

# 带有 Allee 效应和 Lévy 噪声的 Leslie-Gower 捕食-被捕食模型的研究

王小攀<sup>a</sup>, 李爽<sup>b</sup>

(河南师范大学 a.新联学院;b.数学与信息科学学院,河南 新乡 453007)

**摘要:** 讨论了一个带有 Allee 效应和 Lévy 噪声的 Leslie-Gower 模型,根据伊藤公式和随机微分方程的比较定理,研究了模型的全局正解的存在性,给出了种群均值稳定、均值持久生存以及灭绝的阈值条件.进一步讨论了随机模型解的随机最终有界性.最后,给出数值模拟来验证文中的结论.

**关键词:** Leslie-Gower; Allee 效应; Lévy 噪声; 均值稳定; 有界性

**中图分类号:** O29

**文献标志码:** A

近年来 Leslie-Gower 模型得到了广泛的关注,它假设捕食者种群的增长率为 Logistic 类型,且捕食者种群的负载量与食饵种群的数量成正比.文献[1-2]讨论了一个修正的 Leslie-Gower 模型,

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - \frac{c_1 N(t)P(t)}{N(t) + a_1}, \\ \frac{dP(t)}{dt} = s_1 P(t) \left(1 - \frac{P(t)}{N(t) + a_2}\right), \end{cases} \quad (1)$$

这里  $N(t)$  与  $P(t)$  分别代表食饵种群和捕食者种群在时刻  $t$  的种群密度,所有参数为正, $r$  与  $s_1$  代表食饵种群和捕食者种群的内禀增长率, $c_1$  表示捕获率, $a_1$  与  $a_2$  分别表示环境对食饵和捕食者种群的庇护程度.

Allee 在文献[3]中首次提出 Allee 效应,种群密度较低时,将会出现种群个体难以找到配偶或者近亲繁殖,难以抵御天敌以及相互协作减少等后果,可以参考文献[4-6].Allee 效应在模型中有不同的形式,一般来说,如果  $N(t)$  表示种群的密度,那么在 Logistic 方程中增加一项“ $-A(N)$ ”<sup>[7]</sup>,也就是加法形式的 Allee 效应,这里  $A(N) = \frac{m}{N+b}$ ,即  $\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - \frac{mN(t)}{N(t)+b}$ ,  $m$  和  $b$  表示 Allee 效应对种群生长造成的严重损害程度<sup>[8]</sup>.

众所周知,自然界中种群动力系统不可避免地受到环境噪声的影响,目前已有许多论文利用白噪声和 Lévy 噪声来模拟环境的随机变化,可以参考文献[9-14].鉴于环境的随机变化,讨论一个带有 Allee 效应和 Lévy 噪声的 Leslie-Gower 捕食-被捕食模型,

$$\begin{cases} dN(t) = \left[ rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - \frac{mN(t)}{N(t)+b} - \frac{cN(t)P(t)}{N(t)+a_1} \right] dt + \\ \sigma_1 N(t) dB_1(t) + \int_Y \gamma_1(u) N(t^-) \tilde{N}(dt, du), \\ dP(t) = \left[ sP(t) \left(1 - \frac{P(t)}{N(t)+a_2}\right) \right] dt + \sigma_2 P(t) dB_2(t) + \int_Y \gamma_2(u) P(t^-) \tilde{N}(dt, du), \end{cases} \quad (2)$$

初始条件为  $(N_0, P_0) \in \mathbf{R}_+^2$ ,  $c, s$  代替模型(1)中的参数  $c_1, s_1$ ,所有参数的意义与模型(1)一样.类似文献[4,8],

收稿日期:2020-12-28;修回日期:2021-06-04.

基金项目:国家自然科学基金(11901059)

作者简介:王小攀(1982—),男,河南南阳人,河南师范大学讲师,主要从事生物数学的研究.

通信作者:李爽(1983—),E-mail:oklishuang@163.com.

