第 44 卷 第 1 期 河南师范大学学报(自然科学版) Vol. 44 No. 1
2016 年 1 月 Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition) Jan. 2016

文章编号:1000－2367(2016)01－0015－06 DOI:10.16366/j.cnki.1000－2367.2016.01.003

最大熵方法下的纯稳健信度估计

胡莹莹，吴黎军，孙 毅

(新疆大学 数学与系统科学学院，乌鲁木齐 830046)

摘 要：最大熵方法(MEM)已被广泛运用到保险精算领域，并取得了一定成就，然而，将稳健信度估计与MEM结合起来的相关研究还没有出现，正是致力于这方面的研究，即最大熵方法下的纯稳健信度估计. 众所周知，以往的信度公式都要对索赔随机变量 X 做出一定假设，从而得到信度公式的确切表达形式. 对随机变量 X 没有做出任何假设，也同样得出了信度保费的确切的线性表达形式和两个重要推论.

关键词：稳健信度估计；最大熵方法；M 估计；影响函数；Lagrangian 乘子

中图分类号：O211.5 **文献标志码**：A

信度理论是基于历史的索赔经验估计下一年保费的一种费率厘定技术. 文献[1]提出信度保费应该是个体保费和集体保费的加权平均，即：$P_c=Z\overline{X}+(1-Z)\mu$，其中 $\overline{X}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}{n}$，$\mu$ 是集体保费，$Z=\frac{n}{n+\frac{u}{a}}$，$\upsilon=E[\mathrm{var}(X_i|\theta)]$，$a=\mathrm{var}[E(X_i|\theta)]$，$\mu(\theta)=E(X_i|\theta)$. 信度保费较 Bayes 保费最大的优点在于当事先不知道分布的情况下，利用非参数方法直接计算保费. 文献[2]在经典的 Bûhlmann 模型基础上引入自然权重 ω，这在很大程度上扩展了 Bûhlmann 模型. 在某些指数分布族和自然共轭先验分布的条件下，文献[3]证明了信度估计就是 Bayes 估计. 文献[4]把这一结果做了相应推广，得出了当存在后尾情况时的信度估计.

在保险精算中，由于大额索赔极大地干扰计算出的信度估计，使得预测出的保费出现不公正的现象. 为了防止发生这种不公平的现象，我们把稳健估计引入到了信度理论之中. 文献[5]是第一个把稳健估计引入到信度理论中，文献[6]通过为信度估计选定影响函数，提出了一个稳健信度模型. 文献[7]也提出了在信度估计中处理大额索赔的一些方法. 文献[8]在 Bûhlmann-198Straub 模型下提出了相应的稳健信度估计. 文献[9]在 De Vylder 非线性回归信度的基础上得出了稳健 M 估计. 文献[10]利用影响函数的 M 方法提出了稳健 Hachemeister 信度. 这种方法有别于文献[7]的信度估计，因为文献[7]所建立的稳健信度估计是有偏的. 文献[11]证明了纯稳健信度估计和稳健保单组合无偏信度估计的渐近最优性. 另外，当所给信息不充分时，最大熵原理提供了一种获得最小偏差统计量的方法. 最大熵方法(MEM)是由文献[12]首先提出来的，从1957 年就在这个方向做了开创性的工作，给出了利用最大熵方法定量求解问题的一般技术途径. 之后不久，文献[13]提出了一种叫作 Kullback 最小交叉熵的方法，这种方法类似于最大熵方法(MEM).

自出现以来，MEM 方法受到了很多领域的关注. 然而，在保险精算领域，只有少数几位学者把这一技术和保险精算结合到了一起. 文献[14]利用最小交叉熵的方法确定权重并估计目标效用函数. 文献[15]在效用函数的基础上做了调整使其成为累计概率函数. 文献[16]用 MEM 方法估计了离散指数族里尺度参数的分布并估计了信度因子. 文献[17]用 MEM 方法推导了非寿险保单的效用函数. 文献[18]用 MEM 方法计算了近似 Bayes 估计.

