第 44 卷 第 2 期
2016 年 3 月
河南师范大学学报(自然科学版)
Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition)
Vol.44 No.2
Mar.2016

文章编号:1000-2367(2016)02-0001-08
DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2016.02.001

食饵和捕食者均染病的捕食—被捕食模型的分析

李 爽[a,b], 王小攀[c]

(河南师范大学 a.数学与信息科学学院; b.优化控制河南省工程实验室; c.新联学院, 河南 新乡 453007)

摘 要:讨论一个食饵种群和捕食者种群同时感染疾病的捕食—被捕食模型,且考虑了由捕食者妊娠期引起的时滞.通过分析特征方程,得到了平衡位置的局部稳定和出现 Hopf 分支的条件,并且由此给出了食饵或者捕食者种群灭绝的阈值条件以及种群内部疾病的基本再生数;利用比较定理,研究了边界平衡位置的全局稳定性.

关键词:捕食—被捕食模型;时滞;Hopf 分支;全局渐近稳定性;再生数

中图分类号:O175.1 **文献标志码**:A

1 模型的建立与描述

以 Kermack-Mckendrick 为先驱的流行病动力学受到了很大的关注,数学模型已经成为分析、研究传染病流行与控制的重要工具,但是在这些成果中均假设所讨论的种群与其他种群没有任何联系,即这些流行病模型仅仅是描述了疾病在单个种群中的传播,由此得到了一些结论,然而实际情况却并非如此.在自然界中种群并非单独存在,考虑疾病在多个相互作用的种群之间传播的模型更具有实际意义.在过去的一段时间里,出现了许多研究疾病在食饵种群或捕食者种群中传播的捕食—被捕食模型[1-6],但是考虑疾病在捕食者和食饵两个种群之间传播的论文较少[7-11].Hadeler[8]讨论了寄生虫突破种群限制,使得捕食者和食饵两个种群染病,假设捕食者种群由于捕食染病食饵而感染寄生虫病,而食饵种群由于生存在被染病捕食者污染的环境中从而得病.文章得到了在捕食者和无病食饵共存情况下流行病平衡位置或流行病周期解产生的阈值条件,并且得出结论:疾病的存在有利于捕食者种群的持续生存.文献[9]也考虑了一个两个种群均感染疾病的捕食—被捕食模型,即在食饵种群染病后,考虑到捕食者会与染病食饵接触传染或在其邻近区域内活动而感染疾病,捕食者之间不传播疾病,该文得到了决定种群共存或者疾病流行与否的再生数.Das[10]同样也探讨了一个捕食者和食饵都感染疾病的模型,但是与 Heish[9]不同的是,它假设疾病同时感染食饵和捕食者种群,无病捕食者在捕获染病食饵后,并不会因此感染疾病,另外考虑疾病在两个种群中均发生垂直感染.这种情况在自然界有时也会发生,比如白斑症病毒病(由白斑杆状病毒引起)会在虾的无节幼体期和其他虾之间传播,原因是因为它们以棕囊藻属浮游植物为生,而这些浮游植物会被棕囊藻病毒性疾病感染.另外,文献[12]讨论了一个海洋浮游生态系统,这里浮游植物(比如隐芽植物)和浮游动物(比如轮虫类)均被某些病毒感染.有趣的结果是正常的捕食者在捕食染病食饵后不会感染疾病,这是由于染病食饵细胞内部酶的活动性,使得食饵细胞内病毒的活性减弱,不能感染捕食者种群.文献[10]通过研究模型平衡位置的稳定性,得到了种群的生态再生数、疾病的基本再生数和种群灭绝的阈值条件,这些结论对于疾病的预防与控制有着重要的理论价值.

本文考虑疾病同时感染食饵和捕食者种群的模型,假设整个食饵种群由两部分组成:一类为易感类食饵,记为 $X_1(t)$,另一类为染病类食饵,记为 $X_2(t)$.同理,捕食者种群也分为两类:易感类捕食者、染病类捕食

收稿日期:2015-10-12;**修回日期**:2016-01-21.

基金项目:国家自然科学基金(11371161);河南省教育厅科学技术研究重点项目(14A110019);河南师范大学科研启动费支持课题(qd13043).

第 1 作者简介(通信作者):李 爽(1983—),女,河南南阳人,河南师范大学讲师,博士,主要从事生物数学研究,E-mail:oklishuang@163.com.

者，分别用$Y_1(t)$和$Y_2(t)$表示；假设食饵按照Logistic法则生长，而且仅有易感类食饵$X_1(t)$有生育能力，染病类食饵$X_2(t)$无生育能力，但是对易感食饵种群的负载量仍有影响；假设疾病不发生垂直传染，染病类种群不会再恢复或获得免疫，此处疾病的发生率采用双线性发生率；假设易感类捕食者仅捕食易感类食饵，染病类捕食者无捕食能力，食饵种群向捕食者种群的转化率为$k(0<k\leq 1)$. 与文献[10]不同的是，假设捕食者捕获食饵后能量的转化非即时的，而是一个由妊娠期引起的时滞，由以上的假设，可以写出下面的微分方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}X_1}{\mathrm{d}t}=rX_1(1-\dfrac{X_1+X_2}{K})-\beta X_1X_2-P_1X_1Y_1,\\ \dfrac{\mathrm{d}X_2}{\mathrm{d}t}=\beta X_1X_2-c_1X_2,\\ \dfrac{\mathrm{d}Y_1}{\mathrm{d}t}=kP_1X_1(t-\bar{\tau})Y_1(t-\bar{\tau})-d_1Y_1-\alpha_1Y_1Y_2,\\ \dfrac{\mathrm{d}Y_2}{\mathrm{d}t}=\alpha_1Y_1Y_2-\mathrm{d}_2Y_2,\end{cases}\tag{1}$$