$m$  和  $b$  表示 Allee 效应对种群生长造成的严重损害程度.  $B_i(t) (i=1,2)$  是定义在完备概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  上相互独立的布朗运动, 概率空间上的流  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbf{R}_+}$  满足一般条件.  $\sigma_i^2 (i=1,2)$  是白噪声的强度.  $\tilde{N}(dt, du) = \bar{N}(dt, du) - \lambda(du)dt$ ,  $\bar{N}$  是在  $(0, +\infty)$  中的可测集  $Y$  上具有特征测度  $\lambda$  的泊松计数测度,  $\lambda(Y) < \infty$ .  $\gamma_i : Y \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  关于特征测度  $\lambda$  有界连续且  $\mathcal{B}(Y) \times \mathcal{F}_t^-$  可测,  $\gamma_i(u) > -1, i=1,2$ . 在模型(2)中,  $N(t^-)$  与  $P(t^-)$  表示  $N(t)$  和  $P(t)$  的左极限.

### 1 全局正解的存在性

**定理 1** 对于任意的初值  $(N_0, P_0) \in \mathbf{R}_+^2$ , 模型(2) 在  $[0, +\infty)$  上存在唯一正解  $(N(t), P(t))$ .

定理 1 的证明与文献[9]类似, 此处省略.

当  $t \geq 0$  时, 若  $\sup_{t \geq 0} \int_0^t \int_Y \exp(v-t) [\gamma_i(u) - \ln(1 + \gamma_i(u))] \lambda(du)dv < \infty, i=1,2$ , 根据文献[10]的推论 4.1, 因此下面定理成立.

**定理 2** 如果  $\sup_{t \geq 0} \int_0^t \int_Y \exp(v-t) [\gamma_i(u) - \ln(1 + \gamma_i(u))] \lambda(du)dv < \infty, i=1,2, t \geq 0$ . 那么模型(2)

的解  $(N(t), P(t))$  满足  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln N(t)}{t} \leq 0, \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln P(t)}{t} \leq 0, a.s.$

### 2 种群的均值稳定性与灭绝

设  $\int_Y [\ln(1 + \gamma_i(u))]^2 \lambda(du) < q, i=1,2$ , 这里  $q$  是常数.

**定义 1** 设  $m(t)$  表示种群在时刻  $t$  的密度,

- (1) 如果  $\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = 0$ , 则称种群灭绝;
- (2) 如果  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t m(v)dv > 0$ , 则称种群为均值稳定;
- (3) 如果  $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t m(v)dv > 0$ , 则称种群为均值强持续生存;
- (4) 如果  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t m(v)dv > 0$ , 则称种群为均值弱持续生存;
- (5) 如果  $0 < \alpha_1 \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t m(v)dv \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t m(v)dv \leq \alpha_2, a.s.$ , 这里  $\alpha_i (i=1,2)$  为常数, 则称种群为均值持久生存.

根据伊藤公式(见文献[15]), 模型(2) 化为

$$\begin{cases} d \ln N(t) = [r - n_1 - \frac{rN(t)}{K} - \frac{m}{N(t)+b} - \frac{cP(t)}{N(t)+a_1}]dt + \sigma_1 dB_1(t) + \int_Y \ln(1 + \gamma_1(u)) \tilde{N}(dt, du), \\ d \ln P(t) = [s - n_2 - \frac{sP(t)}{N(t)+a_2}]dt + \sigma_2 dB_2(t) + \int_Y \ln(1 + \gamma_2(u)) \tilde{N}(dt, du), \end{cases} \quad (3)$$

这里  $n_i = \frac{\sigma_i^2}{2} + \int_Y [\gamma_i(u) - \ln(1 + \gamma_i(u))] \lambda(du), i=1,2$ . 那么,

$$\begin{cases} \frac{\ln N(t) - \ln N_0}{t} = (r - n_1) - \frac{1}{t} \int_0^t \frac{rN(v)}{K} dv - \frac{1}{t} \int_0^t \frac{m}{N(v)+b} dv - \frac{1}{t} \int_0^t \frac{cP(v)}{N(v)+a_1} dv + \frac{\sigma_1 B_1(t)}{t} + \frac{M_1(t)}{t}, \\ \frac{\ln P(t) - \ln P_0}{t} = (s - n_2) - \frac{1}{t} \int_0^t \frac{sP(v)}{N(v)+a_2} dv + \frac{\sigma_2 B_2(t)}{t} + \frac{M_2(t)}{t}, \end{cases} \quad (4)$$

此处  $M_i(t) = \int_0^t \int_Y \ln(1 + \gamma_i(u)) \tilde{N}(dv, du)$ ,  $i=1, 2$ .  $M_i(t)$  为局部鞅, 根据文献[16]中的命题 2.4 和假设条件, 得  $\langle M_i, M_i \rangle(t) = \int_0^t \int_Y [\ln(1 + \gamma_i(u))]^2 \lambda(du) dv < qt$ ,  $i=1, 2$ . 利用强大数定律, 易证

