

# 基于神经动力系统求解广义非线性互补问题的优化方法

许文杰, 欧宜贵

(海南大学 理学院, 海口 570228)

**摘要:** 基于神经动力系统模型, 提出了一种求解广义非线性互补问题的优化方法. 该方法的一个主要特点是在分析其收敛性时不利用任何矩阵. 在合理的假设条件下, 该方法具有收敛性和全局指数稳定性. 数值模拟结果表明了该模型的有效性, 且可以应用于求解较大规模的非线性互补问题.

**关键词:** 非线性互补问题; 投影方程; 神经动力系统模型; 收敛性; 指数稳定性

**中图分类号:** O221.2

**文献标志码:** A

广义非线性互补问题(记为 GNCP), 是指寻找一个点  $x \in \mathbf{R}^n$ , 使得下式成立

$$G(x) \geq 0, F(x) \geq 0, G(x)^T F(x) = 0, \quad (1)$$

其中,  $F$  和  $G: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  是连续函数. 当  $G(x) \equiv x$  时, GNCP 变为通常的非线性互补问题.

由于数学、经济、管理和工程中的许多问题都可以表述为非线性互补问题<sup>[1]</sup>, 近几十年来, 人们对求解非线性互补问题的数值方法的兴趣与日俱增. 迄今为止, 求解问题(1)的主要方法是迭代法(如内点法、减势法、非光滑方程法、磨光方程组法以及投影类方法等), 详见文献[2-4].

众所周知, 工程应用中的许多问题如信号处理、系统辨识、机器人运动控制等<sup>[5-6]</sup>, 通常包含时变参数, 因此必须实时求解以便优化动态系统的性能. 这样的实时应用问题, 对计算时间提出了严格要求, 使得上述所说的数值方法不太有效, 而结合了神经网络和动力系统的神经动力系统模型方法是处理这些优化问题的一种有效方法. 目前, 已有许多神经动力系统模型被提出用于解决优化问题, 并取得了很好的结果<sup>[7-10]</sup>.

最近, 已有学者研究并提出了求解非线性互补问题的神经动力系统模型优化方法, 例如: XIA 和 WANG<sup>[11]</sup> 提出了一种可用于求解非线性互补问题的神经动力系统模型(记为 GPNN):

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{M} \{ P_x [G(x) - F(x)] - G(x) \}, x(t_0) = x_0,$$

其中  $F$  和  $G$  是连续可微的,  $\mathbf{M}$  是正对角矩阵. 然而 GPNN 的收敛性分析是建立在  $F(x)$  和  $G(x)$  的雅可比矩阵存在, 并在分析其稳定性时要求  $\nabla F(x) + \nabla G(x)$  在  $\mathbf{R}^n$  中有上界, 从而缩小了 GPNN 的适用范围. 之后, 文献[12]提出了一种基于最速下降型的神经动力系统模型, 但是该模型只能用于解决  $G(x) \equiv x$  时通常的非线性互补问题, 且模型结构复杂, 不容易实施. 因此, 如何构造结构简单、稳定性好且容易实施的神经动力系统模型来处理这类特殊优化问题就显得非常必要.

基于上述讨论, 本文提出一种求解广义非线性互补问题的神经动力系统模型方法. 其基本思想是: 基于原始优化问题构造某一微分方程, 使得该系统的平衡点和原问题的局部最优解相符合. 然后再选取适当的数值方法来求解该系统, 从而获得原优化问题的最优解或近似最优解. 该方法的优势在于可以系统地研究微分系统解的瞬态性能和极限行为, 从而追踪初始点与极限点之间的连续运动轨迹. 并且它在分析动力系统的稳定性时采用了不同以往的新策略, 从而避免使用传统的 Lyapunov 函数, 使得人们利用这类新方法来解决最优化问题时获得了较先前更好的理论结果以及更具竞争力的数值表现性能.

收稿日期: 2021-06-27; 修回日期: 2022-03-26.

基金项目: 国家自然科学基金(11961018); 海南省研究生创新科研课题(Hys2020-107).

作者简介: 许文杰(1997-), 女, 山西大同人, 海南大学硕士研究生, 研究方向为最优化算法, E-mail: 2629312009@qq.com.

通信作者: 欧宜贵(1965-), 男, 湖北钟祥人, 海南大学教授, 博士, 研究方向为最优化算法, E-mail: ouyigui@126.com.

本文结构如下:在第 1 节中,给出了一些预备知识;第 2 节中,提出了求解问题(1)的神经动力系统模型;第 3 节分析了神经动力系统模型的收敛性和稳定性;第 4 节给出了数值计算结果,验证了该方法的有效性,并与文献[11]的数值方法进行了对比,最后得出结论.

### 1 预备知识

**定义 1** 设  $\Omega$  是  $\mathbf{R}^n$  上的非空闭凸集.在欧氏范数下,点  $\nu \in \mathbf{R}^n$  在  $\Omega$  的投影定义为<sup>[11]</sup>:

$$P_{\Omega}(\nu) = \arg \min_{u \in \Omega} \{ \| u - \nu \| \}.$$

**引理 1** 对于投影算子  $P_{\Omega}$ ,有<sup>[13]</sup>

$$\begin{aligned} (\nu - P_{\Omega}(\nu))^T (P_{\Omega}(\nu) - u) &\geq 0, \forall \nu \in \mathbf{R}^n, u \in \Omega, \\ \| P_{\Omega}(\nu) - P_{\Omega}(u) \| &\leq \| \nu - u \|, \forall \nu, u \in \mathbf{R}^n. \end{aligned}$$

**定义 2** 若有<sup>[14]</sup>

$$[F(u) - F(u^*)]^T [G(u) - G(u^*)] \geq 0, \forall u \in \mathbf{R}^n, \tag{2}$$

