

Lorentz 空间形式中类空超曲面的一个空隙定理

张树邦, 姬秀

(北京理工大学 数学与统计学院, 北京 100081)

摘要: 设 M^n 是 $(n+1)$ 维 Lorentz 空间形式 $M_1^{n+1}(c)$ 中无脐点类空超曲面. 在 $M_1^{n+1}(c)$ 的共形变换群下, M^n 上的 3 个基本的共形不变量分别是: 共形 1-形式 C , 共形 2-张量 Λ , 共形度量 g . 用 κ 表示共形法化数量曲率, $\tilde{\Lambda} = \Lambda - \frac{1}{n} \text{tr}(\Lambda)g$ 表示无迹共形 2-张量, 主要证明了一个空隙定理.

关键词: 共形度量; 共形第二基本形式; 共形 2-张量

中图分类号: O186.1

文献标志码: A

1 主要结果

在微分几何里, 一个有趣的现象是某些逐点定义的几何不变量的模长存在一些空隙. 例如, 球面中紧致极小超曲面的第二基本形式的模长存在空隙, 这就是著名的 Chern 猜想. 在 Möbius 几何里, 胡泽军教授和李海中教授证明了下面的空隙定理.

定理 1^[1] 设 $x: M^m \rightarrow S^n$ 是 $m(m \geq 3)$ 维 Möbius 形式为零且具有常 Möbius 法化数量曲率 $\kappa (\geq \frac{m-2}{m^2})$ 的紧致子流形. 则有 $\int_M \|\tilde{\Lambda}\|^2 [\|\tilde{\Lambda}\| - \sqrt{\frac{m-1}{m}} (\frac{m}{m-2}\kappa - \frac{1}{m})] dM \geq 0$. 若 $0 \leq \|\tilde{\Lambda}\| \leq \sqrt{\frac{m-1}{m}} (\frac{m}{m-2}\kappa - \frac{1}{m})$, 则要么 $\|\tilde{\Lambda}\| \equiv 0$ 且子流形 $x(M)$ 是 Möbius 等价于具有常数量曲率的极小子流形; 要么 $\|\tilde{\Lambda}\| = \sqrt{\frac{m-1}{m}} (\frac{m}{m-2}\kappa - \frac{1}{m})$ 且子流形 $x(M)$ 是 Möbius 等价于 $S^{m+1}(\frac{1}{\sqrt{1+c^2}})$ 中的 $S^1(r) \times S^{m-1}(\sqrt{\frac{1}{1+c^2} - r^2})$, 其中常数 $c \geq 0, r = \sqrt{\sqrt{\frac{m\kappa}{(m-2)(1+c^2)}}$.

本文研究 Lorentz 空间形式中类空超曲面的共形不变量的空隙.

设 \mathbf{R}_s^{n+2} 是按以下方式定义内积的 Lorentz 空间: $\langle X, Y \rangle_s = - \sum_{i=1}^s x_i y_i + \sum_{j=s+1}^{n+2} x_j y_j$.

对 $a > 0$, 定义标准球 $\mathcal{S}^{n+1}(a)$, 双曲空间 $\mathcal{H}^{n+1}(-a)$, de sitter 空间 $\mathcal{S}_1^{n+1}(a)$ 和 anti-desitter 空间 $\mathcal{H}_1^{n+1}(-a)$ 分别为:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{n+1}(a) &= \{x \in \mathbf{R}^{n+2} \mid x \cdot x = a^2\}, \mathcal{H}^{n+1}(-a) = \{x \in \mathbf{R}_1^{n+2} \mid \langle x, x \rangle_1 = -a^2\}, \\ \mathcal{S}_1^{n+1}(a) &= \{x \in \mathbf{R}_1^{n+2} \mid \langle x, x \rangle_1 = a^2\}, \mathcal{H}_1^{n+1}(-a) = \{x \in \mathbf{R}_2^{n+2} \mid \langle x, x \rangle_2 = -a^2\}. \end{aligned}$$

设 $M_1^{n+1}(c)$ 是 Lorentz 空间形式. 当 $c = 0$ 时, $M_1^{n+1}(c) = \mathbf{R}_1^{n+1}$; $c = 1$ 时, $M_1^{n+1}(c) = \mathcal{S}_1^{n+1}(1)$; $c = -1$ 时, $M_1^{n+1}(c) = \mathcal{H}_1^{n+1}(-1)$.

对 Lorentz 空间形式 $M_1^{n+1}(c)$, 存在共形紧致化空间 \mathcal{Q}_1^{n+1} . 利用 \mathcal{Q}_1^{n+1} , 研究 $M_1^{n+1}(c)$ 中类空超曲面的共形

几何. 在类空超曲面上定义共形度量 g , 共形第二基本形式 B , 共形形式 C 和共形 2-张量 A . 记 $\tilde{A} = A - \frac{1}{n}\text{tr}(A)g$, 用 κ 表示共形法化数量曲率. 本文主要结果见定理 2.