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_i(t)}{t} = 0, \text{ a.s. } i=1, 2. \quad (5)$$

下面分 3 种情况讨论:

(I) 由(4)式, 得

$$\frac{1}{t} \ln \frac{N(t)}{N_0} \leq (r - n_1) - \frac{r}{K} \frac{1}{t} \int_0^t N(v) dv + \frac{\sigma_1 B_1(t)}{t} + \frac{M_1(t)}{t}, \quad (6)$$

如果  $r < n_1$ , 根据  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_i(t)}{t} = 0$ , a.s.  $i=1, 2$ , 以及(5)式, 知  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln N(t)}{t} < 0$ , 这意味着  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 0$ . 同理, 如果  $s < n_2$ , 易得  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 0$ .

(II) 根据(6)式和文献[17]中的引理 2, 当  $r > n_1 + \frac{m}{b}$  时, 可得  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t N(v) dv \leq \frac{(r - n_1)K}{r}$ . 类似于(I)中的证明, 当  $s < n_2$  时, 有  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 0$ , 此时, 对于任意小的正数  $\varepsilon_1$ , 存在一个正数  $T_1$  使得当  $t > T_1$  时, 有  $-\varepsilon_1 < P(t) < \varepsilon_1$ , 那么

$$\frac{1}{t} \ln \frac{N(t)}{N_0} \geq (r - n_1 - \frac{m}{b} - \frac{c\varepsilon_1}{a_1}) - \frac{r}{K} \frac{1}{t} \int_0^t N(v) dv + \frac{\sigma_1 B_1(t)}{t} + \frac{M_1(t)}{t}.$$

利用文献[17]中的引理 2 以及  $\varepsilon_1$  的任意性, 知当  $r > n_1 + \frac{m}{b}$  时, 成立

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t N(v) dv \geq \frac{(r - n_1 - \frac{m}{b})K}{r}.$$

(III) 根据(I)的证明可得, 当  $r < n_1$  时,  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 0$ . 对于一个任意的正数  $\varepsilon_2$ , 当  $t$  充分大时  $N(t)$  满足  $-\varepsilon_2 < N(t) < \varepsilon_2$ , 因此,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \ln \frac{P(t)}{P_0} &\leq (s - n_2) - \frac{1}{t} \int_0^t \frac{sP(v)}{\varepsilon_2 + a_2} dv + \frac{\sigma_2 B_2(t)}{t} + \frac{M_2(t)}{t}, \\ \frac{1}{t} \ln \frac{P(t)}{P_0} &\geq (s - n_2) - \frac{1}{t} \int_0^t \frac{sP(v)}{a_2 - \varepsilon_2} dv + \frac{\sigma_2 B_2(t)}{t} + \frac{M_2(t)}{t}. \end{aligned}$$

利用文献[17]中的引理 2, 当  $s > n_2$  时, 由上面两式可得

$$\frac{(s - n_2)(a_2 - \varepsilon_2)}{s} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P(v) dv \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P(v) dv \leq \frac{(s - n_2)(a_2 + \varepsilon_2)}{s},$$

由  $\varepsilon_2$  的任意性,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P(v) dv = \frac{(s - n_2)a_2}{s}.$$

即下面结论成立.

**定理 3** (I) 若  $r < n_1, s < n_2$ , 食饵种群和捕食者种群均走向灭亡.

(II) 若  $r > n_1 + \frac{m}{b}, s < n_2$ , 那么食饵种群为均值持久生存, 即

$$\frac{(r - n_1 - \frac{m}{b})K}{r} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t N(v) dv \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t N(v) dv \leq \frac{(r - n_1)K}{r},$$

而捕食者种群将会灭亡.

(III) 若  $r < n_1, s > n_2$ , 食饵种群灭绝, 而捕食者种群为均值稳定的, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P(v) dv = \frac{(s - n_2)a_2}{s}$ ,

a.s.

### 3 随机最终有界性

**定义 2** 对于任意的初值  $(N_0, P_0)^T \in \mathbf{R}_+^2$ , 模型(2) 满足该初值的解  $(N(t), P(t))^T$  有下面的性质, 如果对任意的  $\epsilon \in (0, 1)$ , 存在一个常数  $H := H(\epsilon)$  使得  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathcal{P}\{|(N(t), P(t))^T| \leq H\} \geq 1 - \epsilon$ , 则称解  $(N(t), P(t))^T$  为随机最终有界的.