收稿日期：2015-03-09；**修回日期**：2015-09-13.

基金项目：国家自然科学基金(11361058)

第 1 作者简介：胡莹莹(1985－)，女，河南睢县人，新疆大学硕士研究生，主要从事精算数学方面的研究，E-mail：hyy198501@126.com.

通信作者：吴黎军(1961－)，男，浙江海盐人，新疆大学教授，研究方向为精算数学，E-mail：xjmath@xju.edu.cn.

虽然很多学者对稳健信度估计和最大熵方法分别做了大量研究,但是将稳健信度估计和最大熵方法结合起来的文章却还没有出现. 因此,本文将致力于这方面的研究.

1 准备知识

1.1 稳健估计

在分析数据时,通常会做出以下假设:正态、线性、独立…,但这些模型中一点小的偏差就可能严重影响预测结果. 因此,要使统计方法有较好的稳健性,就必须要求它所依据的统计量不受个别异常数据的太大影响.

我们知道,模型误差分为随机误差、系统误差和粗差. 所谓稳健估计,是在粗差不可避免的情况下,选择适当的估计方法,使所估参数尽可能减少粗差的影响,得出正常模式下最佳或者接近最佳的估计值. 运用稳健估计,是为了达到以下目的:1) 在采用假定模型下,所估计的参数应具有最优或者接近最优性;2) 若实际模型与假定模型存在较小的偏差,则对应的估计参数所受影响也较小;3) 即使实际模型与假定模型有较大的偏差,其参数估计值的性能也不应太差,亦即不至于对估计值产生灾难性的后果.

M估计是广义的极大似然估计,由文献[19]首先提出,为求T_n的估计值,即M估计,建议解下面的最小化问题:$\min\sum_{i=1}^{n}\rho(X_i, T_n)$. 因此,求该最小化问题等价于$\sum_{i=1}^{n}\psi(X_i, T_n)=0$,其中$\psi(X_i, T_n)=\dfrac{\partial\rho(X_i, T_n)}{\partial T_n}$,$\rho$为对称函数且有唯一的最小值0.

为了刻画稳健估计方法的稳定性,引入影响函数,影响函数是用来估计统计量对异常值敏感程度的指标,反映了在不同位置上异常数据对估计值所造成的相对影响的大小.

定义影响函数:$IF(x,F,T)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{T[(1-\varepsilon)F+\varepsilon\Delta_x]-T(F)}{\varepsilon}$,其中$F$为正常观测值的分布函数,$\Delta_x$为异常观测值引起的阶跃分布函数.

下面直接给出M估计的影响函数(可参考文献[11]):$IF(x,F,T)=\dfrac{\psi[X,T(F)]}{-\int\frac{\partial}{\partial\theta}\psi(y,\theta)\mid_{\theta=T(F)}\mathrm{d}_{F(y)}}$. 文献[11]已经证明了纯稳健信度估计的公式,将这个结果作为引理1列在下面.

引理1　在Buhlmann和Straub模型假设下,$\mu(\Theta_i)$的纯稳健信度估计是:$\hat{\mu}_T(\Theta_i)=\mu_T+Z_i(\bar{T}T_{i\cdot}-\mu_T)$,其中$Z_i=\dfrac{a_T\omega_{i\cdot}}{a_T\omega_{i\cdot}+s_T^2}$,$\mu_T(\theta_i)=E(T_{ij}\mid\theta_i)$,$\mu_T=E[\mu_T(\theta_i)]$,$\mathrm{var}(T_{ij}\mid\theta_i)=\dfrac{\sigma_T^2(\theta_i)}{\omega_{ij}}$,$E[\sigma_T^2(\theta_i)]=\sigma_T^2$,$\mathrm{var}[\mu_T(\theta_i)]=\tau_T^2$. 当然,为求得保单组合无偏信度估计,需要加上偏差项$\mu-\mu_T$,即$\hat{\mu}(\Theta_i)=\mu+Z_i(\bar{T}_{i\cdot}-\mu_T)$.