这里r为易感类食饵种群的内禀增长率，K为负载量，β和α_1分别为易感类向染病类转化的发生率系数，c_1为染病类食饵种群的死亡率. d_1,d_2分别代表了易感类捕食者和染病类捕食者种群的死亡率. P_1为捕食者捕获食饵的捕获率，$\bar{\tau}$为由捕食者的妊娠期引起的时滞.

为了简便起见，对系统(1)进行无量纲化：$x_1=\dfrac{X_1}{K}$, $x_2=\dfrac{X_2}{K}$, $y_1=\dfrac{Y_1}{K}$, $y_2=\dfrac{Y_2}{K}$. 记$\omega=\beta Kt$，所以无量纲化后的方程组为下面的形式：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\omega}=ax_1[1-(x_1+x_2)]-x_1x_2-l_1x_1y_1,\\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{d\omega}=x_1x_2-b_1x_2,\\ \dfrac{\mathrm{d}y_1}{d\omega}=kl_1x_1(t-\tau)y_1(t-\tau)-b_2y_1-\alpha y_1y_2,\\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}\omega}=\alpha y_1y_2-b_3y_2,\end{cases}\tag{2}$$

这里$a=\dfrac{r}{\beta K}$, $l_1=\dfrac{P_1}{\beta}$, $b_1=\dfrac{c_1}{\beta K}$, $b_2=\dfrac{d_1}{\beta K}$, $\alpha=\dfrac{\alpha_1}{\beta}$, $b_3=\dfrac{d_2}{\beta K}$, $\tau=\beta K\bar{\tau}$为无量纲化系数，系统(2)的初始化条件为：

$$(\phi_1(\theta),\phi_2(\theta),\varphi_1(\theta),\varphi_2(\theta))\in C_+=C([-\tau,0],R_+^4),\phi_i(0)>0,\varphi_i(0)>0,\ i=1,2.\tag{3}$$

其中$R_+^4=\{(x_1,x_2,y_1,y_2)\in R^4:\ x_i(t)\geq 0,\ y_i(t)\geq 0,\ i=1,2.\}$. 在下文中，为了方便起见，用$t$代表$\omega$.

2 初等结论

定理 1 系统(2)满足初始条件(3)的解对所有的$t\geq 0$都为正的.

定理 2 如果系统(2)的初始条件满足$\phi_1(\theta)+\phi_2(\theta)\geq 1,\theta\in[-\tau,0]$，那么有(i)：对所有的$t\geq 0$，$x_1(t)+x_2(t)\geq 1$，且当$t\to+\infty$时，$(x_1(t),x_2(t),y_1(t),y_2(t))\to(1,0,0,0)$；或者(ii)：存在一个$t_0>0$，使得当$t>t_0$时有$x_1(t)+x_2(t)<1$成立. 如果$\phi_1(\theta)+\phi_2(\theta)<1$, $\theta\in[-\tau,0]$，那么$x_1(t)+x_2(t)<1$对所有的$t\geq 0$都成立.

定理1的证明类似于文献[13]中引理的证明，定理2的证明过程可参考文献[14]，此处略去.

定理 3 存在一个正数M，使得系统(2)的所有正解都满足：对充分大的t，$y_i(t)\leq M\ (i=1,2)$，这里$M=\dfrac{k(a+\xi)^2}{4a\xi}$，$\xi=\min\{b_2,b_3\}$.

证明 令$V(t)=kx_1(t-\tau)+y_1(t)+y_2(t)$，计算$V(t)$沿系统(2)的导数，发现当$t>T+\tau$时，

$$V'(t)=akx_1(t-\tau)[1-x_1(t-\tau)-x_2(t-\tau)]-kx_1(t-\tau)x_2(t-\tau)-b_2y_1(t)-b_3y_2(t)\leq$$

$$akx_1(t-\tau)-akx_1^2(t-\tau)-b_2y_1(t)-b_3y_2(t)\le(ak+\xi k)x_1(t-\tau)-akx_1^2(t-\tau)-b_2y_1(t)-$$

$$b_3y_2(t)-\xi kx_1(t-\tau)\le(ak+\xi k)x_1(t-\tau)-akx_1^2(t-\tau)-\xi V(t)\le\frac{k(a+\xi)^2}{4a}-\xi V(t),$$

这里 $\xi=\min\{b_2,b_3\}$. 由比较定理知当 t 充分大时，$V(t)\le\frac{k(a+\xi)^2}{4a\xi}$. 令 $M=\frac{k(a+\xi)^2}{4a\xi}$，则当 t 充分大时 $y_i(t)\le M$, $(i=1,2)$. 证毕.

