

一类完全三阶两点边值问题解的存在性与唯一性

刘爱兰

(西北师范大学 数学与统计学院, 兰州 730070)

摘要: 讨论如下完全三阶两点边值问题

$$\begin{cases} -u'''(t) = f(t, u(t), u'(t), u''(t)), t \in [0, 1], \\ u(0) = u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

解的存在性与唯一性. 其中 $f(t, x, y, z): [0, 1] \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ 为连续函数. 在 $f(t, x, y, z)$ 关于 z 满足 Nagumo 型增长条件下, 应用上下解方法与截断技巧, 获得了该问题解的存在性和唯一性结果.

关键词: 三阶两点边值问题; 上解; 下解; Nagumo 条件

中图分类号: O175.8

文献标志码: A

三阶微分方程边值问题在气体动力学、流体力学、核物理、边界层理论等实际问题中有着广泛的应用^[1-2], 因而受到很多作者的关注, 可参看文献[3-16]. 本文的目的是研究如下的完全三阶两点边值问题

$$\begin{cases} -u'''(t) = f(t, u(t), u'(t), u''(t)), t \in [0, 1], \\ u(0) = u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

解的存在性与唯一性, 其中 $f(t, x, y, z): [0, 1] \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ 为连续函数, $I = [0, 1]$.

对边值问题(1)非线性项含一阶导数项即 $f(t, x, y, z) = f(t, x, y)$ 的特殊情形, 文献[3-6]中作者对其作了讨论. 其中文献[3, 6]通过对 f 作适当的生长性限制, 从而获得了解的存在性. 文献[4-5]分别用上下解方法和单调迭代技巧, 在 f 满足一定的单调性条件下获得了解的存在性结果.

而对非线性项不含导数项即 $f(t, x, y, z) = f(t, x)$ 的更简单的情形, 文献[7-9]考察了问题(1)的可解性. 其中文献[7-8]要求 f 在满足一定的增长条件下, 采用拓扑度方法获得了正解的存在性. 文献[9]要求 f 满足某些单调性条件, 用上下解方法得到解的存在性结果.

然而, 由于以上文献中的研究方法不能处理问题(1)非线性项中的二阶导数项, 因而不适用于问题(1)的研究. 为了克服由此带来的困难, 本文将运用一个特别的截断技巧, 在引入 Nagumo 条件并对 f 作适当限制的情形下, 用上下解方法获得了问题(1)解的存在唯一性结果.

1 预备知识

引理 1^[6] 对 $\forall h \in C(I)$, 方程

$$\begin{cases} -u'''(t) = h(t), t \in I, \\ u(0) = 0, u'(0) = 0, u'(1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

存在唯一解

$$u(t) = \int_0^t \int_0^1 (s, \tau) h(\tau) d\tau ds \triangleq T_3 h. \quad (3)$$

$T_3: C(I) \rightarrow C^3(I)$ 为线性有界算子, 其中

收稿日期: 2015-12-20; 修回日期: 2016-06-23.

基金项目: 国家自然科学基金(11261053); 甘肃省自然科学基金(1208R-JZA129).

作者简介(通信作者): 刘爱兰(1992-), 女, 甘肃通渭人, 西北师范大学硕士研究生, 研究方向为非线性泛函分析, E-mail: liual3@126.com.

$$G(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & 0 \leq t \leq s \leq 1, \\ s(1-t), & 0 \leq s \leq t \leq 1 \end{cases}$$

为齐次边值问题

$$\begin{cases} -v''(t) = 0, & t \in I, \\ v(0) = 0, v(1) = 0 \end{cases}$$

所对应的格林函数.

引理 2 设 $f: I \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ 连续, 若 f 有界: 存在常数 $M > 0$, 使得

$$|f(t, x, y, z)| \leq M, \quad (4)$$

则 BVP(1) 有解.

证明 问题 (2) 是边值问题 (1) 所对应的线性问题, 由引理 1 知, $T_3: C(I) \rightarrow C^3(I)$ 为线性有界算子. 由嵌入 $C^3 \subset C^2(I)$ 的紧性, $T_3: C(I) \rightarrow C^2(I)$ 为线性全连续算子. 对 $\forall u \in C^2(I)$ 令

$$F(u)(t) = f(t, u(t), u'(t), u''(t)), \quad (5)$$

则 $F: C^2(I) \rightarrow C(I)$ 连续, 把有界集映为有界集. 因此 $A = T_3 \circ F: C^2(I) \rightarrow C^2(I)$ 全连续算子. 方程 (1) 的解等价于 A 的不动点. 令 $R \geq \|T_3\|_{\mathcal{L}(C(I), C^2(I))} \cdot M$, 对 $\forall u \in \bar{B}_{C^2(I)}(\theta, R)$. 由 (4) 式, 得

$$\|u\|_{C^2(I)} = \|u\|_C + \|u'\|_C + \|u''\|_C, \quad \|F(u)\|_C \leq M,$$

$$\|Au\|_C = \|T_3(F(u))\|_C \leq \|T_3\|_{\mathcal{L}(C(I), C^2(I))} \cdot \|F(u)\|_C \leq \|T_3\|_{\mathcal{L}(C(I), C^2(I))} \cdot M \leq R,$$

