tag{18}$$

将(17)、(18)式代入(16)式，并利用 Hölder 不等式，得：

$$\|(P_tP_xu-u^{hk})_t\|_{L^2(0,t_n;L^2)}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla(P_tP_xu-u^{hk})(t_n)\|_0^2 + \int_0^{t_n}(\nabla(P_tP_xu-u^{hk})(\tau),\nabla(P_tP_xu-u^{hk})(t_n))\mathrm{d}\tau \leq \|(P_xu-u)_t\|_{L^2(0,t_n;L^2)}^2 + \|\Delta(P_tu-u)\|_{L^2(0,t_n;L^2)}^2 + C(\|\nabla(P_tP_xu-u^{hk})\|_{L^2(0,t_n;L^2)}^2) + \|\nabla(P_tu-u)\|_{L^2(0,t_n;L^2)}^2 + \int_0^{t_n}(\nabla(P_tu-u)(\tau),\nabla(P_tP_xu-$$

$$u^{hk})(t_n))\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2}\|(P_tP_xu-u^{hk})_t\|^2_{L^2(0,t_n;L^2)},\tag{19}$$

即

$$\|(P_tP_xu-u^{hk})_t\|^2_{L^2(0,t_n;L^2)}+\|\nabla(P_tP_xu-u^{hk})(t_n)\|_0^2+2\int_0^{t_n}(\nabla(P_tP_xu-u^{hk})(\tau),\nabla(P_tP_xu-u^{hk})(t_n))\mathrm{d}\tau\le 2\|(P_xu-u)_t\|^2_{L^2(0,t_n;L^2)}+2\|\Delta(P_tu-u)\|^2_{L^2(0,t_n;L^2)}+C(\|\nabla(P_tP_xu-u^{hk})\|^2_{L^2(0,t_n;L^2)})+\|\nabla(P_tu-u)\|^2_{L^2(0,t_n;L^2)})+2\int_0^{t_n}(\nabla(P_tu-u)(\tau),\nabla(P_tP_xu-u^{hk})(t_n))\mathrm{d}\tau.\tag{20}$$

(20)式可进一步估计为

$$\|(P_tP_xu-u^{hk})_t\|^2_{L^2(0,t_n;L^2)}+\|\nabla(P_tP_xu-u^{hk})(t_n)\|_0^2\le 2\|(P_xu-u)_t\|^2_{L^2(0,t_n;L^2)}+2\|\Delta(P_tu-u)\|^2_{L^2(0,t_n;L^2)}+C(\|\nabla(P_tP_xu-u^{hk})\|^2_{L^2(0,t_n;L^2)})+\|\nabla(P_tu-u)\|^2_{L^2(0,t_n;L^2)})+2\int_0^{t_n}\|\nabla(P_tu-u)(\tau)\|_0\|\nabla(P_tP_xu-u^{hk})(t_n)\|_0\mathrm{d}\tau+2\int_0^{t_n}\|\nabla(P_tP_xu-u^{hk})(\tau)\|_0\|\nabla(P_tP_xu-u^{hk})(t_n)\|_0\mathrm{d}\tau\le 2\|(P_xu-u)_t\|^2_{L^2(0,t_n;L^2)}+2\|\Delta(P_tu-u)\|^2_{L^2(0,t_n;L^2)}+C(\|\nabla(P_tP_xu-u^{hk})\|^2_{L^2(0,t_n;L^2)})+\|\nabla(P_tu-u)\|^2_{L^2(0,t_n;L^2)})+\frac{1}{2}\|\nabla(P_tP_xu-u^{hk})(t_n)\|_0^2.\tag{21}$$

利用 Gronwall 不等式,可得:

$$\|(P_tP_xu-u^{hk})_t\|_{L^2(0,t_n;L^2)}+\|\nabla(P_tP_xu-u^{hk})(t_n)\|_0\le 4\|(P_xu-u)_t\|_{L^2(0,t_n;L^2)}+4\|\Delta(P_tu-u)\|_{L^2(0,t_n;L^2)}+C\|\nabla(P_tu-u)\|_{L^2(0,t_n;L^2)}\le C(h^{m+1}\|u\|_{H^1(0,t_n;H^{m+1})}+k^{l+1}\|u\|_{H^{l+1}(0,t_n;H^2)}).\tag{22}$$