则称函数  $F$  在点  $u^* \in \mathbf{R}^n$  处是  $G$ -单调的.特别地,若有

$$[F(u) - F(\nu)]^T [G(u) - G(\nu)] \geq 0, \forall u, \nu \in \mathbf{R}^n,$$

则称函数  $F$  在  $\mathbf{R}^n$  上是  $G$ -单调的.若有

$$[F(u) - F(u^*)]^T [G(u) - G(u^*)] \geq \gamma \| u - u^* \|, \gamma > 0, \forall u \in \mathbf{R}^n, \tag{3}$$

则称函数  $F$  在点  $u^* \in \mathbf{R}^n$  处是  $G$ -强单调的.注意,当  $G(x) = x$  时, $G$ -单调( $G$ -强单调)就变成了通常的单调(强单调)<sup>[14]</sup>.

为了后面叙述的方便,还需要一阶常微分方程(ODE):

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)), x(t_0) = x_0 \in \mathbf{R}^n \tag{4}$$

的一些知识,其中  $f$  是定义在  $\mathbf{R}^n$  上的一个函数.

如果  $f(x^*) = 0$ ,则  $x^* \in \mathbf{R}^n$  是方程(4)的平衡点.

**定理 1** 假设函数  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  是连续的.则对  $t_0 \geq 0$  及  $x_0 \in \mathbf{R}^n$ ,存在常数  $\tau > t_0$  使得方程(4)总存在一个局部解  $x(t), t \in [t_0, \tau)$ .此外,如果  $f$  在  $x_0$  处是局部 Lipschitz 连续的,那么此解是唯一的;如果  $f$  在  $\mathbf{R}^n$  上是 Lipschitz 连续的,那么  $\tau$  可以拓展到  $+\infty$ .

**引理 2**<sup>[15]</sup> 当  $t \rightarrow \infty$  时,如果一个可微函数  $h(t)$  有有限的极限  $h_0$ ,且  $\frac{dh(t)}{dt}$  是一致连续的,则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dh(t)}{dt} = 0.$$

### 2 神经动力系统模型

基于上述预备知识,利用文献[16]的思想方法,提出如下求解问题(1)的 ODE 系统模型:

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{A} \{ P_x [G(x) - \beta F(x)] - G(x) \}, x(t_0) = x_0, \beta > 0, \tag{5}$$

其中  $\mathbf{A} = \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \}$  是对角矩阵,  $\lambda_i > 0$ .根据文献[16]有一个重要结论: $x^*$  是(5)式的平衡点  $\Leftrightarrow x^*$  是问题(1)的解.

**注 1** 当  $\beta=1$  时,模型(5)就变为 GPNN 模型.事实上,  $\beta$  的不同取值对模型的稳定性至关重要,接下来的理论分析与数值模拟实验也验证了这一点.此外,正如前文所述,GPNN 模型在收敛性和稳定性分析时要求的条件较强,而本文在分析收敛性时所要求条件较弱(详见本文定理 2 和定理 3).

为了简化研究,定义

$$E(x, \beta) = \mathbf{A} \{ G(x) - P_x [G(x) - \beta F(x)] \}, \beta > 0,$$

则系统(5)等价于

$$\frac{dx}{dt} = -E(x, \beta), x(t_0) = x_0. \quad (6)$$

利用引理 1, 对于任意的  $x, y \in \mathbf{R}^n$ , 有

$$\|E(x, \beta) - E(y, \beta)\| \leq \|\mathbf{A}\| \{ \|P_x[G(x) - \beta F(x)] - P_x[G(y) - \beta F(x)]\| + \|G(x) - G(y)\| \} \leq 2\|\mathbf{A}\| \|G(x) - G(y)\| + \beta\|\mathbf{A}\| \|F(x) - F(y)\|. \quad (7)$$

**引理 3** 对于任给的  $t_0 \geq 0, x_0 \in \mathbf{R}^n$ , 当  $\tau > t_0$  时, 存在唯一的连续解  $x(t), t \in [t_0, \tau]$  满足 ODE 系统(5). 此外, 如果函数  $F$  和  $G$  在  $\mathbf{R}^n$  上是 Lipschitz 连续的, 对于任给的初始点  $x_0$ , ODE 系统(5) 有唯一的解  $x(t), t \in [t_0, +\infty)$ .

**证明** 因为函数  $F$  和  $G$  在  $\mathbf{R}^n$  上是连续的, 则它们是局部 Lipschitz 连续的, 这与(7) 式表明  $E(x, \beta)$  也是局部 Lipschitz 连续的. 从而由定理 1 可知, 该引理前一部分是正确的.

令  $L_F$  和  $L_G$  分别是函数  $F$  和  $G$  的 Lipschitz 常数, 由(7) 式得:

$$\|E(x, \beta) - E(y, \beta)\| \leq 2\|\mathbf{A}\| \|G(x) - G(y)\| + \beta\|\mathbf{A}\| \|F(x) - F(y)\| \leq (2\|\mathbf{A}\| L_G + \beta\|\mathbf{A}\| L_F) \|x - y\|, \forall x, y \in \mathbf{R}^n, \quad (8)$$

则  $E(x, \beta)$  在  $\mathbf{R}^n$  上是 Lipschitz 连续的. 利用定理 1, 可证明引理 3 后一部分是正确的.