则 $A: \bar{B}_{C^2(I)}(\theta, R) \rightarrow \bar{B}_{C^2(I)}(\theta, R)$, 由 Schauder 不动点定理, A 有不动点, 即边值问题 (1) 有解.

定义 1 设 $\alpha(t) \in C^3(I)$, 若 $\alpha(t)$ 满足

$$\begin{cases} -\alpha'''(t) \leq f(t, \alpha(t), \alpha'(t), \alpha''(t)), & t \in I, \\ \alpha(0) \leq 0, \alpha'(0) \leq 0, \alpha'(1) \leq 0, \end{cases} \quad (6)$$

则称 $\alpha(t)$ 为边值问题 (1) 的下解, 若 (6) 式中均取反向不等式, 则称 $\alpha(t)$ 为上解.

2 主要结论

本节用上下解方法讨论边值问题 (1) 解的存在性和唯一性.

定理 1 设 $f: I \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ 连续, 边值问题 (1) 存在下解 $\alpha(t)$ 及上解 $\beta(t)$. 满足 $\alpha(t) \leq \beta(t), \alpha'(t) \leq \beta'(t)$.

若 f 关于 α 与 β 满足 Nagumo 条件.

(F1) 存在 $[0, +\infty)$ 上的正值连续函数 $h(\rho)$, 满足

$$\int_0^{+\infty} \frac{\rho}{h(\rho)} d\rho > \max_{t \in I} \beta'(t) - \min_{t \in I} \alpha'(t), \quad (7)$$

使得 f 满足:

$$|f(t, x, y, z)| \leq h(|z|), \quad t \in I, \alpha(t) \leq x \leq \beta(t), \alpha'(t) \leq y \leq \beta'(t),$$

且 $f(t, x, y, z)$ 关于 x 单调不减, 则边值问题 (1) 至少存在一解满足:

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t), \alpha'(t) \leq u'(t) \leq \beta'(t).$$

证明 令 $u' = v$, 则 $u(t) = \int_0^t v(s) ds := Tv(t)$. 显然, T 为单调连续增算子. 边值问题 (1) 等价于如下的积 - 微分方程边值问题:

$$\begin{cases} -v''(t) = f(t, (Tv)(t), v(t), v'(t)), & t \in I, \\ v(0) = 0, v(1) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

证明方程 (8) 至少有一个解.

为此, 令 $\varphi(t) = \alpha'(t)$, $\psi(t) = \beta'(t)$, 则 $\varphi(t) \leq \psi(t)$, 由 (7) 式知, 存在 $M > 0$, 使得

$$\int_0^M \frac{\rho}{h(\rho)} d\rho > \max_{t \in I} \varphi(t) - \min_{t \in I} \psi(t).$$

取 $N = M + \|\varphi\|_C + \|\psi\|_C + 1$, 令

$$\eta(t, x) = \max\{T\varphi(t), \min\{x, T\psi(t)\}\}, \quad \eta_1(t, y) = \max\{\varphi(t), \min\{y, \psi(t)\}\},$$

$$[z]_N = \begin{cases} N, & z > N, \\ z, & -N \leq z \leq N, \\ -N, & z \leq -N, \end{cases}$$

则

$$|\eta(t, x)| \leq \|T\varphi(t)\|_c + \|T\psi(t)\|_c, |\eta_1(t, y)| \leq \|\varphi(t)\|_c + \|\psi(t)\|_c, |[z]_N| \leq N.$$

作 f 的截断函数:

$$f^*(t, x, y, z) = f(t, \eta(t, x), \eta_1(t, y), [z]_N) - \frac{y - \eta(t, y)}{1 + y^2}, \quad (9)$$

则 $f^* : I \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ 连续, 有界. 由引理 2, 修改了的边值问题

$$\begin{cases} -v''(t) = f^*(t, (Tv)(t), v(t), v'(t)), & t \in I, \\ v(0) = 0, v(1) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

有解 $v_0 \in C^2(I)$, 下证 v_0 为边值问题(8)的解.