由三角不等式及投影算子的性质,并注意到 $P_tP_xu(t_n)=P_xu(t_n)$,有

$$\|(u-u^{hk})_t\|_{L^2(0,t_n;L^2)}+\|\nabla(u-u^{hk})(t_n)\|_0\le\|(u-P_tP_xu)_t\|_{L^2(0,t_n;L^2)}+\|(P_tP_xu-u^{hk})_t\|_{L^2(0,t_n;L^2)}+\|\nabla(u-P_tP_xu)(t_n)\|_0+\|\nabla(P_tP_xu-u^{hk})(t_n)\|_0\le\|(u-P_tP_xu)_t\|_{L^2(0,t_n;L^2)}+\|(P_tP_xu-u^{hk})_t\|_{L^2(0,t_n;L^2)}+\|\nabla(u-P_xu)(t_n)\|_0+\|\nabla(P_xu-P_tP_xu)(t_n)\|_0+\|\nabla(P_tP_xu-u^{hk})(t_n)\|_0\le C(h^m\|u(t_n)\|_{m+1}+h^{m+1}\|u\|_{H^1(0,t_n;H^{m+1})}+k^l\|u\|_{H^{l+1}(0,t_n;H^2)}).\tag{23}$$

定理中第1个结论(11)式得证.

另一方面,对(14)式关于 t 求导,能够得到

$$\int_0^{t_n}[((P_tP_xu-u^{hk})_{tt},v^{hk})+(\nabla(P_tP_xu-u^{hk})_t,\nabla v^{hk})+(\nabla(P_tP_xu-u^{hk}),\nabla v^{hk})]\mathrm{d}t=\int_0^{t_n}[((P_xu-u)_{tt},v^{hk})+(\nabla(P_tu-u)_t,\nabla v^{hk})+(\nabla(P_tu-u)(\tau),\nabla v^{hk})]\mathrm{d}t,\tag{24}$$

在(24)式中取 $v^{hk}=(P_tP_xu-u^{hk})_t$,可得:

$$\int_0^{t_n}[((P_tP_xu-u^{hk})_{tt},(P_tP_xu-u^{hk})_t)+(\nabla(P_tP_xu-u^{hk})_t,\nabla(P_tP_xu-u^{hk})_t)+(\nabla(P_tP_xu-u^{hk}),\nabla(P_tP_xu-u^{hk})_t)]\mathrm{d}t=\int_0^{t_n}[((P_xu-u)_{tt},(P_tP_xu-u^{hk})_t)+(\nabla(P_tu-u)_t,\nabla(P_tP_xu-u^{hk})_t)+(\nabla(P_tu-u)(\tau),\nabla(P_tP_xu-u^{hk})_t)]\mathrm{d}t.\tag{25}$$

利用 Hölder 不等式和模等价性质,可得:

$$\frac{1}{2}\|(P_tP_xu-u^{hk})_t(t_n)\|_0^2+\|\nabla(P_tP_xu-u^{hk})_t\|^2_{L^2(0,t_n;L^2)}+\frac{1}{2}\|\nabla(P_tP_xu-u^{hk})(t_n)\|_0^2\le\frac{3}{2}(\|(P_xu-u)_{tt}\|^2_{L^2(0,t_n;L^2)}+\|\nabla(P_tu-u)_t\|_0^2+\|\nabla(P_tu-u)\|^2_{L^2(0,t_n;L^2)})+$$

$$\frac{1}{2}\|\nabla(P_tP_xu-u^{hk})_t\|^2_{L^2(0,t_n;L^2)},\tag{26}$$

即

$$\begin{aligned}&\|(P_tP_xu-u^{hk})_t(t_n)\|_0+\|\nabla(P_tP_xu-u^{hk})_t\|_{L^2(0,t_n;L^2)}\leq 3(\|(P_xu-u)_{tt}\|_{L^2(0,t_n;L^2)}+\\&\|\nabla(P_tu-u)_t\|_{L^2(0,t_n;L^2)}+\|\nabla(P_tu-u)\|_{L^2(0,t_n;L^2)})\leq\\&C(h^{m+1}\|u\|_{H^2(0,t_n;H^{m+1})}+k^l\|u\|_{H^{l+1}(0,t_n;H^1)}).\end{aligned}\tag{27}$$