3　平衡位置的稳定性和 Hopf 分支

显然系统(2) 有以下的非负平衡位置：

$$E_0(0,0,0,0),\ E_1(1,0,0,0),\ E_{21}\left(b_1,\frac{(1-b_1)}{a+1},0,0\right),$$

$$E_{22}\left(\frac{b_2}{kl_1},0,\frac{\alpha(kl_1-b_2)}{kl_1^2},0\right),E_3(\hat{x}_1,0,\hat{y}_1,\hat{y}_2),\ E^*(x_1^*,x_2^*,y_1^*,y_2^*),$$

这里

$$\hat{x}_1=\frac{a\alpha-l_1b_3}{a\alpha},\hat{y}_1=\frac{b_3}{\alpha},\hat{y}_2=\frac{a\alpha(kl_1-b_2)-kb_3l_1^2}{a\alpha^2},\ x_1^*=b_1,$$

$$x_2^*=\frac{a\alpha-a\alpha b_1-b_3l_1}{\alpha(a+1)},\ y_1^*=\frac{b_3}{\alpha},\ y_2^*=\frac{kl_1b_1-b_2}{\alpha}.$$

当 $b_1<1$ 时，边界平衡位置 E_{21} 存在；当 $b_2<kl_1$ 时，E_{22} 存在；E_3 存在当且仅当 $a\alpha(kl_1-b_2)>kb_3l_1^2$ 成立；正平衡位置 E^* 的存在条件为：$a\alpha(1-b_1)>b_3l_1$，$kl_1b_1>b_2$.

下面通过分析平衡位置相应的特征方程，得到了边界平衡位置局部稳定的充分条件.

定理 4　非负平衡位置 $E_0(0,0,0,0)$ 为不稳定的鞍点；令 $R_1=\frac{kl_1}{b_2}$，当 $R_1<1$ 时，边界平衡位置 $E_1(1,0,0,0)$ 局部渐近稳定，当 $R_1>1$ 时，$E_1(1,0,0,0)$ 为不稳定的；假设 $b_1<1$，令 $R_{21}=\frac{kl_1b_1}{b_2}$，如果 $R_{21}<1$，那么非负平衡位置 $E_{21}\left(b_1,\frac{(1-b_1)}{a+1},0,0\right)$ 局部渐近稳定，否则，E_{21} 不稳定.

此处略去证明.

关于 E_{22} 的特征方程为：

$$\left[\lambda+b_3-\frac{a\alpha(kl_1-b_2)}{kl_2^2}\right]\left(\lambda+b_1-\frac{b_2}{kl_1}\right)\left[\lambda^2+\lambda\left(\frac{ab_2}{kl_1}+b_2\right)+\right.$$

$$\left.\frac{ab_2^2}{kl_1}+e^{-\lambda\tau}\left(-b_2\lambda+\frac{ab_2kl_1-2ab_2^2}{kl_1}\right)\right]=0,$$

易知当 $a\alpha(kl_1-b_2)<kl_1^2b_3$ 成立时，$\lambda=\frac{a\alpha(kl_1-b_2)}{kl_2^2}-b_3=\frac{a\alpha(kl_1-b_2)-kl_1^2b_3}{kl_2^2}$ 为负的，同时 E_3 不存在.

当 $b_2<kl_1b_1$ 时，$\lambda=\frac{b_2}{kl_1}-b_1=\frac{b_2-kl_1b_1}{kl_1}$ 为负的特征值. 其他的特征值均由下面方程的解所决定

$$\lambda^2+\lambda\left(\frac{ab_2}{kl_1}+b_2\right)+\frac{ab_2^2}{kl_1}+e^{-\lambda\tau}\left(-b_2\lambda+\frac{ab_2kl_1-2ab_2^2}{kl_1}\right)=0,\tag{4}$$

为了讨论方程(4) 特征根的分布，我们利用文献[15] 中的结果.

引理 1[15]　考虑方程

$$\lambda^2+a\lambda+b\lambda e^{-\lambda\tau}+c+de^{-\lambda\tau}=0,\tag{5}$$

在(5) 中，假设 $c+d\neq0$，$a^2+b^2+d^2\neq0$，(5) 式的不同虚根的个数可以为 0,1 或者 2.

(1) 若 $c^2>d^2$ 而且 $b^2+2c-a^2<2\sqrt{c^2-d^2}$，那么对所有的 $\tau>0$，(5) 与 $\tau=0$ 时具有相同的稳定性.

(2) 若 $c^2\le d^2$，且当 $\tau=0$ 时(5) 式不稳定，那么对所有的 $\tau>0$，它均为不稳定的. 如果当 $\tau=0$ 时(5) 为稳定的，那么当 $\tau\in[0,\tau_{0,1})$，(5) 稳定；当 $\tau>\tau_{0,1}$ 时，(5) 不稳定，这里 $\tau_{0,1}=\theta_1/\omega_+$，$\theta_1\in[0,2\pi]$，$\omega_+>0$，

$$\omega_+^2 = \frac{1}{2}\{(b^2+2c-a^2)+[(b^2+2c-a^2)^2-4(c^2-d^2)]^{1/2}\},$$

$$\cos\theta_1 = -\frac{ab\omega_+^2+d(c-\omega_+^2)}{d^2+b^2\omega_+^2},\ \sin\theta_1 = \frac{ad\omega_+-b\omega_+(c-\omega_+^2)}{d^2+b^2\omega_+^2}.$$

(3) 若 $c^2>d^2$ 且 $b^2+2c-a^2>2\sqrt{c^2-d^2}$,那么(5) 的稳定性将随着 τ 的增加改变有限次,当 τ 充分大时,它变为不稳定的,特别地,如果当 $\tau=0$ 时(5) 稳定,那么当 $\tau<\tau_{0,1}$ 时它仍为稳定的.