首先, 证 $\varphi(t) \leq v_0(t) \leq \psi(t), t \in I$.

事实上, 如果 $\varphi(t) \leq v_0$, 考查 $\phi(t) = v_0(t) - \varphi(t)$, 存在 $t_0 \in (0, 1)$, 使得 $\min_{t \in I} \phi(t) = \phi(t_0) < 0$, 所以

$$\begin{aligned} \phi'(t_0) &= 0, \phi''(t_0) \geq 0, \text{ 即} \\ v_0(t_0) &< \varphi(t_0), v_0'(t_0) = \varphi'(t_0), v_0''(t_0) \geq \varphi''(t_0). \end{aligned} \quad (11)$$

根据截断函数的定义以及 f 关于第二变元的单调性有

$$\begin{aligned} -v_0''(t_0) &= f^*(t_0, Tv_0(t_0), v_0(t_0), v_0'(t_0)) = f(t_0, \eta(t_0, Tv_0(t_0)), \varphi(t_0), \varphi'(t_0)) - \\ &\frac{v_0(t_0) - \varphi(t_0)}{1 + (v_0(t_0))^2} \geq f(t_0, T\varphi(t_0), \varphi(t_0), \varphi'(t_0)) - \frac{v_0(t_0) - \varphi(t_0)}{1 + (v_0(t_0))^2} \geq \\ &-\varphi''(t_0) - \frac{v_0(t_0) - \varphi(t_0)}{1 + (v_0(t_0))^2} \geq -\varphi''(t_0), \end{aligned}$$

所以 $v_0'(t_0) < \varphi''(t_0)$, 这与(11)式后一不等式矛盾! 所以 $\varphi(t) \leq v_0(t)$.

同理可证 $v_0(t) \leq \psi(t)$.

其次, 证明 $|v_0'(t)| \leq M, t \in I$.

由中值定理, 存在 $t_1 \in (0, 1)$, 使得 $v_0'(t_1) = 0$. 反设结论不成立, 则 $\|v_0'\|_c > M$. 即存在 $t_2 \in [0, t_1)$ 或 $t_2 \in (t_1, 1]$, 使得

$$\|v_0'\|_c = |v_0'(t_2)| > M.$$

下面对上述结论分 4 种情形讨论:

情形 1 $t_2 \in [0, t_1), v_0'(t_2) > M$;

情形 2 $t_2 \in [0, t_1), v_0'(t_2) < -M$;

情形 3 $t_2 \in (t_1, 1], v_0'(t_2) > M$;

情形 4 $t_2 \in (t_1, 1], v_0'(t_2) < -M$.

仅证明情形 1, 其他情形类似可证. 令

$$b = \inf\{t' \in (t_2, t_1] \mid v_0'(t') = 0\}, a = \sup\{t'' \in [t_2, b) \mid v_0'(t'') = 0\},$$

则 $b \in (t_2, t_1], a \in (t_2, b)$. 由上下确界的定义

$$v_0'(a) = M, v_0'(b) = 0, 0 < v_0'(t) < M, t \in (a, b). \quad (12)$$

当 $t \in (a, b)$ 时, 由方程(10)得

$$\begin{aligned} -v_0''(t) &= f^*(t, Tv_0(t), v_0(t), v_0'(t)) = f(t, \eta(t, Tv_0(t)), \eta_1(t, v_0(t)), v_0'(t)) - \\ &\frac{v_0(t) - \eta_1(t, v_0(t))}{1 + (v_0(t))^2} = f(t, Tv_0(t), v_0(t), v_0'(t)) \leq h(v_0'(t)), \end{aligned}$$

所以 $-\frac{v_0''(t)v_0'(t)}{h(v_0'(t))} \leq v_0'(t), t \in [a, b]$.

对上式两边从 a 到 b 积分, 且结合(12)式, 得(令 $\rho = v_0'(t)$):

$$\int_0^M \frac{\rho}{h(\rho)} d\rho \leq V_0(b) - v_0(a) \leq \max_{t \in I} \phi(t) - \min_{t \in I} \phi(t), t \in [a, b].$$

与 M 的选择矛盾!故 $\|v_0'\| \leq M$. 所以综上有 $\alpha \leq v_0 \leq \beta, \|v_0'\| \leq M < N$.

按 f^* 的定义 $f^*(t, Tv_0(t), v_0(t), v_0'(t)) = f(t, Tv_0(t), v_0(t), v_0'(t))$. 所以 v_0 为边值问题 (8) 的解, 故边值问题 (1) 有解. 证毕.