**引理 4**<sup>[12]</sup> 如果  $x^*$  是 GNCP(1) 的解, 则

$$\{G(x) - G(x^*) + \beta[F(x) - F(x^*)]\}^T \mathbf{A}^{-1} E(x, \beta) \geq E(x, \beta)^T \mathbf{A}^{-2} E(x, \beta) + \beta[F(x) - F(x^*)]^T [G(x) - G(x^*)], \forall x \in \mathbf{R}^n. \quad (9)$$

**注 2** 引理 4 表示对于在  $x^*$  处的  $G$ -单调函数  $F$ , 有

$$\{G(x) - G(x^*) + \beta[F(x) - F(x^*)]\}^T \mathbf{A}^{-1} E(x, \beta) \geq E(x, \beta)^T \mathbf{A}^{-2} E(x, \beta), \forall x \in \mathbf{R}^n, \quad (10)$$

因此  $\|E(x, \beta)^T \mathbf{A}^{-1}\| \leq \|G(x) - G(x^*) + \beta[F(x) - F(x^*)]\|, \forall x \in \mathbf{R}^n$ .

### 3 收敛性和稳定性分析

下面分析模型的收敛性和稳定性. 为此, 建立了一个如下的价值函数:

$$V(x) = \int_0^1 (x - x^*)^T \mathbf{A}^{-1} \{\beta[F(x^* + \tau(x - x^*))] + G(x^* + \tau(x - x^*))\} d\tau - (x - x^*)^T \mathbf{A}^{-1} [\beta F(x^*) + G(x^*)],$$

其中  $x^*$  是 GNCP 的解. 显然有下式成立,

$$\nabla V(x) = \mathbf{A}^{-1} [\beta F(x) + G(x) - \beta F(x^*) - G(x^*)]. \quad (11)$$

**定理 2** 设  $x^*$  是 GNCP(1) 的解. 假设以下条件成立:

(a)  $F$  在  $x^*$  处是  $G$ -单调函数;

(b) 水平集  $L(x_0) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid V(x) \leq V(x_0)\}$  是有界的;

(c)  $F$  和  $G$  在  $\mathbf{R}^n$  上是 Lipschitz 连续的. 那么, 对任意  $t_0 \geq 0, x(t_0) = x_0 \in \mathbf{R}^n$ , ODE 系统(6) 的解  $x(t)$  的任何极限点  $\hat{x}$  都是其平衡解, 即

$$E(\hat{x}, \beta) = 0. \quad (12)$$

**证明** 由引理 3 和条件(c), ODE 系统(6) 的解存在且唯一. 由条件(a)、(6)、(10)、(11) 式可得:

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = \nabla V(x(t))^T \frac{dx(t)}{dt} = -\{\beta[F(x) - F(x^*)] + G(x) - G(x^*)\}^T \mathbf{A}^{-1} E(x, \beta) \leq -E(x, \beta)^T \mathbf{A}^{-2} E(x, \beta) \leq 0, \quad (13)$$

这意味着, 如果  $E(x, \beta) \neq 0, V(x(t))$  在  $t$  沿着轨迹  $x(t)$  单调递减, 因此得到

$$\{x(t) \mid t \geq t_0\} \subset L(x_0), \quad (14)$$

由(14) 式与条件(b) 可知, 存在一个有限标量  $V^*$ , 有  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(x(t)) = V^*$ , 再根据(13) 式, 可得:

$$V(x_0) - V^* = -\int_{t_0}^{+\infty} \nabla V(x(t))^T d(x(t)) \geq \int_{t_0}^{+\infty} \|\mathbf{A}^{-1} E(x, \beta)\|^2 dt, \quad (15)$$

由文献[17] 中定理 4 的证明可知, 存在一个常数  $C$  有

$$\|\mathbf{A}^{-1}E(x(t), \beta)\| \leq \sqrt{C}, \forall t \in [t_0, +\infty). \quad (16)$$

因此,由(8)、(14)、(16)式,条件(b)和(c),则易证  $\frac{dV(x(t))}{dt}$  在  $[t_0, +\infty)$  上是一致连续的.

由引理 2 可得  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dV(x(t))}{dt} = 0$ , 则有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|E(x, \beta)\| = 0. \quad (17)$$

因为  $\hat{x}$  是 ODE 系统(6)的解  $x(t)$  的极限点,所以存在一个严格单调递增序列  $\{t_k\}$ , 当  $i \rightarrow +\infty$  时,  $t_i \rightarrow +\infty$ , 使得下式成立

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t_i) = \hat{x}, \quad (18)$$

(18)式与(17)式表明了  $E(\hat{x}, \beta) = 0$ , 定理得证.

**注 3** 对于定理 2 中的条件(b)是容易实现的.如果函数  $\beta F(x) + G(x)$  是带模  $\mu > 0$  强单调的,则从(11)式和定义 3 中可以看出,当模  $\mu > 0$  时,  $\nabla V(x)$  也是带模  $\mu > 0$  强单调的,则  $V(x)$  是一致凸函数<sup>[18]</sup>, 因此水平集  $L(x_0)$  是有界的<sup>[18]</sup>.

**定理 3** 设  $x^*$  是 GNCP(1) 的解.假设以下条件成立:

- (a)  $F$  在  $x^*$  处是  $G$ -强单调函数;
- (b)  $\beta F(x) + G(x)$  是带模  $\mu > 0$  强单调的;
- (c)  $\beta \nabla F(x) + \nabla G(x)$  存在且在  $\mathbf{R}^n$  上是对称的;

(d)  $F$  和  $G$  在  $\mathbf{R}^n$  上是 Lipschitz 连续的.那么,对于任意  $t_0 \geq 0$  且  $x(t_0) = x_0 \in \mathbf{R}^n$ , ODE 系统(6) 在  $x^*$  上是全局指数稳定的,其中  $x^*$  是 GNCP(1) 的平衡解.