把 $\tau=0$ 代入(4),得到 $\lambda^2+\lambda\frac{ab_2}{kl_1}+\frac{ab_2(kl_1-b_2)}{kl_1}=0$,显然当 $\tau=0$ 时,平衡位置 E_{22} 为局部渐近稳定的.

把(4) 改写为:$\lambda^2+m_1\lambda+n_1+m_2\lambda e^{-\lambda\tau}+n_2e^{-\lambda\tau}=0$, 这里

$$m_1=\frac{ab_2}{kl_1}+b_2,\ n_1=\frac{ab_2^2}{kl_1},\ m_2=-b_2,\ n_2=\frac{ab_2kl_1-2ab_2^2}{kl_1}.$$

容易验证 $n_1^2-n_2^2=\frac{a^2b_2^2}{k^2l_1^2}[b_2^2-(kl_1-2b_2)^2]=-\frac{a^2b_2^2}{k^2l_1^2}(kl_1-b_2)(kl_1+4b_2)<0.$

由引理 1,我们能够得到下面关于平衡位置 E_{22} 稳定性的结果.

定理 5 设 $R_1>1$,定义 $R_{22}=\frac{a\alpha(kl_1-b_2)}{kl_1^2b_3}$,

(i) 如果 $R_{22}>1$ 或者 $R_{21}<1$ 成立,那么边界平衡位置 $E_{22}\left(\frac{b_2}{kl_1},0,\frac{a(kl_1-b_2)}{kl_1^2},0\right)$为不稳定的.

(ii) 如果 $R_{22}<1$ 且 $R_{21}>1$ 成立,那么存在一个正值 τ_0 使得当 $0\le\tau<\tau_{0,1}$ 时平衡位置 E_{22} 为局部渐近稳定的;当 $\tau>\tau_{0,1}$ 时,E_{22} 不稳定,这里 $\tau_{0,1}=\theta_1/\omega_+$,$\theta_1\in[0,2\tau]$,$\omega_+>0$,

$$\omega_+^2=\frac{1}{2}\{(m_2^2+2n_1-m_1^2)+[(m_2^2+2n_1-m_1^2)^2-4(n_1^2-n_2^2)]^{1/2}\},$$

$$\cos\theta_1=-\frac{m_1m_2\omega_+^2+n_2(n_1-\omega_+^2)}{n_2^2+m_2^2\omega_+^2},\ \sin\theta_1=\frac{m_1n_2\omega_+-m_2\omega_+(n_1-\omega_+^2)}{n_2^2+m_2^2\omega_+^2}.$$

下面利用引理 2 来讨论平衡位置 E_3 的稳定性.

引理 2 对于方程 $h(z)=z^3+az^2+bz+c$, $c>0$,

(1) 如果 $a^2-3b\le 0$,那么 $h(z)=0$ 无正根;(2) 如果 $a>0$, $b>0$,那么 $h(z)=0$ 无正根;(3) 如果 $a^2-3b>0$, $b>0$, $a<0$,那么 $h(z)=0$ 可能有正根;(4) 如果 $b<0$,那么 $h(z)=0$ 可能有正根;(5) 当 $h(z)=0$ 可能有正根时,如果 $2a^3-9ab-2(a^2-3b)^3/2+27c<0$ 成立,那么 $h(z)=0$ 有两个正根存在.

平衡位置 E_3 的特征方程为:

$$\left(\lambda+b_1-\frac{a\alpha-l_1b_3}{a\alpha}\right)[\lambda^3+\lambda^2(a\hat{x}_1+kl_1\hat{x}_1)+\lambda(akl_1\hat{x}_1^2+\alpha^2\hat{y}_1\hat{y}_2)+a\alpha^2\hat{x}_1\hat{y}_1\hat{y}_2+$$
$$e^{-\lambda\tau}(-kl_1\hat{x}x_1\lambda^2+\lambda(kl_1^2\hat{x}_1\hat{y}_1-akl_1\hat{x}_1^2))]=0.$$

显然当 $a\alpha(1-b_1)<b_3l_1$ 时,特征值 $\lambda=\frac{a\alpha-l_1b_3-b_1a}{a\alpha}$ 为负的,同时正平衡位置 E^* 不存在. 其他的特征值由下面方程的解所决定:

$$\lambda^3+\lambda^2(a\hat{x}_1+kl_1\hat{x}_1)+\lambda(akl_1\hat{x}_1{}^2+\hat{x}^2\hat{y}_1\hat{y}_2)+a\alpha^2\hat{x}_1\hat{y}_1\hat{y}_2+$$
$$e^{-\lambda\tau}(-kl_1\hat{x}_1\lambda^2+\lambda(kl_1^2\hat{x}_1\hat{y}_1-akl_1\hat{x}_1^2))=0. \tag{6}$$

将 $\tau=0$ 代入(6),得

$$\lambda^3+a\hat{x}x_1\lambda^2+\lambda(\alpha^2\hat{y}_1\hat{y}_2+kl_1{}^2\hat{x}_1\hat{y}_1)+a\hat{x}^2\hat{x}_1\hat{y}_1\hat{y}_2=0, \tag{7}$$

由 Routh-Hurwitz 法则,知道方程(7) 所有的根均有负实部,也就是说,当 $a\alpha(1-b_1)<b_3l_1$,$\tau=0$ 时平衡位置 E_3 为局部渐近稳定的.