1.2 最大熵原理

首先介绍熵的概念,它是随机变量不确定度的度量.

定义1　设X是一个离散型随机变量,概率取值空间为χ,概率密度函数为$p(x)=Pr(X=x)$,$x\in\chi$. 则X的熵$H(X)=-\sum_{x\in\chi}p(x)\ln p(x)$.

最大熵原理是在1957年由E. T. Jaynes提出的,其主要思想是:在只掌握关于未知分布的部分知识时,应该选取符合这些知识但熵值最大的概率分布. 在这种情况下,符合已知知识的概率分布可能不止一个.

在给定的约束条件下,由最大熵原理求最优概率分布的问题,也就是求解条件极值问题,通常用拉格朗日乘子法来确定这个概率分布.

定义2　假设离散型随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$,相应的概率分别为:$p_1,p_2,\cdots,p_n$,满足的约束条件是$g_1(\cdot),\cdots,g_m(\cdot)$,并且$\sum_{i=1}^{n}g_r(x_i)=a_r$,$r=1,\cdots,m$. 则满足以上条件的拉格朗日乘子是:$L=-\sum_{i=1}^{n}p_i\ln(p_i)-\sum_{r=1}^{m}\lambda_r[\sum_{i=1}^{n}g_r(x_i)-a_r]$.

事实上,通过最大化拉格朗日乘子 L 可求出参数 $p_1, p_2, \cdots, p_n$.

2　最大熵原理下的纯稳健信度估计

假设 $X_1, \cdots, X_n$ 是保单合同前 n 年的索赔数据,$T_1, \cdots, T_n$ 是相应的稳健估计量,目标是预测未来一年的索赔 X_{n+1},由引理 1 可以看到,在纯稳健信度估计中,分两步,第一步先估计出 $\hat{T}_{n+1}$,第二步在第一步的基础上加上一个偏差项 $\mu - \mu T$,进而得出无偏估计 $\hat{X}_{n+1}$.

根据文献[5],稳健估计 T 可看成下面方程的解:

$$\sum_{i=1}^{n} \chi\left(\frac{X_i}{T}\right) = 0, \tag{1}$$

其中 $\chi(z) = \max[-c_1, \min(z-1, c_2)]$,通常情况下,$0 < c_1 \leq 1, c_2 > 0$. 将(1)变形,可得:$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{\chi}\left(\frac{X_i}{T}\right) = 1, \tilde{\chi}(z) = \chi(z) + 1 = \max[1 - c_1, \min(z, 1 + c_2)]$. 使用一种反复迭代的算法公式[11] $T^{(m+1)} = \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{X}\left(\frac{X_i}{T^{(m)}}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} T^{(m)}, m \geq 0$. 其中初值可选为,$T^{(0)} = \mathrm{median}(X_1, \cdots, X_n)$.

把 $\widetilde{X}(z)$ 代入 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{X}\left(\frac{X_i}{T}\right) = 1$ 中,$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\max[(1-c_1)T, \min(X_i, (1+c_2)T)] = T$ 令 $T_i = \max[(1-c_1)T, \min(X_i, (1+c_2)T)]$,则 $T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i = \overline{T}$.

定理 1　假设保单合同前 n 年的索赔数据是 $X_1, \cdots, X_n, T_1, \cdots, T_n$ 是相对应的稳健估计,则在线性信度保费族 $h = \{\hat{T}_{n+1}$:其中 $\hat{T}_{n+1} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i T_i, i = 1, \cdots, n\}$ 中,最优估计

$$\hat{T}_{n+1}^{*} = \alpha_0^{*} + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^{*} T_k, \tag{2}$$

满足以下两个条件:1) 平方损失达到最小;2) 熵最大.