**证明** 由(3)式、引理 4 和(a)可得

$$\begin{aligned} \frac{dV(x)}{dt} &= \nabla V(x)^\top \frac{dx(t)}{dt} = -\{\beta[F(x) - F(x^*)] + G(x) - G(x^*)\}^\top \mathbf{A}^{-1}E(x, \beta) \leq \\ &\quad -\beta[F(x) - F(x^*)]^\top [G(x) - G(x^*)] \leq -\gamma\beta \|x - x^*\|^2. \end{aligned} \quad (19)$$

由定理 2 的证明和注 3 可知,  $\{x(t) \mid t \geq t_0\} \subset L(x_0)$  是有界的,则  $\beta \nabla F(x) + \nabla G(x)$  是有界的,则存在  $\delta_1 > 0$ , 对于任给的  $s \in \mathbf{R}^n$ , 有  $\|\beta \nabla F(s) + \nabla G(s)\| \leq \delta_1$ .

注意到

$$\begin{aligned} V(x) &= \int_0^1 (x - x^*)^\top \mathbf{A}^{-1} \{\beta[F(x^* + \tau(x - x^*))] + G(x^* + \tau(x - x^*))\} d\tau - (x - x^*)^\top \mathbf{A}^{-1} [\beta F(x^*) + \\ &\quad G(x^*)] = \int_0^1 (x - x^*)^\top \mathbf{A}^{-1} \{\beta[F(x^* + \tau(x - x^*))] + G(x^* + \tau(x - x^*)) - \beta F(x^*) - G(x^*)\} d\tau = \\ &\quad \int_0^1 \tau (x - x^*)^\top \mathbf{A}^{-1} \int_0^1 (\beta \nabla F(s_\tau) + \nabla G(s_\tau))(x - x^*) dt d\tau \leq \frac{1}{\min\{\lambda_i\}} \int_0^1 \int_0^1 \tau \|\beta \nabla F(s_\tau) + \\ &\quad \nabla G(s_\tau)\| \|x - x^*\|^2 dt d\tau \leq \int_0^1 \int_0^1 \frac{\delta_1}{\min\{\lambda_i\}} \|x - x^*\|^2 dt d\tau = \frac{\delta}{2} \|x - x^*\|^2, \end{aligned}$$

其中  $\delta = \frac{\delta_1}{\min\{\lambda_i\}}$ .

上式与(19)式表明  $\frac{dV}{dt} \leq -\gamma\beta \|x - x^*\|^2 \leq -\frac{2\gamma\beta}{\delta} V(x)$ , 因此

$$V(x) \leq V(x_0) \exp(-\lambda(t - t_0)), \forall t \geq t_0, \quad (20)$$

其中  $\kappa = \frac{2\gamma\beta}{\delta}$ . 因为  $\beta F(x) + G(x)$  在模  $\mu > 0$  下是强单调的,根据(11)式和定义 3 可知  $\nabla V(x)$  在模  $\mu > 0$  下也是强单调的,所以由注 3 可知  $V(x)$  是一致凸的. 因此,

$$V(x) - V(x^*) \geq \nabla V(x^*)(x - x^*) + \mu \|x - x^*\|^2, \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

又由(20)式和  $V(x^*) = 0$ , 可得  $\|x - x^*\| \leq \sqrt{\frac{V(x_0)}{\mu}} \exp(-\frac{\kappa(t - t_0)}{2})$ ,  $\forall t \geq t_0$ , 因此 ODE 系统(6)是

全局指数稳定的,定理得证.

根据定理 3,可以看出  $\beta$  与正对角矩阵  $\mathbf{A}$  中元素  $\lambda_i$  的大小对模型的稳定性有影响. $\beta$  与  $\lambda_i$  的值越大,模型稳定性越好.然而, $\beta$  的值太大时,模型实施困难,导致运行时间增加,下一节的数值模拟实验将验证这一点.

### 4 数值模拟实验

在本节中,为了验证神经动力系统模型的可行性,选取了以下 6 个问题来进行数值模拟实验,并测试了  $\beta$  对  $\|x(t) - x^*\|$  值的影响.对于其中的一些参数,设置如下:reltol 为  $10^{-3}$ , abstol 为  $10^{-6}$ ,  $\beta = 10$ ,  $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ .

**例 1 非线性互补问题:**

$$F(x) = \begin{pmatrix} 3\sqrt{x_1} + 2x_1x_2 + 2\sqrt{x_2} + x_3 + 3x_4 - 6 \\ 2\sqrt{x_1} + x_1 + \sqrt{x_2} + 10x_3 + 2x_4 - 2 \\ 3\sqrt{x_1} + x_1x_2 + 2\sqrt{x_2} + 2x_3 + 9x_4 - 9 \\ \sqrt{x_1} + 3\sqrt{x_2} + 2x_3 + 3x_4 - 3 \end{pmatrix},$$

该问题仅有一个解  $x^* = (1, 0, 3, 0)^T$ .初始向量分别取  $x_0^1 = (10, 10, 10, 10)^T$  和  $x_0^2 = (0.1, 0.3)^T$ .模拟结果如图 1 和图 2 所示,图 3 和图 4 分别描述了在初始向量  $x_0^1$  和  $x_0^2$  下,  $\|x(t) - x^*\|$  的值随  $\beta = 1, 10, 100$  的变化.