将方程(6) 改写为:

$$\lambda^3+g_2\lambda^2+g_1\lambda+g_0+e^{-\lambda\tau}(h_2\lambda^2+h_1\lambda)=0, \tag{8}$$

这里 $g_2=a\hat{x}x_1+kl_1\hat{x}_1$, $g_1=akl_1\hat{x}_1{}^2+\hat{x}^2\hat{y}_1\hat{y}_2$, $g_0=a\hat{x}^2\hat{x}_1\hat{y}_1\hat{y}_2$, $h_2=-kl_1\hat{x}_1$, $h_1=kl_1{}^2\hat{x}_1\hat{y}_1-akl_1\hat{x}_1{}^2$.

如果 $i\omega$ 为方程(8) 的一个解,分离实部虚部,得到下面的结果:

$$-g_2\omega^2+g_0=h_2\omega^2\cos\omega\tau-h_1\omega\sin\omega\tau,$$
$$\omega^3-g_1\omega=h_1\omega\cos\omega\tau+h_2\omega^2\sin\omega\tau. \tag{9}$$

将方程(9) 两边平方相加，得：

$$\omega^6+\omega^4(g_2^2-2g_1-h_2^2)+\omega^2(g_1^2-2g_0g_2-h_1^2)+g_0^2=0. \tag{10}$$

在下文中假设方程(10) 的系数满足引理 2 中的条件(3)、(5) 或者(4)、(5)，那么方程(10) 有两个正根，记为 ω_i，$i=1,2$. 这意味着特征方程(8) 有两对纯虚根 $\pm\omega_k(k=1,2)$. 由(9) 可知与 ω_k 对应的 τ_{kn} 为

$$\tau_{kn}=\frac{1}{\omega_k}\arccos\left\{\frac{h_2(g_0-g_2\omega^2)+h_1(\omega^2-g_1)}{h_2^2\omega^2+h_1^2}\right\}+\frac{2n\pi}{\omega_k},\ k=1,2.\ n=0,1,2,\cdots,$$

令 $\tau_0=\tau_{k0}=\min\{\tau_10,\tau_{20}\},\omega_0=\omega_{k0}$.

现在对方程(8) 关于 τ 求导，得

$$\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1}=\frac{3\lambda^2+2g_2\lambda+g_1}{\lambda\mathrm{e}^{-\lambda\tau}(h_2\lambda^2+h_1\lambda)}+\frac{2h_2\lambda+h_1}{\lambda(h_2\lambda^2+h_1\lambda)}-\frac{\tau}{\lambda}=$$
$$\frac{3\lambda^2+2g_2\lambda+g_1}{-\lambda(\lambda^3+g_2\lambda^2+g_1\lambda+g_0)}+\frac{2h_2\lambda+h_1}{\lambda(h_2\lambda^2+h_1\lambda)}-\frac{\tau}{\lambda},$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{Re}\lambda)}{\mathrm{d}\tau}\bigg|_{\lambda=\mathrm{i}\omega_0}=\left\{\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1}\right\}\bigg|_{\lambda=\mathrm{i}\omega_0}=\mathrm{Re}\left\{\frac{3\lambda^2+2g_2\lambda+g_1}{-\lambda(\lambda^3+g_2\lambda^2+g_1\lambda+g_0)}\right\}\bigg|_{\lambda=\mathrm{i}\omega_0}=+$$
$$\mathrm{Re}\left\{\frac{2h_2\lambda+h_1}{\lambda(h_2\lambda^2+h_1\lambda)}\right\}\bigg|_{\lambda=\mathrm{i}\omega_0}=\frac{(g_1-3\omega_0^2)(g_1-\omega_0^2)+2g_2(g_2\omega_0^2-g_0)}{(g_1\omega_0-\omega_0^3)^2+(g_2\omega_0^2-g_0)^2}-\frac{h_1^2+2h_2^2\omega_0^2}{\omega_0^2(h_1^2+h_2^2\omega_0^2)}=$$
$$\frac{h_2^2\omega_0^8+2h_1^2\omega_0^6+\omega_0^4(g_2^2h_1^2-2h_1^2g_1+2g_2g_0h_2^2-h_2^2g_1^2)-2g_0^2h_2^2\omega_0^2-g_0^2h_1^2}{[(g_1\omega_0-\omega_0^3)^2+(g_2\omega_0^2-g_0)^2]\omega_0^2(h_1^2+h_2^2\omega_0^2)},$$

假设(H)：$h_2^2{\omega_0}^8+2h_1^2{\omega_0}^6+\omega_0^4(g_2^2h_1^2-2h_1^2g_1+2gg_{02}h_2^2-h_2^2g_1^2)-2g_0^2h_2^2\omega_0^2-g_0^2h_1^2\neq0$.