这里,$\alpha_0^{*} = \dfrac{E(T_n + 1)}{1 + \sum_{i=1}^{n}\exp\left[\lambda \mathrm{cov}(T_i, n\overline{T})\dfrac{E(T_{n+1})}{E(T_i)}\right]}, \alpha_k^{*} = \alpha_0^{*}\dfrac{\exp\left[\lambda \mathrm{cov}(T_k, n\overline{T})\dfrac{E(T_{n+1})}{E(T_k)}\right]}{E(T_k)}$.

其中 λ 是下面方程的解:

$$\sum_{i=1}^{n}\exp\left[\lambda \mathrm{cov}(T_i, n\overline{T})\frac{E(T_{n+1})}{E(T_i)}\right]\mathrm{cov}(T_i, n\overline{T})\frac{E(T_{n+1})}{E(T_i)} = \left[1 + \sum_{i=1}^{n}\exp\left[\lambda \mathrm{cov}(T_i, n\overline{T})\frac{E(T_{n+1})}{E(T_i)}\right]\right]\mathrm{cov}(T_{n+1}, n\overline{T}).$$

进一步,为了得到无偏信度估计 $\hat{X}_{n+1}^{*}$,需要对(2)式加上偏差项 $\mu - \mu_T$,即 $\hat{X}_{n+1}^{*} = \hat{X}_{n+1}^{*} + \mu - \mu_T = \mu - \mu_T + \alpha_0^{*} + \sum_{k}^{n} = 1\alpha_k^{*} T_k$.

证明　首先求解 $\min E[T_{n+1} - \alpha_0 - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i T_i]^2$. 令

$$H = E[T_{n+1} - \alpha_0 - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i T_i]^2, \tag{3}$$

对 H 关于 α_0 求导可得 $\alpha_0 = E(T_{n+1}) - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i E(T_i)$. 即 $f_1(\alpha) = \frac{\alpha_0}{E(T_n + 1)} + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{E(T_i)}{E(T_{n+1})} - 1 = 0$. 把 α_0 代入(3)并对 α_j 求导,得到

$$\mathrm{cov}(T_{n+1}, T_j) - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \mathrm{cov}(T_i, T_j) = 0.\ \text{即}\ f_2(\alpha) = \sum_{j=1}^{n}\mathrm{cov}(T_{n+1}, T_j) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum\alpha_i \mathrm{cov}(T_i, T_j) = 0.$$

则相应的拉格朗日乘子方程是:

$$L=-\sum_{i=1}^{n}p_i\ln(p_i)-\lambda_0 f_1(\alpha)-\lambda f_2(\alpha)=-\frac{\alpha_0}{E(T_{n+1})}\ln\left(\frac{\alpha_0}{E(T_{n+1})}\right)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{E(T_i)}{E(T_{n+1})}\ln\left(\alpha_i\frac{E(T_i)}{E(T_{n+1})}\right)-$$
$$\lambda_0\left(\frac{\alpha_0}{E(T_{n+1})}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{E(T_i)}{E(T_{n+1})}-1\right)-\lambda\left[\sum_{j=1}^{n}\operatorname{cov}(T_{n+1},T_j)-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\operatorname{cov}(T_i,T_j)\right].\tag{4}$$

对(4) 式关于 α_0 求导，得到：$\alpha_0=E(T_{n+1})\cdot\exp(-1-\lambda_0)$.

将上面求得的 α_0 代入(4) 式得，

$$L=(1+\lambda_0)\exp(-1-\lambda_0)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{E(T_i)}{E(T_{n+1})}\ln\left(\alpha_i\frac{E(T_i)}{E(T_{n+1})}\right)-\lambda_0\exp(-1-\lambda_0)-$$
$$\lambda_0\cdot\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{E(T_i)}{E(T_{n+1})})+\lambda_0-\lambda\left[\sum_{j=1}^{n}\operatorname{cov}(T_{n+1},T_j)-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\operatorname{cov}(T_i,T_j)\right],\tag{5}$$

对(5) 关于 α_k 求导，$\alpha_k=\frac{E(T_{n+1})}{E(T_k)}\exp[\lambda\operatorname{cov}(T_k,n\overline{T})\frac{E(T_{n+1})}{E(T_k)}-1-\lambda_0]$.