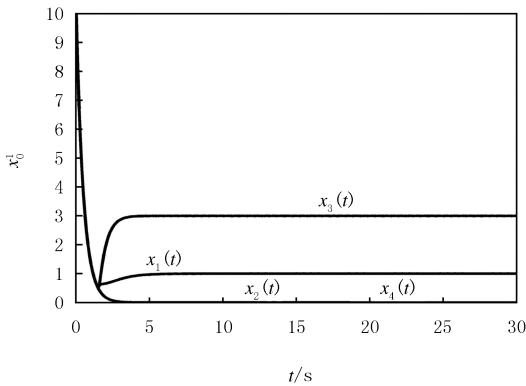


图1  $x(t)$  与  $x_0^1$  的瞬态关系

Fig.1 The transient relationship between  $x(t)$  and  $x_0^1$

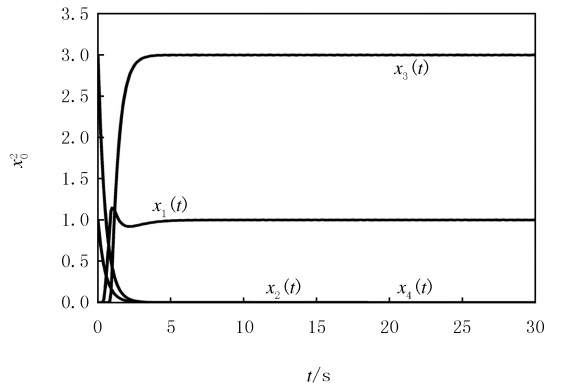


图2  $x(t)$  与  $x_0^2$  的瞬态关系

Fig.2 The transient relationship between  $x(t)$  and  $x_0^2$

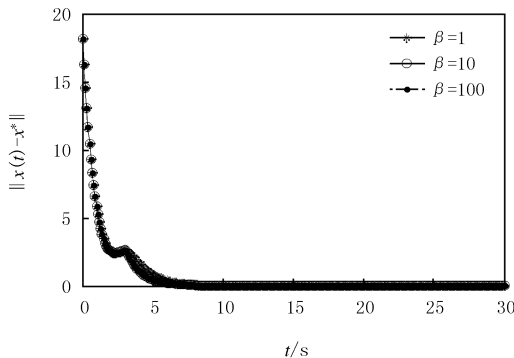


图3 在初始点  $x_0^1$  下, 误差  $\|x(t) - x^*\|$  的收敛性

Fig.3 The convergence of error  $\|x(t) - x^*\|$  at the initial point  $x_0^1$

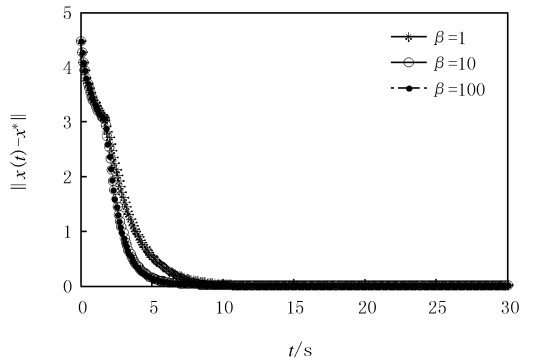


图4 在初始点  $x_0^2$  下, 误差  $\|x(t) - x^*\|$  的收敛性

Fig.4 The convergence of error  $\|x(t) - x^*\|$  at the initial point  $x_0^2$

例 2 非线性互补问题:

$$F(x) = \begin{pmatrix} |x_1 + x_5| - 1 \\ x_2 + x_5 - 1 \\ x_3 - 0.5 \\ x_4 - 0.5 \\ x_3 + x_4 - 1 \end{pmatrix},$$

该问题有解  $x^* = (0.53, 0.53, 0.50, 0.50, 0.46)^T$  初始点分别取  $x_0^3 = (1, 1, 1, 1, 1)^T$  和  $x_0^4 = (5, 5, 5, 5, 5)^T$ . 模拟结果如图 5 和图 6 所示, 图 7 和图 8 分别描述了在初始点  $x_0^3$  和  $x_0^4$  下,  $\|x(t) - x^*\|$  的值随  $\beta = 1, 10, 100$  的变化.