**定理 4** 若  $a_2 > K_1(1)$ , 这里  $K_1(1) = \frac{(1+r)^2 K}{4r}$ , 那么对所有的  $\bar{p} > 0$ , 存在常数  $K_i(\bar{p}) (i = 1, 2)$  满足

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} E[N^{\bar{p}}(t)] \leq K_1(\bar{p}), \limsup_{t \rightarrow \infty} E[P^{\bar{p}}(t)] \leq K_2(\bar{p}), \text{ a.s.}$$

此处  $(N(t), P(t))^T$  为模型(2) 满足初值  $(N_0, P_0)^T \in \mathbf{R}_+^2$  的解.

**证明** 利用伊藤公式,

$$\begin{aligned} d(e^t N^{\bar{p}}(t)) &= e^t N^{\bar{p}}(t) \left\{ 1 + \bar{p} \left[ r \left( 1 - \frac{N(t)}{K} \right) - \frac{m}{N(t) + b} - \frac{cP(t)}{N(t) + a_1} \right] + \frac{\bar{p}(\bar{p} - 1)}{2} \sigma_1^2 + \right. \\ &\quad \left. \int_Y [(1 + \gamma_1(u))^{\bar{p}} - 1 - \bar{p}\gamma_1(u)] \lambda(du) \right\} dt + \bar{p}\sigma_1 e^t N^{\bar{p}}(t) dB_1(t) + \\ &\quad \int_Y e^t N^{\bar{p}}(t) [(1 + \gamma_1(u))^{\bar{p}} - 1] \tilde{N}(dt, du), \end{aligned}$$

取期望得:

$$\begin{aligned} E(e^t N^{\bar{p}}(t)) &= N_0^{\bar{p}} + E \int_0^t e^v N^{\bar{p}}(v) \left\{ 1 + \bar{p}r + \frac{\bar{p}(\bar{p} - 1)}{2} \sigma_1^2 + \int_Y [(1 + \gamma_1(u))^{\bar{p}} - 1 - \bar{p}\gamma_1(u)] \lambda(du) - \right. \\ &\quad \left. \frac{\bar{p}rN(v)}{K} - \frac{\bar{p}m}{N(v) + b} - \frac{c\bar{p}P(v)}{N(v) + a_1} \right\} dv \leq N_0^{\bar{p}} + E \int_0^t e^v N^{\bar{p}}(v) \left\{ 1 + \bar{p}r + \right. \\ &\quad \left. \frac{\bar{p}(\bar{p} - 1)}{2} \sigma_1^2 + \int_Y [(1 + \gamma_1(u))^{\bar{p}} - 1 - \bar{p}\gamma_1(u)] \lambda(du) - \frac{\bar{p}r}{K} N(v) \right\} dv. \end{aligned}$$

注意到对于函数  $f(v) = v^{\bar{p}}(a - bv)$ ,  $v \in [0, +\infty)$ ,  $\bar{p} > 0, a > 0, b > 0$ ,  $f(v)$  在  $\frac{a\bar{p}}{(\bar{p} + 1)b}$  处取得最大值, 即

$$f(v) \leq \frac{a^{\bar{p}+1} \bar{p}^{\bar{p}}}{(\bar{p} + 1)^{\bar{p}+1} b^{\bar{p}}}. \tag{7}$$

所以,  $E(e^t N^{\bar{p}}(t)) \leq N_0^{\bar{p}} + E \int_0^t e^v K_1(\bar{p}) dv \leq N_0^{\bar{p}} + K_1(\bar{p})(e^t - 1)$ , 这里

$$K_1(\bar{p}) = \frac{[1 + \bar{p}r + \frac{\bar{p}(\bar{p} - 1)}{2} \sigma_1^2 + \int_Y [(1 + \gamma_1(u))^{\bar{p}} - 1 - \bar{p}\gamma_1(u)] \lambda(du)]^{\bar{p}+1} K^{\bar{p}}}{(\bar{p} + 1)^{\bar{p}+1} r^{\bar{p}}}.$$