定理 2 设 $f: I \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ 连续, $\alpha(t), \beta(t)$ 是边值问题 (1) 的下解和上解. 且 f 关于 $\alpha(t), \beta(t)$ 满足 Nagumo 条件, 如果 $f(t, x, y, z)$ 关于 x 单调不减, 在 $I \times \mathbf{R}^3$ 上关于各个变量 t, x, y, z 连续可微, 且满足条件 (F2) 对 $(t, \xi, \eta, \zeta) \in [0, 1] \times \mathbf{R}^3, f_x(t, \xi, \eta, \zeta) + f_y(t, \xi, \eta, \zeta) < 0$. 则边值问题 (1) 有唯一解 $u(t) \in C^3[0, 1]$, 满足: $\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t), \alpha'(t) \leq u'(t) \leq \beta'(t)$.

证明 由定理 1 知, 存在性显然, 只需证明唯一性. 假设定理 2 的结论不成立, 不妨设 u_1, u_2 都是边值问题 (1) 的解, 记 $u_0(t) = u_1(t) - u_2(t)$, 则由微分中值定理 $u_0(t)$ 满足方程的解.

$$\begin{cases} -u_0'''(t) = a(t)u_0(t) + b(t)u_0'(t) + c(t)u_0''(t), t \in I, \\ u_0(0) = u_0'(0) = u_0'(1) = 0, \end{cases} \quad (13)$$

其中 $a(t) = f_x(t, \xi, \eta, \zeta), b(t) = f_y(t, \xi, \eta, \zeta), c(t) = f_z(t, \xi, \eta, \zeta), \xi = u_1 + \theta(u_2 - u_1), \eta = u_0' + \theta(u_2' - u_1'), \zeta = u_0'' + \theta(u_2'' - u_1''), \theta \in (0, 1)$.

因 $f(t, x, y, z)$ 连续, 关于各个变量 t, x, y, z 连续可微, 故上述定义有意义. 且由 $f(t, x, y, z)$ 关于 x 单调不减性, 知 $a(t) \geq 0$. 要证 $u_0 \equiv 0$, 只需证 $u_0' \equiv 0$ 即可, 由 (13) 式的边界条件便可得 $u_0 \equiv 0$. 下证 $u_0' \equiv 0$.

反设不成立, 则存在 $K > 0$, 使得 $K = \max_{t \in I} |u_0'(t)|$, 即存在 $t^* \in (0, 1)$, 使得 $u_0'(t^*) = \max_{t \in I} u_0'(t) = K$, 或 $u_0'(t^*) = \min_{t \in I} u_0'(t) = -K$.

先证 $u_0'(t^*) = \min_{t \in I} u_0'(t) = K$ 的情形. 因 $u_0'(t^*) = \min_{t \in I} u_0'(t) = K > 0$. 故 $u_0''(t^*) = 0, u_0'''(t^*) \leq 0$, 所以 $-u_0'''(t^*) \geq 0$, 且

$$|u_0(t^*)| = \left| \int_0^{t^*} u_0'(s) ds \right| \leq \int_0^{t^*} |u_0'(s)| ds \leq Kt^* < K. \quad (14)$$

另一方面, 由 $a(t) \geq 0$ 和条件 (F2) 有

$$-u_0'''(t^*) = a(t^*)u_0(t^*) + b(t^*)u_0'(t^*) + c(t^*)u_0''(t^*) = a(t^*)u_0(t^*) + b(t^*)u_0'(t^*) \leq a(t^*)|u_0(t^*)| + b(t^*) \cdot K < a(t^*)K + b(t^*) \cdot K = [a(t^*) + b(t^*)] \cdot K < 0.$$

这与 (14) 式矛盾! 所以反设不成立.

$$u_0'(t^*) = \min_{t \in I} u_0'(t) = -K$$

的情形可类似证明. 所以 $u_0' \leq 0$, 故 $u_0 \leq 0$, 即边值问题 (1) 的解唯一. 证毕.