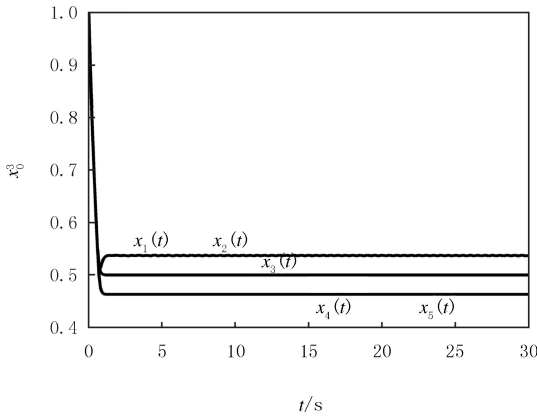


图5  $x(t)$ 与 $x_0^3$ 的瞬态关系

Fig. 5 The transient relationship between  $x(t)$  and  $x_0^3$

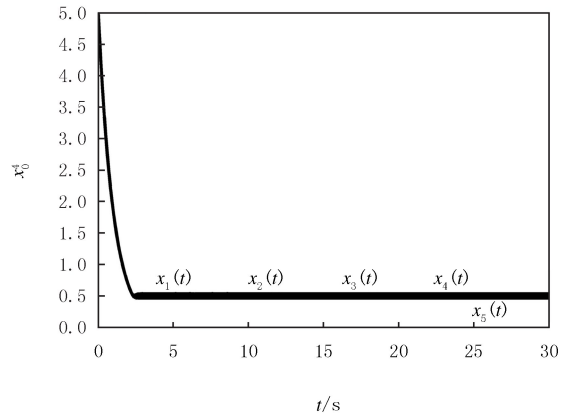


图6  $x(t)$ 与 $x_0^4$ 的瞬态关系

Fig. 6 The transient relationship between  $x(t)$  and  $x_0^4$

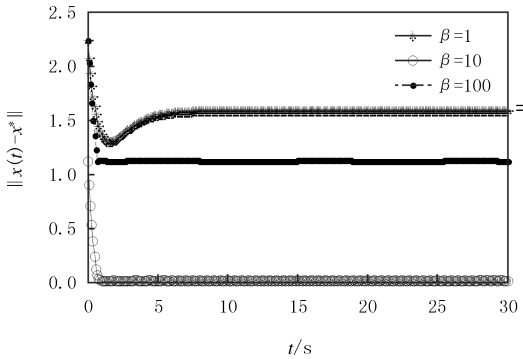


图7 在初始点 $x_0^3$ 下, 误差  $\|x(t) - x^*\|$  的收敛性

Fig. 7 The convergence of error  $\|x(t) - x^*\|$  at the initial point  $x_0^3$

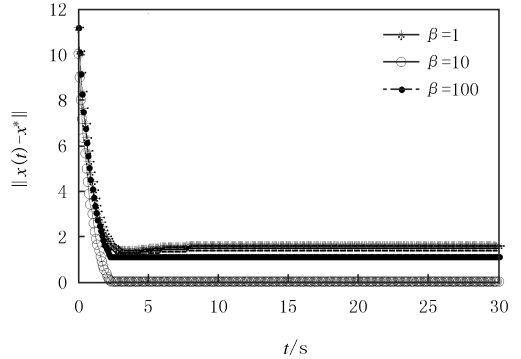


图8 在初始点 $x_0^4$ 下, 误差  $\|x(t) - x^*\|$  的收敛性

Fig. 8 The convergence of error  $\|x(t) - x^*\|$  at the initial point  $x_0^4$

例 3 非线性互补问题:

$$F(x) = (\arctan x_1 + x_2, \arctan x_2 + x_3, \dots, \arctan x_{n-1} + x_n, \arctan x_n)^T,$$

该问题有解  $x^* = (0, 0, \dots, 0)^T \in \mathbf{R}^n$ . 在测试这个例子时, 初始点  $x_0^5 \in \mathbf{R}^{1000}$  和  $x_0^6 \in \mathbf{R}^{5000}$  是随机生成的. 模拟结果如图 9 和图 10 所示, 图 11 和图 12 分别描述了在初始点  $x_0^5$  和  $x_0^6$  的情况下,  $\|x(t) - x^*\|$  的值随  $\beta = 1, 10, 100$  的变化.

例 4 非线性方程:

$$F_i(x) = 2x_i - \sin |x_i|, i = 1, 2, \dots, n, x \in \mathbf{R}^n,$$

$$X = \{x \in \mathbf{R}^n \mid l \leq x \leq u\}, l = -100(1, 1, \dots, 1)^T, u = 100(1, 1, \dots, 1)^T,$$

该问题是非线性的并且有解  $x^* = (0, 0, \dots, 0)^T \in \mathbf{R}^n$ . 在测试这个例子时, 初始点  $x_0^7 \in \mathbf{R}^{1000}$  和  $x_0^8 \in \mathbf{R}^{5000}$

是随机生成的.模拟结果如图 13 和图 14 所示,图 15 和图 16 分别描述了在初始点  $x_0^7$  和  $x_0^8$  的情况下,  $\|x(t) - x^*\|$  的值随  $\beta = 1, 10, 100$  的变化.