令  $t \rightarrow +\infty$ , 得到

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} E[N^{\bar{p}}(t)] \leq K_1(\bar{p}), \text{ a.s.} \tag{8}$$

类似地,

$$\begin{aligned} d(e^t P^{\bar{p}}(t)) &= e^t P^{\bar{p}}(t) \left\{ 1 + \bar{p}s \left[ 1 - \frac{P(t)}{N(t) + a_2} \right] + \frac{\bar{p}(\bar{p} - 1)}{2} \sigma_2^2 + \int_Y [(1 + \gamma_2(u))^{\bar{p}} - \right. \\ &\quad \left. \bar{p}\gamma_2(u) - 1] \lambda(du) \right\} dt + \bar{p}\sigma_2 e^t P^{\bar{p}}(t) dB_2(t) + \int_Y e^t P^{\bar{p}}(t) [(1 + \gamma_2(u))^{\bar{p}} - 1] \tilde{N}(dt, du). \end{aligned}$$

那么

$$E(e^t P^{\bar{p}}(t)) = P_0^{\bar{p}} + E \int_0^t e^v P^{\bar{p}}(v) \left\{ 1 + \bar{p}s \left[ 1 - \frac{P(v)}{N(v) + a_2} \right] + \frac{\bar{p}(\bar{p} - 1)}{2} \sigma_2^2 + \right.$$

$$\int_Y [(1 + \gamma_2(u))^{\bar{p}} - \bar{p}\gamma_2(u) - 1]\lambda(du) \} dv,$$

由于  $-\frac{sP(v)}{N(v) + a_2} = -\frac{sP(v)}{a_2} + \frac{sN(v)P(v)}{a_2(N(v) + a_2)}$ ,

$$\begin{aligned} E(e^t P^{\bar{p}}(t)) &= P_0^{\bar{p}} + E \int_0^t e^v P^{\bar{p}}(v) \{1 + \bar{p}s + \frac{\bar{p}(\bar{p} - 1)}{2} \sigma_2^2 + \int_Y [(1 + \gamma_2(u))^{\bar{p}} - \bar{p}\gamma_2(u) - 1]\lambda(du) - \\ &\frac{\bar{p}sP(v)}{a_2} + \frac{\bar{p}sN(v)P(v)}{a_2(N(v) + a_2)}\} dv \leq P_0^{\bar{p}} + E \int_0^t e^v P^{\bar{p}}(v) \{1 + \bar{p}s + \frac{\bar{p}(\bar{p} - 1)}{2} \sigma_2^2 + \int_Y [(1 + \gamma_2(u))^{\bar{p}} - \\ &\bar{p}\gamma_2(u) - 1]\lambda(du) - \frac{\bar{p}s}{a_2} P(v) + \frac{\bar{p}s}{a_2} N(v)P(v)\} dv \leq P_0^{\bar{p}} + E \int_0^t e^v P^{\bar{p}}(v) \{1 + \\ &\bar{p}s + \frac{\bar{p}(\bar{p} - 1)}{2} \sigma_2^2 + \int_Y [(1 + \gamma_2(u))^{\bar{p}} - \bar{p}\gamma_2(u) - 1]\lambda(du) - \\ &\frac{\bar{p}s}{a_2} P(v)\} dv + \frac{\bar{p}s}{a_2} \int_0^t e^v E(N(v))E(P^{\bar{p}+1}(v)) dv. \end{aligned}$$

根据(8)式,对于满足  $a_2 - K_1(1) > \epsilon > 0$  的常数  $\epsilon$ ,存在正数  $T$  使得当  $t > T$  时,有

$$E(N^{\bar{p}}(t)) \leq K_1(\bar{p}) + \epsilon.$$

则

$$\begin{aligned} E(e^t P^{\bar{p}}(t)) &\leq P_0^{\bar{p}} + E \int_0^t e^v P^{\bar{p}}(v) \{1 + \bar{p}s + \frac{\bar{p}(\bar{p} - 1)}{2} \sigma_2^2 + \int_Y [(1 + \gamma_2(u))^{\bar{p}} - \\ &\bar{p}\gamma_2(u) - 1]\lambda(du) - \frac{\bar{p}s}{a_2} P(v)\} dv + \frac{\bar{p}s}{a_2} \int_0^t e^v (K_1(1) + \epsilon)E(P^{\bar{p}+1}(v)) dv \leq \\ &P_0^{\bar{p}} + E \int_0^t e^v P^{\bar{p}}(v) \{1 + \bar{p}s + \frac{\bar{p}(\bar{p} - 1)}{2} \sigma_2^2 + \int_Y [(1 + \gamma_2(u))^{\bar{p}} - \bar{p}\gamma_2(u) - \\ &1]\lambda(du) - [\frac{\bar{p}s}{a_2} - \frac{\bar{p}s}{a_2}(K_1(1) + \epsilon)]P(v)\} dv, \end{aligned}$$