下面利用阮和魏[16] 的结果来分析方程(8)，为了方便讨论，先将文献[16] 的结果陈述如下.

引理 3[16]　考虑指数多项式

$$P(\lambda,\mathrm{e}^{-\lambda\tau_1},\cdots,\mathrm{e}^{-\lambda\tau_m})=\lambda^n+p_1^{(0)}\lambda^{n-1}+\cdots+p_{n-1}^{(0)}+p_n^{(0)}+$$
$$[p^{(1)}{}_1\lambda^{n-1}+\cdots+p_{n-1}^{(1)}\lambda+p_n^{(1)}]\mathrm{e}^{-\lambda_1}+\cdots+[p_1^{(m)}\lambda^{n-1}+\cdots+p_{n-1}^{(m)}\lambda+p_n^{(m)}]\mathrm{e}^{-\lambda\tau_m},$$

这里 $\tau_i\geq0\ (i=1,2,\cdots,m)$，$p_j^{(i)}\ (i=0,1,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 为常数. 当$(\tau_1,\ \tau_2,\cdots,\tau_m)$ 改变时，$P(\lambda,\mathrm{e}^{-\lambda\tau_1},\cdots\cdots,\mathrm{e}^{-\lambda\tau_m})$ 的零根的重数的和会发生改变当且仅当在右半开平面有一个零根出现或穿过虚轴.

由引理 2、引理 3，得到下面的定理.

定理 6　设 $R_{22}>1$，定义 $R_3=\dfrac{a\alpha(1-b_1)}{b_3l_1}$，

(1) 如果 $R_3>1$，那么平衡位置 $E_3(\hat{x}_1,0,\hat{y}_1,\hat{y}_2)$ 为不稳定的.

(2) 如果 $R_3<1$，且方程(10) 的系数满足引理 2 的(1) 或者(2)，那么对所有的 $\tau>0$，非负平衡位置 E_3 都为局部稳定的.

(3) 如果 $R_3<1$，且方程(10) 的系数满足引理 2 的(3)、(5) 或者(4)、(5)，另外，(H) 成立，那么当 $\tau\in[0,\tau_0)$ 时平衡位置 E_3 为局部渐近稳定的；当 $\tau=\tau_0$ 系统(2) 在 E_3 处产生 Hopf 分支.

下面利用比较定理以及引理 4，讨论边界平衡位置的全局稳定性.

引理 4[14]　考虑下面的方程 $\hat{x}(t)=ax(t-\tau)-bx(t)$，这里 ——$b$ 和 τ 均为正常数，当 $t\in[-\tau,0]$ 时 $x(t)>0$，有

(i) 如果 $a>b$，那么 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=+\infty$；

(ii) 如果 $a<b$，那么 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$.

定理 7　如果 $R_1<1$ 且 $b_1\geq1$，那么非负平衡位置 $E_1(1,0,0,0)$ 为全局渐近稳定的.

证明　由定理 4，知道如果 $R_1<1$，E_1 为局部渐近稳定的. 下面证明平衡位置 E_1 的全局吸引性. 根据定理 2 的结论，由初始条件(3) 满足条件不同，模型(2) 的解可分为两种情况：

(I) 对于所有的 $t\geq0$，成立 $x_1(t)+x_2(t)\geq1$ 且当 $t\to+\infty$ 时，$(x_1(t),x_2(t),y_1(t),y_2(t))\to(1,0,0,$

0),即此时平衡位置 E_1 为全局吸引的.

(II) 存在 $t_0>0$,当 $t>t_0$ 时(或对所有的 $t\geq 0$),满足 $x_1(t)+x_2(t)<1$. 此时显然 $\lim\sup\limits_{t\to+\infty}x_i(t)\leq 1$, $i=(1,2)$. 由模型(2) 的第 3 个方程知当 $t>T+\tau$ 时,

$$y_1'(t)=kl_1x_1(t-\tau)y_1(t-\tau)-b_2y_1(t)-\alpha y_1(t)y_2(t)\leq kl_1y_1(t-\tau)-b_2y_1(t).$$

由引理 4,可得 $\lim\limits_{t\to\infty}y_1(t)=0$. 对充分小的 $\varepsilon_1>0$ 且满足 $\alpha\varepsilon_1<b_3$,存在 $T_1>T+\tau$ 使得当 $t>T_1$, $y_1(t)<\varepsilon_1$.

因此由模型(2) 的第 4 个方程可得,当 $t>T_1$ 时 $y_2'(t)\leq y_2(t)(\alpha\varepsilon_1-b_3)$,由比较定理知 $\lim\limits_{t\to\infty}y_2(t)=0$.

由模型(2) 的第 2 个方程知当 $t>T$ 时 $x_2'(t)<x_2(t)(1-b_1)$.

同理可得 $\lim\limits_{t\to\infty}x_2(t)=0$. 因此对充分小的 $\varepsilon_2>0$,存在 $T_2>T_1$ 使得当 $t>T_2$, $x_2(t)<\varepsilon_2$.