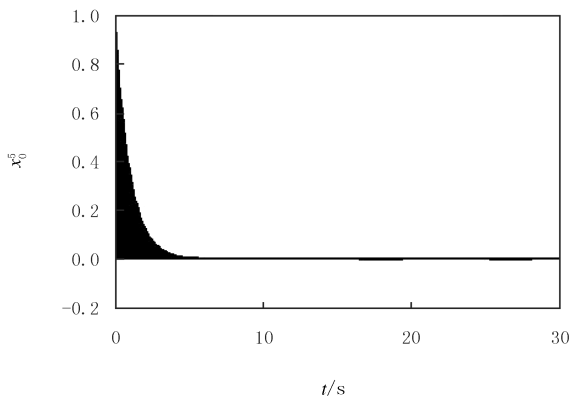


图9  $x(t)$ 与 $x_0^5$ 的瞬态关系

Fig.9 The transient relationship between  $x(t)$  and  $x_0^5$

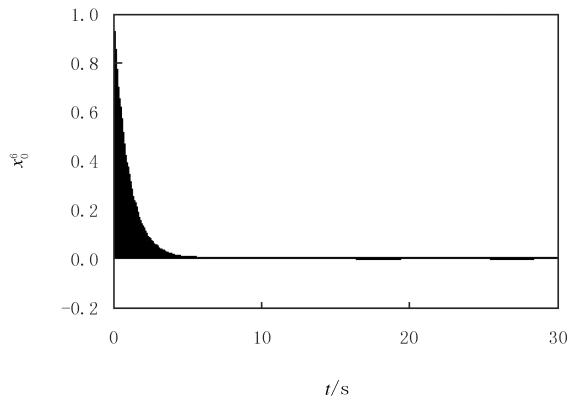


图10  $x(t)$ 与 $x_0^6$ 的瞬态关系

Fig.10 The transient relationship between  $x(t)$  and  $x_0^6$

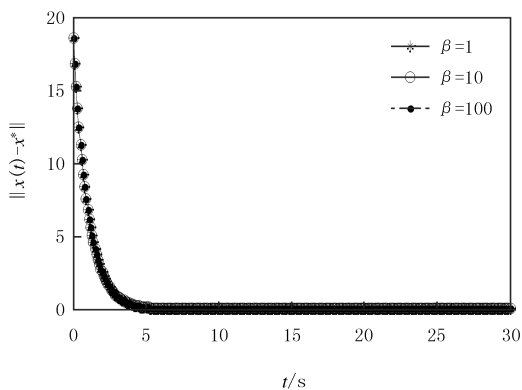


图11 在初始点 $x_0^5$ 下,误差 $\|x(t)-x^*\|$ 的收敛性

Fig.11 The convergence of error  $\|x(t)-x^*\|$  at the initial point  $x_0^5$

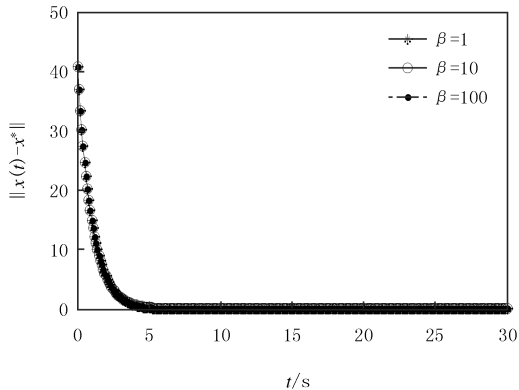


图12 在初始点 $x_0^6$ 下,误差 $\|x(t)-x^*\|$ 的收敛性

Fig.12 The convergence of error  $\|x(t)-x^*\|$  at the initial point  $x_0^6$

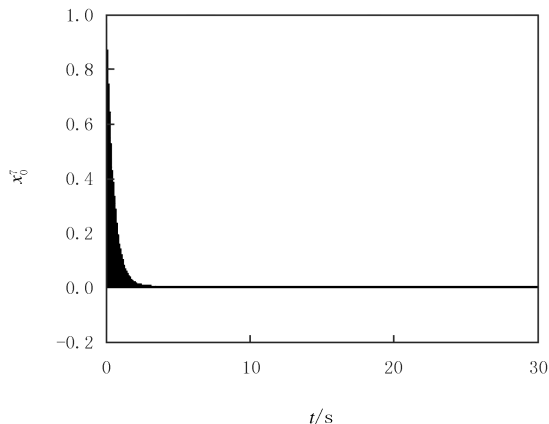


图13  $x(t)$ 与 $x_0^7$ 的瞬态关系

Fig.13 The transient relationship between  $x(t)$  and  $x_0^7$

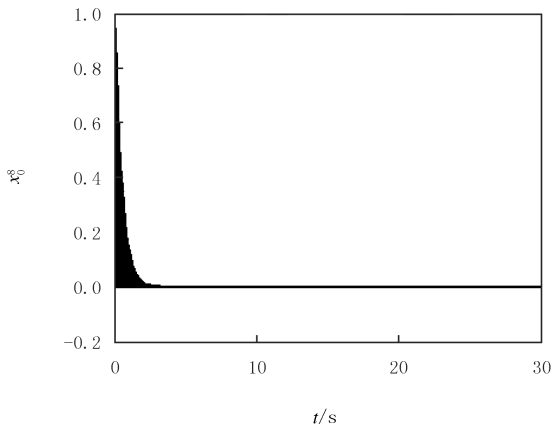


图14  $x(t)$ 与 $x_0^8$ 的瞬态关系

Fig.14 The transient relationship between  $x(t)$  and  $x_0^8$

通过上述数值模拟实验,可以得到所提出的神经动力系统模型能够有效解决广义非线性互补问题.并且,正如上文所说, $\beta$  的值越大,模型的稳定性越好,但是当  $\beta$  的值太大时,模型实现困难,会导致运算时间增加.接下来,为了更好地验证模型的优越性,将模型(5)(以下称为 GNCP 模型)与 GPNN 模型<sup>[11]</sup>的运算性能

进行比较,具体结果见表 1,其中 CPU 表示以 s 为单位的运行时间.

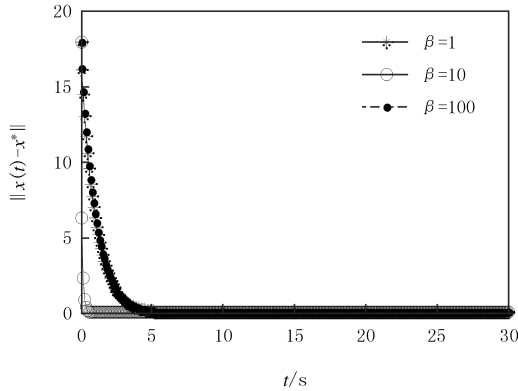


图15 在初始点 $x_0^7$ 下,误差 $\|x(t)-x^*\|$ 的收敛性

Fig.15 The convergence of error  $\|x(t)-x^*\|$  at the initial point  $x_0^7$

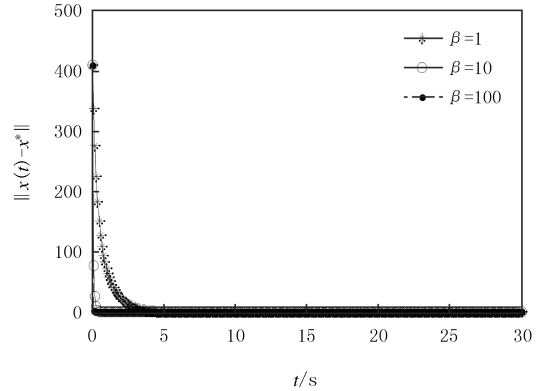


图16 在初始点 $x_0^8$ 下,误差 $\|x(t)-x^*\|$ 的收敛性

Fig.16 The convergence of error  $\|x(t)-x^*\|$  at the initial point  $x_0^8$

通过表 1,可以看出 GNCP 模型的运算性能是优于 GPNN 模型的.并且,表 1 中的运行时间也验证了正对角矩阵  $\mathbf{A}$  中元素  $\lambda$  的大小对模型稳定性有影响.