考虑到  $a_2 > K_1(1) + \epsilon$ ,利用(7)式,

$$E(e^t P^{\bar{p}}(t)) \leq P_0^{\bar{p}} + E \int_0^t e^v \bar{K}_2(\bar{p}) dv = P_0^{\bar{p}} + \bar{K}_2(\bar{p})(e^t - 1), \tag{9}$$

此处

$$\bar{K}_2(\bar{p}) = \frac{[1 + \bar{p}s + \frac{\bar{p}(\bar{p} - 1)}{2} \sigma_2^2 + \int_Y [(1 + \gamma_2(u))^{\bar{p}} - \bar{p}\gamma_2(u) - 1]\lambda(du)]^{\bar{p}+1} a_2^{2\bar{p}}}{(\bar{p} + 1)^{\bar{p}+1} s^{\bar{p}} [a_2 - K_1(1) - \epsilon]^{\bar{p}}},$$

$K_1(1) = \frac{(1+r)^2 K}{4r}$ . 定义

$$K_2(\bar{p}) = \frac{[1 + \bar{p}s + \frac{\bar{p}(\bar{p} - 1)}{2} \sigma_2^2 + \int_Y [(1 + \gamma_2(u))^{\bar{p}} - \bar{p}\gamma_2(u) - 1]\lambda(du)]^{\bar{p}+1} a_2^{2\bar{p}}}{(\bar{p} + 1)^{\bar{p}+1} s^{\bar{p}} [a_2 - K_1(1)]^{\bar{p}}},$$

注意到  $\epsilon$  的任意性,可得  $\limsup_{t \rightarrow \infty} E[P^{\bar{p}}(t)] \leq K_2(\bar{p})$ .

根据定理 4 和 Chebyshev 不等式,易证以下结论.

**定理 5** 若  $a_2 > \frac{(1+r)^2 K}{4r}$ ,模型(2)的解随机最终有界.

### 4 数值模拟

为了更好地验证文中的结果,按照文献[18]中的方法给出了一些例子和数值模拟.对于模型(2),定义初

值  $(N_0, P_0) = (0.5, 0.5), K = 1, m = 0.3, b = 0.5, c = 0.5, a_1 = 0.5, a_2 = 0.5, \sigma_1 = 0.5, \sigma_2 = 0.5, Y = (0, +\infty), \lambda(Y) = 1$ , 步长为  $\Delta t = 0.1$ .

(a) 设  $r = 0.7, s = 0.1, \gamma_1(u) = -0.8, \gamma_2(u) = -0.8$ , 其他参数同上, 此时,

$$n_1 = \frac{\sigma_1^2}{2} + \int_Y [\gamma_1(u) - \ln(1 + \gamma_1(u))] \lambda(du) = 0.934 4,$$

$$n_2 = \frac{\sigma_2^2}{2} + \int_Y [\gamma_2(u) - \ln(1 + \gamma_2(u))] \lambda(du) = 0.934 4,$$

显然,  $r < n_1, s < n_2$ , 根据定理 3, 两个种群均会走向灭亡, 参见图 1.

(b) 令  $r = 0.9, s = 0.1, \gamma_1(u) = 0.2, \gamma_2(u) = -0.8$ , 其他参数不变, 则  $n_1 = 0.142 7, n_2 = 0.934 4, n_1 + \frac{m}{b} = 0.742 7$

且  $r > n_1 + \frac{m}{b}, s < n_2$ , 根据定理 3 中的结论(II), 食饵种群均值持久生存, 而捕食者种群灭亡, 这与图 2 结论一致.

(c) 令  $r = 0.7, s = 0.5, \gamma_1(u) = -0.8, \gamma_2(u) = 0.2$ , 其他参数不变, 那么  $n_1 = 0.934 4, n_2 = 0.142 7, r < n_1, s > n_2$ , 根据定理 3 中的结论(III), 食饵种群走向灭绝, 而捕食者种群为均值稳定的, 这与图 3 相符.