由三角不等式及投影算子的性质，得

$$\begin{aligned}&\|(u-u^{hk})_t(t_n)\|_0+\|\nabla(u-u^{hk})_t\|_{L^2(0,t_n;L^2)}\leq\|(u-P_xu)_t(t_n)\|_0+\|(P_xu-P_tP_xu)_t(t_n)\|_0+\\&\|(P_tP_xu-u^{hk})_t(t_n)\|_0+\|\nabla(u-P_tP_xu)_t\|_{L^2(0,t_n;L^2)}+\|\nabla(P_tP_xu-u^{hk})_t\|_{L^2(0,t_n;L^2)}\leq\\&C(h^{m+1}\|u_t(t_n)\|_{m+1}+h^m\|u\|_{H^2(0,t_n;H^{m+1})}+k^l\|u\|_{H^{l+1}(0,t_n;H^1)}).\end{aligned}\tag{28}$$

结论(12)式得证.至此定理证毕.

3 小　结

本文主要研究了线性抛物型积分微分方程的连续时空有限元逼近方法，该方法对于时间变量和空间变量同时采用有限元离散，所得结果对于任意次的多项式空间均是成立的，并且抛弃了传统有限元方法中关于时间离散步长和空间网格尺寸的网格比限制.另外，如果将文献[14－15]中关于非线性项的误差估计技巧稍作改进，便可对半线性和非线性的抛物型积分微分方程[16－17]进行连续有限元误差分析，同样能够得到最优阶的误差估计结果.

参 考 文 献

[1] BRENNER S C，SCOTT L R.The Mathematical Theory of Finite Element Methods[M].New York：Springer，1994.

[2] 石东洋，王海红.抛物型积分微分方程各向异性非协调有限元分析[J].工程数学学报，2009，26(2)：209-218.
SHI D Y，WANG H H.Anisotropic nonconforming finite element analysis for integro-differential equations of parabolic type[J].Chinese Journal of Engineering Mathematics，2009，26(2)：209-218.

[3] 孟晓然，石东洋.抛物积分微分方程非协调类 Wilson 元的整体超收敛和外推[J].数学杂志，2013，33(2)：301-308.
MENG X R，SHI D Y.Global superconvergence and extrapolation of quasi-Wilson element solution to integro-differential of parabolic equations[J].Journal of Mathematics，2013，33(2)：301-308.

[4] 刘轩宇，罗鲲，王皓.抛物型积分微分方程的新型全离散弱 Galerkin 有限元法[J].四川大学学报(自然科学版)，2020，57(5)：830-840.
LIU X Y，LUO K，WANG H.A new fully discrete weak Galerkin finite element method for parabolic integro-differential equation[J].Journal of Sichuan University(Natural Science Edition)，2020，57(5)：830-840.

[5] 石东洋，郭城，王海红.带弱奇异核的抛物型积分微分方程的非协调有限元方法[J].数学物理学报，2010，30(3)：764-775.
SHI D Y，GUO C，WANG H H.Nonconforming finite element method for integro-differential equation of parabolic type with weakly singular kernel[J].Acta Mathematica Scientia，2010，30(3)：764-775.

[6] 樊明智，王芬玲，牛裕琪，等.带弱奇异核非线性积分微分方程的有限元分析[J].数学的实践与认识，2012，42(12)：141-149.
FAN M Z，WANG F L，NIU Y Q，et al.Finite element analysis for nonlinear integro differential equation with weakly singular kernel[J].Mathematics in Practice and Theory，2012，42(12)：141-149.