当 $t>T_2$ 时,由模型(2) 的第 1 个方程得:

$$x_1'(t)\geq x_1(t)[a-(a+1)\varepsilon_2-l_1\varepsilon_1-ax_1(t)],$$

考虑下面的辅助方程

$$u'(t)=u(t)[a-(a+1)\varepsilon_2-l_1\varepsilon_1-au(t)],$$

易知 $\lim\limits_{t\to\infty}u(t)=\dfrac{a-(a+1)\varepsilon_2-l_1}{\varepsilon_1a}$. 由比较定理,得到

$$\lim_{t\to\infty}\inf x_1(t)\geq\frac{a-(a+1)\varepsilon_2-l_1\varepsilon_1}{a}.$$

由 ε_2 和 ε_1 的任意性,得 $\lim\limits_{t\to\infty}\inf x_1(t)\geq 1$. 因此有 $\lim\limits_{t\to\infty}x_1(t)=1$. 证毕.

定理 8 如果 $R_{21}<1$ 且 $b_1<1$,那么边界平衡位置 $E_{21}\left(b_1,\dfrac{a(1-b_1)}{a+1},0,0\right)$ 为全局渐近稳定的.

证明 显然在本定理的条件下 E_{21} 为局部渐近稳定的,下面只需证明它的全局吸引性. 类似于定理 7 的证明,可得 $\lim\limits_{t\to\infty}y_1(t)=0$, $\lim\limits_{t\to\infty}y_2(t)=0$. 对充分小的 $\varepsilon>0$ 且满足 $l_1\varepsilon(1-b_1)$,存在 $T_3>0$ 使得当 $t>T_3$ 时有 $-\varepsilon<y_1(t)<\varepsilon$.

考虑比较方程组

$$\begin{cases}lu_1'(t)=au_1(t)[1-(u_1(t)+u_2(t))]-u_1(t)u_2(t)+l_1\varepsilon u_1(t),\\ u_2'(t)=u_1(t)u_2(t)-bu_{12}(t),\end{cases}\tag{11}$$

和

$$\begin{cases}lv_1'(t)=av_1(t)[1-(v_1(t)+v_2(t))]-v_1(t)v_2(t)-l_1\varepsilon v_1(t)\\ v_2'(t)=v_1(t)v_2(t)-b_1v_2(t)\end{cases},\tag{12}$$

显然,点 $\left(b_1,\dfrac{a(1-b_1)+l_1\varepsilon}{a+1}\right)$ 为模型(11) 唯一的正的全局稳定平衡点,由比较定理,有

$$\lim_{t\to\infty}\sup x_1(t)\leq b_1,\lim_{t\to\infty}\sup x_2(t)\leq\frac{a(1-b_1)+l_1\varepsilon}{a+1},$$

同理,由模型(12) 得到以下的结果:

$$\lim_{t\to\infty}\inf x_1(t)\geq b_1,\lim_{t\to\infty}\inf x_2(t)\geq\frac{a(1-b_1)-l_1\varepsilon}{a+1}.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性,可得 $\lim\limits_{t\to\infty}x_1(t)=b_1$, $\lim\limits_{t\to\infty}x_2(t)=\dfrac{a(1-b_1)}{a+1}$. 定理证毕.

4 结 论

结合参数的生物背景以及再生数的表达式,对每个再生数均进行分析探讨. 根据定理 4 的结论,$R_1=\dfrac{kl_1}{b_2}$ 决定了模型(2) 的边界平衡位置 $E_1(1,0,0,0)$ 的全局稳定性,这里 $R_1=\dfrac{kl_1}{b_2}=\dfrac{kP_1K}{d_1}$,模型(2) 的边界平衡位

置 $E_1(1,0,0,0)$ 对应原模型(1) 的平衡位置$(K,0,0,0)$，此处 kP_1K 表示在平衡位置$(K,0,0,0)$ 新生易感捕食者的出生率，$\frac{1}{d_1}$ 为易感捕食者的寿命，因此 $R_1=\frac{P_1K}{d_1}$ 可以理解为易感捕食者在平衡位置$(K,0,0,0)$ 处的生态再生数. 后面为了简便起见，就不再代回原模型(1) 的参数，可做出类似的结论. $R_{21}=\frac{kl_1b_1}{b_2}$ 的大小是非负平衡位置 $E_{21}(b_1,\frac{(1-b_1)}{a+1},0,0)$ 全局渐近稳定的阈值条件，同理可以认为 $R_{21}=kl_1b_1\frac{1}{b_2}$ 是易感捕食者在平衡位置 $E_{21}(b_1,\frac{(1-b_1)}{a+1},0,0)$ 处的生态再生数. 定理 5 中的 $R_{22}=\frac{a\alpha(kl_1-b_2)}{kl_1^2b_3}$，对于边界平衡位置 $E_{22}(\frac{b_2}{kl_1},0,\frac{(kl_1-b_2)}{kl_1^2},0)$ 的稳定性起着至关重要的作用，这里 $R_{22}=\frac{(kl_1-b_2)}{kl_1^2}\alpha\frac{1}{b_3}$，其中$\frac{a(kl_1-b_2)}{kl_1^2}$ 为在平衡位置 E_{22} 新增的染病捕食者的数量，$\frac{1}{b_3}$ 为染病捕食者的寿命，即 R_{22} 可以理解为在平衡位置 E_{22} 处染病捕食者的疾病再生数. 下面对本文中的结论总结如下：