将 α_k 代入(5)，并整理得，

$$L=\exp[-1-\lambda_0]+\lambda_0-\lambda\operatorname{cov}(T_{n+1},n\overline{T})+\sum_{i=1}^{n}\exp[\lambda\operatorname{cov}(T_i,n\overline{T})\frac{E(T_{n+1})}{E(T_i)}-1-\lambda_0]\tag{6}$$

再对(6) 关于 λ_0 求导，$\lambda_0=\ln[1+\sum_{i=1}^{n}\exp(\lambda\operatorname{cov}(T_i,n\overline{T})\frac{E(T_{n+1})}{E(T_i)})]-1$. 把上面解得的 λ_0 代入(6)，并化简可得到下面的式子：$L=\ln[1+\sum_{i=1}^{n}\exp(\lambda\operatorname{cov}(T_i,n\overline{T})\frac{E(T_{n+1})}{E(T_i)})]-\lambda\operatorname{cov}(T_{n+1},n\overline{T})$. 对上式关于 λ 求导可整理成下面的关于 λ 的等式：

$$\sum_{i=1}^{n}\exp\left(\frac{\lambda\operatorname{cov}(T_i,n\overline{T})E(T_{n+1})}{E(T_i)}\right)\cdot\frac{\operatorname{cov}(T_i,n\overline{T})E(T_{n+1})}{E(T_i)}=$$
$$\left[1+\sum_{i=1}^{n}\exp\left(\frac{\lambda\operatorname{cov}(T_i,n\overline{T})E(T_{n+1})}{E(T_i)}\right)\right]\cdot\operatorname{cov}(T_{n+1},n\overline{T}).\tag{7}$$

把 λ 看成方程(7) 的解，分别解出 α_0,α_k，

$$\alpha_0^*=\frac{E(T_{n+1})}{1+\sum_{i=1}^{n}\exp\left[\lambda\operatorname{cov}(T_i,n\overline{T})\frac{E(T_{n+1})}{E(T_i)}\right]},\alpha_k^*=\alpha_0^*\frac{\exp\left[\lambda\operatorname{cov}(T_k,n\overline{T})\frac{E(T_{n+1})}{E(T_k)}\right]}{E(T_k)}.$$

定理 1 得证.

3 两个重要推论

在经典的 Bühlman 信度模型中，对于不同年份的索赔数据给予相同的权重，但在实际应用中，这种假设显然不太合理. 因此，可以考虑时间效应，这方面的文献可以参看文献[20－21]. 下面基于定理 1 的结论，给时间效应某个合适的相依结构，可证明 α_k^* 的非递减性.

先给出一些假设：

假设 1 假设稳健估计 $T_1,\cdots,T_n$ 有各自的风险参数 $\Theta_1,\cdots,\Theta_n$，给定时间效应 Θ_i 时，稳健估计 T_i 是相互独立的，并具有相同的分布，且有 $E(T_i\mid\theta_i)=\mu_T(\theta_i)$; $\operatorname{var}(T_i\mid\theta_i)=\sigma_T^2(\theta_i)$.

假设 2 风险参数 Θ_i 有分布函数 $\pi_i(\theta)$，定义结构参数：

$$E[\mu_T(\theta_i)]=\mu_T,\ E[\sigma_T^2(\theta_i)]=\sigma_T^2,\operatorname{cov}[\mu_T(\theta_i),\mu_T(\theta_j)]=\gamma(\theta_i\mid i-j),$$

其中 $\gamma(\theta,t)$ 是关于 t 的非增函数，例如，取 $\gamma a(\theta,t)=\exp(-\xi t)$ 或 $(1+t)^{-\xi},\xi>0$.