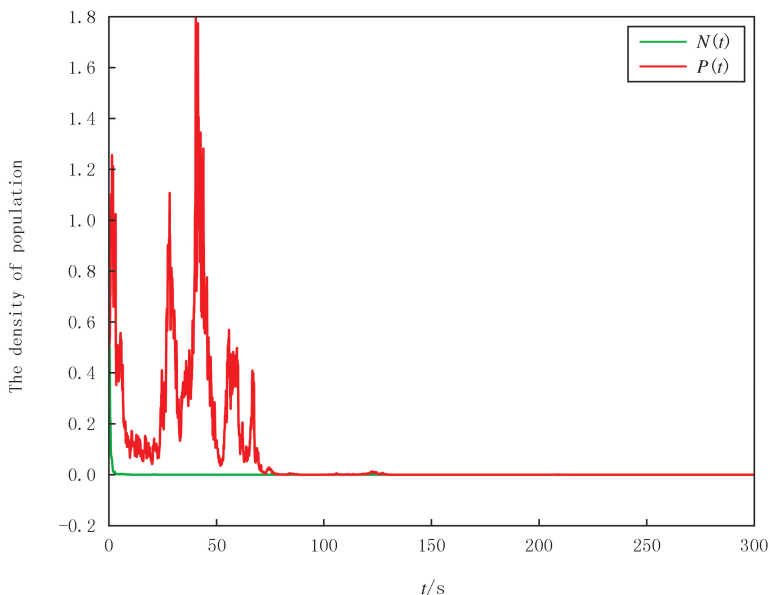


图1 取参数  $r=0.7, s=0.1, \gamma_1(u)=-0.8, \gamma_2(u)=-0.8$  时模拟模型(2)的解  
Fig.1 Take the parameter  $r=0.7, s=0.1, \gamma_1(u)=-0.8, \gamma_2(u)=-0.8$ , simulate the solution of model (2)

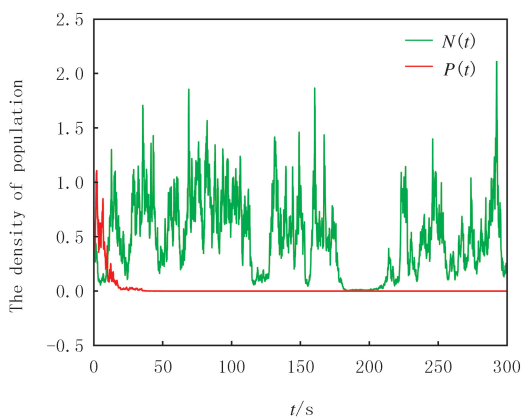


图2 取参数  $r=0.9, s=0.1, \gamma_1(u)=0.2, \gamma_2(u)=-0.8$  时模拟模型(2)的解  
Fig.2 Take the parameter  $r=0.9, s=0.1, \gamma_1(u)=0.2, \gamma_2(u)=-0.8$ , simulate the solution of model (2)

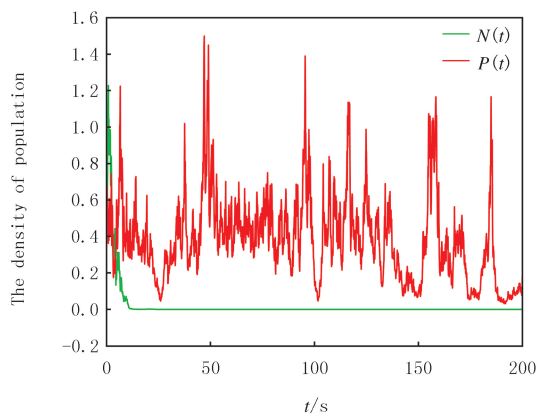


图3 取参数  $r=0.7, s=0.5, \gamma_1(u)=-0.8, \gamma_2(u)=0.2$  时模拟模型(2)的解  
Fig.3 Take the parameter  $r=0.7, s=0.5, \gamma_1(u)=-0.8, \gamma_2(u)=0.2$ , simulate the solution of model (2)

## 5 结 论

文中结论表明无论是白噪声还是 Lévy 噪声都不利于种群的持续生存, 从数值模拟的例子可以看出, Lévy 噪声和高斯白噪声对于随机模型中种群的持久生存有着重要的影响, 因此在研究生物种群时非常有必

要考虑环境的随机变化因素.