当 $R_1<1$ 且 $b_1\geq 1$ 时，平衡位置 $E_1(1,0,0,0)$ 全局渐近稳定，疾病不再流行，捕食者种群灭亡；当 $R_1>1$ 时，E_1 不稳定. 对于平衡位置 $E_{21}(b_1,\frac{(1-b_1)}{a+1},0,0)$ 来说，当 $b_1<1$ 时，E_{21} 存在，此时若 $R_{21}<1$，E_{21} 全局渐近稳定，疾病在食饵种群中流行，捕食者种群灭绝；若 $R_{21}>1$，则 E_{21} 不稳定. 当 $R_1>1$ 时，平衡位置 $E_{22}(\frac{b_2}{kl_1},0,\frac{a(kl_1-b_2)}{kl_1^2},0)$ 存在，若 $R_{22}<1$，$R_{21}>1$ 且 $0\leq\tau<\tau_0$，1 时，E_{22} 为局部渐近稳定的，疾病不在整个生态种群中流行；反之若 $R_{22}<1$，$R_{21}>1$ 且 $\tau>\tau_0$，1 时，E_{22} 不稳定；另外，当 $R_{22}>1$ 或者 $R_{21}<1$ 时，E_{22} 也是不稳定的. 平衡位置 $E_3(\hat{x}_1,0,\hat{y}_1,\hat{y}_2)$ 在 $R_{22}>1$ 时存在，此时在 $R_3<1$ 和其他条件保证下，E_3局部渐近稳定，疾病在食饵种群中消亡；反之 $R_3>1$ 时，E_3 不稳定，此刻若 $R_{21}>1$，正平衡位置 $E^*(x_1^*,x_2^*,y_1^*,y_2^*)$ 存在.

参 考 文 献

[1] Chattopadhyay J, Arino O. A predator-prey model withdisease in the prey[J]. Nonlinear Anal, 1999, 36: 749-766.

[2] Das K P. Alternative food and external source of infection stabilize predator-prey oscillations-a conclusion drawn from an eco-epidemiological model[J]. Int J Biomath, 2015, 8(3): 83-107.

[3] Das K P. A study of chaotic dynamics and its possible control in a predator-prey model with disease in the predator[J]. J Dyn Control Syst, 2015, 21(4): 605-624.

[4] Biswas S, Sasmal S K, Samanta S, et al. A delayed eco-epidemiological system with infected prey and predator subject to the weak Allee effect[J]. Math Biosci, 2015, 263: 198-208.

[5] Biswas S, Samanta S, Chattopadhyay J. Cannibalistic predator-prey model with disease in predator-a delay model[J]. Int J Bifurcat Chaos, 2015, 25(10): 130-155.

[6] Biswas S, Chatterjee S, Chattopadhyay J. Cannibalism may control disease in predator population: result drawn from a model based study[J]. Math Method Appl Sci, 2015, 38(11): 2272-2290.

[7] Han L, Ma Z, Hethcote H W. Four predator prey models with infectious diseases[J]. Math Comp Model, 2001, 34: 849-858.

[8] Hadeler K P, Freedman H I. Predator-prey populations with parasitic infection[J]. J Math Biol, 1989, 27: 609-631.

[9] Heish Y H, Hsiao C K. Predator-prey model with disease infection in both populations[J]. Math Med Biol, 2008, 25: 247-266.

[10] Das K P, Kundu K, Chattopadhyay J. A predator-prey mathematical model with both the populations affected by diseases[J]. Ecol Compl, 2011, 8: 68-80.

[11] Das K P, Chattopadhyay J. A mathematical study of a predator prey model with disease circulating in the both populations[J]. Int J Biomath, 2015, 8(2): 1-27.

[12] Fuhrman Jed A, Suttle Curtis A. Viruses in marine planktonic systems[J]. Oceanography, 1993, 6: 51-63.

[13] Yang X, Chen L S, Chen J F. permanence andpositive periodic solution for the single-species nonautonomousdiffusive model[J]. Comput Math Appl, 1996, 32: 109.

[14] Xiao Y, Chen L. Modeling and analysis of apredator-prey model with disease in the prey[J]. Math Biosci, 2001, 171: 59-82.

[15] Kuang Y, SO J W H. Analysis of a delayed two-stagepopulation with space-limited recruitment[J]. SIAM J Appl Math, 1995, 55:

1675-1695.

[16] Ruan S, Wei J. On the zeros of transcendentalfunctions with applications to stability of delay differentialequations with two delays[J]. Dyn Contin Discrete Impuls Syst Ser AMath Anal, 2003, 10:863-874.

A Predator-prey Model with Disease in Prey and Predator

LI Shuang[a,b], WANG Xiaopan[c]

(a. College of Mathematics and Information Science; b. Henan Engineering Laboratory of Big Data Statistical Analysis and Optical Control; c. College of Xinlian, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

Abstract: In this paper, we discuss a predator-prey model with populations affected by disease and the time delay caused by pregnant period of predator population is considered. By analyzing the characteristic equation, sufficient conditions are derived for the local stability and Hopf bifurcation of the boundary equilibria, thus, threshold conditions of extinction for prey and predator populationsand the basic reproductive number of disease for populations can be obtained. By comparison theorem, criterion is established for the global stability of some boundary equilibria.

Keywords: predator-prey model; time delay; Hopf bifurcation; global asymptotic stability; the reproductive number