推论 1 在假设 1 和假设 2 的条件下，有下面的关系成立：

1) 当 $\lambda>0$，$k\le\left[\frac{n}{2}\right]$时，定理 1 中的 $\alpha_k^*(k=1,\cdots,n)$ 满足

$\alpha_1^*\le\alpha_2^*\le\cdots\le\alpha^*_{\left[\frac{n}{2}\right]}-1\le\alpha^*_{\left[\frac{n}{2}\right]}=\alpha^*_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}=\cdots=\alpha^*t_n$;

2) 当 $\lambda < 0$，$k \geq \left[\frac{n}{2}\right]$ 时，定理 1 中的 α_k^* ($k = 1,\cdots,n$) 满足

$\alpha_1^* = \alpha_2^* = \cdots = \alpha^*_{\left[\frac{n}{2}\right]-1} - \leq \alpha^*_{\left[\frac{n}{2}\right]} \alpha^*_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} \leq \cdots \leq \alpha_n^*$.

证明　首先，定义符号函数 Sign 如下：

$$\mathrm{Sign}(x) = \begin{cases} 1, x > 0, \\ 0, x = 0, \\ -1, x < 0. \end{cases}$$

因为存在约束条件 $f_2(\underline{\alpha})$，所以 $\lambda \neq 0$. 下面分别讨论 $\lambda > 0$ 和 $\lambda < 0$ 的情况：

1) 当 $\lambda > 0$，$k \leq \left[\frac{n}{2}\right]$ 时，

$$\mathrm{Sign}\left(\frac{\alpha_{k+1}^*}{\alpha_{k-1}^*}\right) = \mathrm{Sign}\left(\frac{\exp[\lambda \mathrm{cov}(T_{k+1}, n\overline{T})]}{\exp[\lambda \mathrm{cov}(T_k, n\overline{T}T)]} - 1)\right) = \mathrm{Sign}(\exp[\lambda \mathrm{cov}(T_{k+1} - T_k, n\overline{T}T)] - 1) =$$
$$\mathrm{Sign}[\mathrm{cov}(T_{k+1} - T_k, n\overline{T}T)] = \mathrm{Sign}[\sum_{i=1}^n \mathrm{cov}(T_{k+1}, T_i) - \sum_{i=1}^n \mathrm{cov}(T_k, T_i)], \tag{8}$$

因为 $\sum_{i=1}^n \mathrm{cov}(T_j, T_i) = \sum_{i=1}^n \mathrm{cov}(\mu_T(\theta_i), \mu_T(\theta_j)) + \sigma_T^2 = \sum_{i=1}^n \gamma(\theta, |i-j|) + \sigma_T^2$，所以

$$\mathrm{Sign}\left(\frac{\alpha_{k+1}^*}{\alpha_{k-1}^*}\right) = \mathrm{Sign}[\sum_{i=1}^n \gamma(\theta, |i-k-1|) - \sum_{i=1}^n \gamma(\theta, |i-k|)] = \mathrm{Sign}[\gamma(\theta, k) - \gamma(\theta, n-k)], \tag{9}$$

又因为 $\gamma(\theta,k)$ 为非增函数. 所以当 $k \leq \left[\frac{n}{2}\right]$ 时，$\mathrm{Sign}\left(\frac{\alpha_{k+1}^*}{\alpha_k^*} - 1\right) \geq 0$.