例 设 $m, n \in \mathbf{N}, m < 2n$, 取 $f(t, x, y, z) = x^m - 2y^n + z^2 + \sin \pi t$, 则 f 为连续函数. 相应的三阶边值问题

$$\begin{cases} -u'''(t) = u^m(t) - 2[u'(t)]^n + [u''(t)]^2 + \sin \pi t, t \in I, \\ u(0) = u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

取 $\alpha(t) \equiv 0, \beta(t) = t$. 显然, $\alpha(t)$ 为边值问题 (15) 式的下解. 另一方面

$$f(t, \beta, \beta', \beta'') = t^m - 2[t']^n + \sin \pi t = t^m - 2 + \sin \pi t \leq 0 = -\beta''(t), \forall t \in I.$$

因此, $\beta(t)$ 为边值问题 (15 式) 的上解, 并且 $\alpha(t), \beta(t)$ 满足定理 1 的要求. 令 $h(|z|) = 4 + |z|^2$, 则 h 满足 (7) 式, 当 $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$ 时, $y \in [0, 1]$, 故

$$\begin{aligned} |f(t, x, y, z)| &= |x^m - 2y^n + z^2 + \sin \pi t| \leq |x^m - 2y^n + \sin \pi t| + |z|^2 \leq \\ &|x^m| + |2y^n| + 1 + |z|^2 \leq 4 + |z|^2 = h(|z|), \forall t \in I, \end{aligned}$$

所以 f 满足条件 (F1), 且由 f 的表达式可知 f 关于 x 单调不减, 则由定理 1 知, 边值问题 (15) 存在一解 u , 满足 $0 \leq u \leq t, 0 \leq u' \leq 1$. 又 $m < 2n$, 所以 f 满足定理 2 的条件, 故该解唯一.

参 考 文 献

[1] 王显正, 陈正航, 王旭永. 控制理论基础 [M]. 北京: 科学出版社, 2000.

- [2] Tarcísio C S, Ketí T. Third order differential equations describing pseudospherical surfaces[J]. J Differential Equations, 2015, 259: 4897-4923.
- [3] 冯育强, 刘三阳. 非线性三阶边值问题的多解性[J]. 工程数学学报, 2003, 20(4): 109-112.
- [4] Feng Yuqiang, Liu Sanyang. Solvability of a third-Order two-Point boundary value problem[J]. Appl Math Lett, 2005, 18: 1034-1040.
- [5] 杜睿娟. Nagumo 条件下三阶两点边值问题解的存在性[J]. 应用泛函分析学报, 2008, 10(1): 71-75.
- [6] 张宏旺, 李永祥. 一类非线性三阶边值问题的单调迭代方法[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2009, 31(5): 34-37.
- [7] 蒋达清. 三阶非线性微分方程正解的存在性[J]. 东北师大学报(自然科学版), 1996, 28(4): 6-10.
- [8] 姚庆六. 某些非线性三阶两点边值问题的正解存在性[J]. 吉首大学学报(自然科学版), 2003, 24(2): 10-14.
- [9] Yao Qingliu, Feng Yuqiang. The existence of solution for a third-order two-point boundary value problem[J]. Appl Math Lett, 2002, 15: 227-232.
- [10] Feng Xingfang, Feng Hanying, Bai Donglong. Eigenvalue for a singular third-order three-point boundary value problem[J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 219: 9783 - 9790.
- [11] 孙 博. 一类三阶两点边值问题单调迭代正解的存在性[J]. 工程数学学报, 2009, 26(6): 1027-1032.
- [12] 姚庆六. 三阶常微分方程的某些非线性特征值问题的正解[J]. 数学物理学报, 2003, (23): 513-519.
- [13] 冯育强, 刘三阳. 一类非线性三阶边值问题的可解性[J]. 工程数学学报, 2007, 24(3): 543-546.
- [14] Li Y H, Zhang X Y. Multiple positive solutions of boundary value problems for system of nonlinear third-order differential equations[J]. J Math Res Appl, 2013, 3: 321-329.
- [15] Warisa N. Third-order ordinary differential equations equivalent to linear second-order ordinary differential equations via tangent transformations[J]. Journal of Symbolic Computation, 2016, 77: 63-77.
- [16] Wei Zhongli. Some necessary and sufficient conditions for existence of positive solutions for third order singular sublinear multi-point boundary value problems[J]. Acta Mathematica Scientia, 2014, 34B(6): 1795-1810.

Existence and Uniqueness for a Class of Fully Third-Order Two-Point Boundary Value Problems

LIU Ailan

(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, the existence and uniqueness was discussed for a class of fully third-order two-point boundary value problems,

$$\begin{cases} -u'''(t) = f(t, u(t), u'(t), u''(t)), & t \in [0, 1], \\ u(0) = u'(0) = u'(1) = 0, \end{cases}$$

where $f(t, x, y, z): [0, 1] \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ is continuous and satisfy the Nagumo-type growth condition on z . We obtain the existence and uniqueness result via the lower and upper solution method and a special truncating technique.

Keywords: Third-order two-point boundary value problems; upper solutions; lower solutions; Nagumo condition