[7] 石东洋，穆朋聪.非线性强阻尼波动方程一个新的 H^1-Galerkin 混合有限元分析[J].河南师范大学学报(自然科学版)，2018，46(5)：1-12.
SHI D Y，MU P C.A new H^1-Gelerjin mixed finite element analysis for nonlinear strong damped wave equations[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition)，2018，46(5)：1-12.

[8] AZIZ A K，MONK P.Continuous finite elements in space and time for the heat equation[J].Math Compt，1989，52(186)：255-274.

[9] 李宏，杜春瑶，赵智慧.反应扩散方程的连续时空有限元方法[J].计算数学，2017，39(2)：167-178.
LI H，DU C Y，ZHAO Z H.Continuous space-time finite element method for reaction diffusion equation[J].Mathematica Numerica Sinica，2017，39(2)：167-178.

[10] 赵智慧，李宏，罗振东.Sobolev 方程的连续时空有限元方法[J].计算数学，2016，38(4)：341-353.
ZHAO Z H，LI H，LUO Z D.A space-time continuous finite element method for sobolev equation[J].Mathematica Numerica Sinica，2016，38(4)：341-353.

[11] 王海钧，李宏.半线性奇异抛物方程的连续时空有限元方法[J].内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版)，2011，40(2)：109-116.
WANG H J，LI H.A continuous space-time finite element method for semilinear singular parabolic equations[J].Journal of Inner Mongolia

Normal University(Natural Science Edition),2011,40(2):109-116.

[12] 董自明,李宏,赵智慧,等.对流扩散反应方程的局部投影稳定化连续时空有限元方法[J].计算数学,2021,43(3):367-387.
DONG Z M,LI H,ZHAO Z H,et al.Local projection stabilization continuous space-time finite element method for convection-diffusion-reaction equations[J].Mathematica Numerica Sinica,2021,43(3):367-387.

[13] ADAMS R A,FOURNIER J F.Sobolev Spaces(Second Edition)[M].New York:Academic Press,2003:135-163.

[14] 于志云,石东伟,石东洋.非线性抛物型方程的变网格非协调有限元分析[J].河南师范大学学报(自然科学版),2012,40(4):1-4.
YU Z Y,SHI D W,SHI D Y.Nonconforming finite element analysis with moving grids for nonlinear parabolic equations[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition),2012,40(4):1-4.

[15] GUAN H B,SHI D Y.Superconvergence analysis of a nonconforming finite element method for monotone semilinear elliptic optimal control problems[J].Numerical Methods for Partial Differential Equations,2020,36(6):1405-1417.

[16] 李宏,王焕清.半线性抛物型积分微分方程的间断时空有限元方法[J].计算数学,2006,28(3):294-308.
LI H,WANG H Q.The space-time discontinuous finite element method for a semi-linear parabolic integro-differential equation[J].Mathematica Numerica Sinica,2006,28(3):294-308.

[17] 李先枝,范中广.非线性抛物积分微分方程非常规 Hermite 型矩形元的高精度分析[J].华南师范大学学报(自然科学版),2019,51(2):98-104.
LI X Z,FAN Z G.A high-accuracy analysis of unconventional Hermite-type rectangular element for nonlinear parabolic integro-differential equations[J].Journal of South China Normal University(Natural Science Edition),2019,51(2):98-104.

Continuous space-time finite element method for integro-differential equations of parabolic type

Qu Shuanghong, Guo Yushan, Guan Hongbo

(College of Mathematics and Information Science, Zhengzhou University of Light Industry, Zhengzhou 450002, China)

Abstract: This paper proposes a continuous space-time finite element method for integro-differential equations of parabolic type. By introducing space-time projection operators, some optimal order error estimates are obtained. Differing from the traditional full discrete scheme, this method approximates the time and space variables by finite element method at the same time, which does not to satisfy any limitation of the ratio of the time step length and the space mesh size. The results of this paper has positive effect to promote further researches of numerical methods for parabolic type integro-differential equations.

Keywords: integro-differential equations; space-time finite element method; optimal order error estimates

[责任编校 陈留院 赵晓华]