2) 当 $\lambda < 0$，$k \geq \left[\frac{n}{2}\right]$ 时，

$$\mathrm{Sign}\left(\frac{\alpha_{k+1}^*}{\alpha_k^* - 1}\right) = \mathrm{Sign}\left(\frac{\exp[\lambda \mathrm{cov}(T_k + 1, n\overline{T}T)]}{\exp[\lambda \mathrm{cov}(T_k, n\overline{T})]} - 1\right) = \mathrm{Sign}(\exp[\lambda \mathrm{cov}(T_k +$$
$$1 - T_k, n\overline{T}T)] - 1) = \mathrm{Sign}[-\mathrm{cov}(T_{k+1} - T_k, n\overline{T})] =$$
$$\mathrm{Sign}[-\sum_{i=1}^n \mathrm{cov}(T_{k+1}, T_i) + \sum_{i=1}^n \mathrm{cov}(T_k, T_i)], \tag{10}$$

因为 $\sum_{i=1}^n \mathrm{cov}(T_j, T_i) = \sum_{i=1}^n \mathrm{cov}(\mu_T(\theta_i), \mu_T(\theta_j)) + \sigma_T^2 = \sum_{i=1}^n \gamma(\theta, |i-j|) + \sigma_T^2$，所以

$$\mathrm{Sign}\left(\frac{\alpha_{k+1}^*}{\alpha_k^*} - 1\right) = \mathrm{Sign}[-\sum_{i=1}^n \gamma(\theta, |i-k-1|) + \sum_{i=1}^n \gamma(\theta, |i-k|)] = \mathrm{Sign}[\gamma(\theta, n-k) - \gamma(\theta, k)],$$

又因为 $\gamma(\theta,k)$ 为非增函数. 所以，当 $k \geq \left[\frac{n}{2}\right]$，$\mathrm{Sign}\left(\frac{\alpha_{k+1}^*}{\alpha_k^*} - 1\right) \geq 0$.

推论 1 得证.

推论 1 说明如果在定理 1 的模型下考虑一种特殊的时间效应，则所得到的结论满足对年份较远的索赔赋予较小的权重，对年份较近的索赔赋予较大的权重，得到的这个结论与实际是相吻合的.

在建立信度模型时，通常假设随机变量之间的独立性，下面的内容是定理 1 在这种独立性的假定下的一种特殊情形.

假设 3　给定风险参数 θ，稳健估计 $T_1,\cdots,T_n$ 是独立同分布的随机变量. $E(T_i \mid \theta) = \mu_T(\theta)$；$\mathrm{var}(T_i \mid \theta) = \sigma_T^2(\theta)$.

假设 4　风险参数 Θ 有分布函数 $\pi(\theta)$，定义结构参数：$E[\mu_T(\theta)] = \mu_T$；$E[\sigma_T^2(\theta)] = \sigma_T^2$；$\mathrm{var}[\mu_T(\theta)] = \tau_T^2$.

推论 2　在假设 3 和 4 下，定理 1 中的最优估计 $\hat{T}_{n+1}^{**}$ 可以写成信度形式：$\hat{T}_{n+1}^{**} = Z^{**}\overline{T} + (1 - Z^{**})\mu_T$；$\hat{X}_{n+1}^{**} = \mu + Z^{**}(\overline{T} - \mu_T)$，其中 $\mu = E(X_i)$，$Z^{**} = \frac{n}{n+\kappa}$；$\kappa = \frac{\sigma_T{}^2}{\tau_T^2}$.

证明　首先求解 λ.

因为 $\mathrm{cov}(T_i, n\overline{T}) = n\tau_T^2 + \sigma_T^2$；$\mathrm{cov}(T_{n+1}, n\overline{T}) = n\tau_T^2$. 把上面两个式子代入公式(7)，$\lambda =$

$\frac{1}{n\tau_T^2+\sigma_T^2}\ln\left(\frac{\tau_T^2}{\sigma_T^2}\right)$;$\alpha_0^{**}=\frac{\sigma_T^2}{\sigma_T^2+n\tau_T^2}\mu T$;$\alpha_k^{**}=\frac{\tau_T^2}{\sigma_T^2+n\tau_T^2}$.所以,推论 2 得证.

可见,推论2是定理1的一种特殊情况,所得结论恰好与经典信度公式相吻合,由此可把定理1(最大熵原理下的纯稳健信度估计)看成纯稳健信度估计的一个推广.