## 参 考 文 献

- [1] AZIZ-ALAOUI M A, DAHER OKIYE M. Boundedness and global stability for a predator-prey model with modified Leslie-Gower and Holling-type II schemes[J]. *Appl Math Lett*, 2003, 16(7): 1069-1075.
- [2] NINDJIN A F, AZIZ-ALAOUI M A, CADIVEL M. Analysis of a predator-prey model modified Leslie-Gower and Holling-type II schemes with time delay[J]. *Nonlinear Analysis: RWA*, 2006, 7(5): 1104-1118.
- [3] ALLEE W C. *Animal Aggregations, a Study in General Sociology*[M]. Chicago: The University of Chicago Press, 1931.
- [4] DENNIS B. Allee effects: population growth, critical density, and the chance of extinction[J]. *Nat Resour Model*, 1989, 3(4): 481-538.
- [5] WANG G, LIANG X G, WANG F Z. The competitive dynamics of populations subject to an Allee effect[J]. *Ecol Model*, 1999, 124(2/3): 183-192.
- [6] ZHOU S R, LIU Y F, WANG G. The stability of predator-prey systems subject to the Allee effects[J]. *Theor Popul Biol*, 2005, 67(1): 23-31.
- [7] DENNIS B. Allee effects in stochastic populations[J]. *Oikos*, 2002, 96(3): 389-401.
- [8] STEPHENS P A, SUTHERLAND W J. Consequences of the Allee effect for behaviour, ecology and conservation[J]. *Trends in Ecology*, 1999, 14(10): 401-405.
- [9] 王小攀, 李爽. 具有 Gauss 白噪声和 Lévy 噪声的似然竞争模型分析[J]. *河南师范大学学报(自然科学版)*, 2019, 47(4): 16-23.  
WANG X P, LI S. Analysis of a apparent competition model with Gauss white noise and Lévy noise[J]. *Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition)*, 2019, 47(4): 16-23.
- [10] BAO J H, MAO X R, YIN G, et al. Competitive Lotka-Volterra population dynamics with jumps[J]. *Nonlinear Anal*, 2011, 74(17): 6601-6616.
- [11] BAO J H, YUAN C G. Stochastic population dynamics driven by Lévy noise[J]. *J Math Anal Appl*, 2012, 391(2): 363-375.
- [12] LIU Q, CHEN Q. Asymptotic behavior of a stochastic non-autonomous predator-prey system with jumps[J]. *Appl Math Comput*, 2015, 271: 418-428.
- [13] LIU M, WANG K. Dynamics of a Leslie-Gower Holling-type II predator-prey system with Lévy jumps[J]. *Nonlinear Anal*, 2013, 85: 204-213.
- [14] LIU M, WANG K. Survival analysis of a stochastic single-species population model with jumps in a polluted environment[J]. *Ecological Modelling*, 2009, 220(9/10): 1347-1357.
- [15] MAO X R. *Stochastic Differential Equations and Applications*[M]. Chichester: Horwood Publishing Limited, 1997: 31-32.
- [16] KUNITA H. Itô's stochastic calculus: Its surprising power for applications[J]. *Stoch Proc Appl*, 2010, 120(5): 622-652.
- [17] LIU M, WANG K. Stochastic Lotka-Volterra systems with Lévy noise[J]. *J Math Anal Appl*, 2014, 410(2): 750-763.
- [18] PROTTER P, TALAY D. The Euler scheme for Lévy driven stochastic differential equations[J]. *Ann Probab*, 1997, 25: 393-423.

## Research of a Leslie-Gower predator-prey model with Allee effect and Lévy noise

Wang Xiaopan<sup>a</sup>, Li Shuang<sup>b</sup>

(a. College of Xinlian; b. College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

**Abstract:** A Leslie-Gower predator-prey model with Allee effect and Lévy noise is discussed. By virtue of Itô's formula, comparison theorem for stochastic model, the existence of global positive solution for the model is studied, the threshold conditions for stable in the mean, permanence in the mean and extinction for the population are obtained. Furthermore, the ultimate boundedness of solution for stochastic model is discussed. In the end, numerical simulations are given to verify the results.

**Keywords:** Leslie-Gower; Allee effect; Lévy noise; stable in the mean; boundedness

[责任编辑 陈留院 赵晓华]