表 1 在不同条件下,GNCP 模型和 GPNN 模型的 CPU 运行时间

Tab. 1 CPU running time of GNCP model and GPNN model at different conditions

| 例子  | 初始点 $x_0$           | GPNN(CPU) ( $\mathbf{A}=41$ ) | GPNN(CPU) ( $\beta=5$ $\mathbf{A}=21$ ) | GPNN(CPU) ( $\beta=10$ $\mathbf{A}=21$ ) | GPNN(CPU) ( $\beta=5$ $\mathbf{A}=41$ ) |
|-----|---------------------|-------------------------------|---|--|---|
| 例 1 | $(0.1, 0.3)^T$      | 0.248 726                     | 0.127 207                               | 0.047 639                                | 0.032 121                               |
| 例 2 | $(5.5, 5.5, 5.5)^T$ | 0.037 519                     | 0.023 217                               | 0.018 288                                | 0.014 099                               |
| 例 3 | rand(1 000, 1)      | 21.054 741                    | 18.006 598                              | 9.639 960                                | 7.148 382                               |
|     | rand(2 000, 1)      | 82.825 372                    | 72.853 996                              | 41.551 382                               | 28.613 332                              |
|     | rand(3 000, 1)      | 105.473 123                   | 75.118 590                              | 74.670 248                               | 63.568 470                              |
| 例 4 | rand(1 000, 1)      | 12.721 170                    | 6.540 916                               | 3.020 306                                | 1.844 668                               |
|     | rand(2 000, 1)      | 49.807 891                    | 26.317 590                              | 11.846 755                               | 6.860 690                               |
|     | rand(3 000, 1)      | 106.289 847                   | 57.784 968                              | 27.219 023                               | 15.037 936                              |

## 5 小 结

本文提出了一种求解广义非线性互补问题的神经动力系统模型.该模型结构简单,易于实施.在一定的条件下,得到了该模型的收敛性和指数稳定性.由于在分析所提出模型的收敛性时没有利用任何形式的雅可比矩阵,因此既能分析更广泛的动力系统,又能简化分析.数值模拟结果表明,该模型具有可行性,能够有效解决所给出的测试问题,可以应用于求解广义非线性互补问题.

## 参 考 文 献

- [1] JOSHI B C, PANKAJ, MISHRA S K. On nonlinear complementarity problems with applications[J]. Journal of Information and Optimization Sciences, 2021, 42(1): 155-171.
- [2] 韩继业, 修乃华, 戚厚铎. 非线性互补理论与算法[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2006.
- [3] TAWHID M A, GU W Z, TRAN B. A descent algorithm for generalized complementarity problems based on generalized Fischer-Burmeister functions[J]. Computational and Applied Mathematics, 2018, 37(1): 1-26.
- [4] ZHANG X, PENG Z. A modulus-based nonmonotone line search method for nonlinear complementarity problems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2020, 387: 125175.
- [5] YOSHIKAWA T. Foundations of robotics: analysis and control[M]. Cambridge: MIT Press, 1990.
- [6] KOSKO B. Neural networks for signal processing[M]. London: Prentice Hall, 1992.



- [7] XIE Y J, KE Y F. Neural network approaches based on new NCP-functions for solving tensor complementarity problem[J]. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 2021, 67(1/2): 833-853.
- [8] CHE H J, WANG J. A collaborative neurodynamic approach to global and combinatorial optimization[J]. *Neural Networks: the Official Journal of the International Neural Network Society*, 2019, 114: 15-27.
- [9] JIANG X R, QIN S T, XUE X P. A penalty-like neurodynamic approach to constrained nonsmooth distributed convex optimization[J]. *Neurocomputing*, 2020, 377: 225-233.
- [10] NIKSERESHT A, NAZEMI A. A novel neural network for solving semidefinite programming problems with some applications[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2019, 350: 309-323.
- [11] XIA Y S, WANG J. A general projection neural network for solving monotone variational inequalities and related optimization problems[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2004, 15(2): 318-328.
- [12] ALCANTARA J H, CHEN J S. Neural networks based on three classes of NCP-functions for solving nonlinear complementarity problems[J]. *Neurocomputing*, 2019, 359: 102-113.
- [13] HE B S. Inexact implicit methods for monotone general variational inequalities[J]. *Mathematical Programming*, 1999, 86(1): 199-217.
- [14] HARKER P T, PANG J S. Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems; a survey of theory, algorithms and applications[J]. *Mathematical Programming*, 1990, 48(1/2/3): 161-220.
- [15] SLOTINE J J E, LI W. *Applied nonlinear control*[M]. London: Prentice Hall, 1991.
- [16] NOOR M A. General variational inequalities[J]. *Applied Mathematics Letters*, 1988, 1(2): 119-122.
- [17] HAN Q M, LIAO L Z, QI H D, et al. Stability analysis of gradient-based neural networks for optimization problems[J]. *Journal of Global Optimization*, 2001, 19(4): 363-381.
- [18] XU C X, CHEN Z P, LI N C. *Modern Optimization Methods*[M]. Beijing: Science Press, 2002.

## An approach to general nonlinear complementarity problems based on neurodynamic system

Xu Wenjie, Ou Yigui

(College of Science, Hainan University, Haikou 570228, China)

**Abstract:** In this paper, an optimization method based on neurodynamic system model for solving generalized nonlinear complementarity problems is proposed. A main feature of this method is that it does not involve any form of matrix information when analyzing its convergence. The method has convergence and global exponential stability under some reasonable assumptions. Numerical simulation results show that the model is effective and can be applied to solve some large-scale nonlinear complementarity problems.

**Keywords:** nonlinear complementarity problems; projection equation; neurodynamical system model; convergence analysis; exponential stability

[责任编辑 陈留院 赵晓华]