4 结束语

定理 1 是在对索赔随机变量没有任何假设的情况下得到的信度公式的线性表达形式,并且当对最大熵方法下的纯稳健信度估计的随机变量给出一定假设的时候,它又有这样的重要性质:对年份较近的保单赋予相对较大的权重,年份较远的保单赋予较小的权重;在独立性的假设下,定理 1 可写成经典信度公式的表达形式.所以,我们在最大熵方法下得到的纯稳健信度公式可以看成纯稳健信度公式的一个推广.

参 考 文 献

[1] Bühlmann H. Experience rating and credibility[J]. ASTIN Bulletin,1967,4(3):199-207.
[2] Bühlmann H, Straub E. Glaubw"urdigkeitf"ur Schadensatze[J]. Bulletin of the Swiss Association of Actuaries,1970,70(1):111-133.
[3] Jewell W S. Credible means are exact Bayesian for exponential families[J]. ASTIN Bulletin,1974,8(01):77-90.
[4] Landsman Z, Makov U E. Credibility evaluation for the exponential dispersion family[J]. Insurance: Mathematics and Economics,1999,24(1):23-29.
[5] Künsch H R. Robust method for credibility[J]. ASTIN Bulletin,1992,22(01):33-49.
[6] Gisler A, Reinhard P. Robust credibility[J]. ASTIN Bulletin,1993,23(01):117-144.
[7] Kremer E. Large claims in credibility[J]. Blätter der DGVFM,1991,20(2):123-150.
[8] Garrido J, Pitselis G. On robust estimation in Bühlmann-Straub's credibility model[J]. Journal of Statistical Research,2000,34(2):113-132.
[9] Pitselis G. De Vylder's robust nonlinear regression credibility[J]. Belgium Actuarial Bulletin,2004,4(1):1-4.
[10] Pitselis G. Robust regression credibility: the influence function approach[J]. Insurance: Mathematics and Economics,2008,42(1):288-300.
[11] Pitselis G. Pure robust versus robust portfolio unbiased-Credibility and asymptotic optimality[J]. Insurance: Mathematics and Economics,2013,52(2):391-403.
[12] Jaynes E T. Information theory and statistical mechanics[J]. Physical Reviews,1957,106(4):620-630.
[13] Kullback S. Information theory and statistics[M]. New York: John Wiley and Sons,1959:115-117.
[14] Jessop A. Entropy in multiattribute problems[J]. Journal of Multi-Criteria Decision Analysis,1999,8(2):61-70.
[15] Abbas A E. Maximum-entropy utility[J]. Operation Research,2006,54(2):277-290.
[16] Landsmann Z. Credibility evaluation for the exponential dispersion family[J]. Insurance: Mathematics and Economics,1999,24(1):23-29.
[17] Darooneh A H. Utility function from maximum entropy principle[J]. Entropy,2006,8(1):18-24.
[18] Payandeh N A T. A maximum-entropy approach to the linear credibility formula[J]. Insurance: Mathematics and Economics,2012,51(1):216-221.
[19] Huber P J. Robust Statistics[J]. New York: Wiley,1981:57-60.

The Pure Robust Credibility Estimation under the Maximum Entropy Method

HU Yingying, WU Lijun, SUN Yi

(College of Mathematics and System Science, Xinjiang University, Urumqi 830046, China)

Abstract: The maximum entropy method(MEM) has been widely applied to the insurance field and achieved certain achievements. However, the research which combines robust credibility estimation and MEM has not appeared until now. This article is dedicated to do some research in this area, namely the pure robust credibility estimation under the maximum entropy method. As we all know, the former credibility formula has to make some assumptions about random variable X to obtain the exact expression of the credibility formula. In this paper, we deduce the exact linear expression for credibility premium and two corollaries on the condition that we make no assumption about X.

Keywords: the robust credibility estimation; the maximum entropy method; M estimation; influence Function; Lagrangian multiplier