定理 2 设 $x: M^n \rightarrow M_1^{n+1}(c)$ 是 $n(n \geq 3)$ 维共形形式为零的无脐类空超曲面, 它的法化数量曲率满足 $\kappa \geq \frac{2-n}{n^2}$. 若 $\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} \|\tilde{A}\| \leq n\kappa + \frac{n-2}{n}$, 则 κ 为常数且 $\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} \|\tilde{A}\| = n\kappa + \frac{n-2}{n}$.

并且 M^n 共形等价于下列类空超曲面之一:

- (1) $\mathcal{S}^1(\sqrt{a^2+1}) \times \mathcal{H}^{n-1}(-a) \subset \mathcal{S}_1^{n+1}(1), a > 0$;
- (2) $\mathcal{H}^1(-a) \times \mathcal{H}^{n-1}(-\sqrt{1-a^2}) \subset \mathcal{H}_1^{n+1}(-1), 0 < a < 1$;
- (3) $\mathcal{H}^1(-a) \times \mathbf{R}^{n-1} \subset \mathbf{R}_1^{n+1}, a > 0$;
- (4) $\mathcal{H}_1^{n+1}(-1)$ 中具有常数量曲率的极大类空超曲面.

注 定理 2 中的法化数量曲率不需要是常数的条件.

2 类空超曲面的共形几何

本节给出类空超曲面的共形不变量及结构方程, 更详细的内容可参考文献[3].

用 C^{n+2} 表示 \mathbf{R}_2^{n+3} 中的光锥, \mathcal{Q}_1^{n+1} 表示 $\mathbf{R}P^{n+2}$ 中去顶光锥的共形紧致化空间,

$$C^{n+2} = \{X \in \mathbf{R}_2^{n+3} \mid \langle X, X \rangle_2 = 0, X \neq 0\},$$

$$\mathcal{Q}_1^{n+1} = \{[X] \in \mathbf{R}P^{n+2} \mid \langle X, X \rangle_2 = 0\}.$$

设 $O(n+3, 2)$ 是 \mathbf{R}_2^{n+3} 的保持 Lorentz 内积 $\langle X, Y \rangle_2$ 不变的 Lorentz 群. 则 $O(n+3, 2)$ 是 \mathcal{Q}_1^{n+1} 上的一个变换群, 其作用如下,

$$T([X]) = [XT], X \in C^{n+2}, T \in O(n+3, 2).$$

拓扑上 \mathcal{Q}_1^{n+1} 等同于配有标准 Lorentz 度量 $h = g_{S^k} \oplus (-g_{S^1})$ 的紧致空间 $S^n \times S^1/S^0$, 其中 g_{S^k} 表示 k -维球 S^k 上的标准度量. 则 \mathcal{Q}_1^{n+1} 有共形度量

$$[h] = \{e^\tau h \mid \tau \in C^\infty(\mathcal{Q}_1^{n+1})\}$$

且 $[O(n+3, 2)]$ 是 \mathcal{Q}_1^{n+1} 的共形变换群(见文献[2]).

记 $P = \{[X] \in \mathcal{Q}_1^{n+1} \mid x_1 = x_{n+2}\}$, $P_- = \{[X] \in \mathcal{Q}_1^{n+1} \mid x_{n+2} = 0\}$, $P_+ = \{[X] \in \mathcal{Q}_1^{n+1} \mid x_1 = 0\}$, 定义如下共形微分同胚,

$$\sigma_0: \mathbf{R}_1^{n+1} \rightarrow \mathcal{Q}_1^{n+1} \setminus P, u \mapsto \left[\left(\frac{\langle u, u \rangle_1 + 1}{2}, u, \frac{\langle u, u \rangle_1 - 1}{2} \right) \right],$$

$$\sigma_1: \mathcal{S}_1^{n+1}(1) \rightarrow \mathcal{Q}_1^{n+1} \setminus P_+, u \mapsto [(1, u)],$$

$$\sigma_{-1}: \mathcal{H}_1^{n+1}(-1) \rightarrow \mathcal{Q}_1^{n+1} \setminus P_-, u \mapsto [(u, 1)].$$

称 \mathcal{Q}_1^{n+1} 为 \mathbf{R}_1^{n+1} , $\mathcal{S}_1^{n+1}(1)$, $\mathcal{H}_1^{n+1}(-1)$ 的共形紧致化空间.

设 $x: M^n \rightarrow M_1^{n+1}(c)$ 是类空超曲面. 利用 σ_c , 可以得到 \mathcal{Q}_1^{n+1} 中的超曲面 $\sigma_c \circ x: M^n \rightarrow \mathcal{Q}_1^{n+1}$. 由文献[2]可得定理 3.

定理 3 $x, \bar{x}: M^n \rightarrow M_1^{n+1}(c)$ 共形等价的充要条件是存在 $T \in O(n+3, 2)$ 使得

$$\sigma_c \circ x = T(\sigma_c \circ \bar{x}): M^n \rightarrow \mathcal{Q}_1^{n+1}.$$

设 $x: M^n \rightarrow M_1^{n+1}(c)$ 是类空超曲面, 则 $(\sigma_c \circ x)_*(TM^n)$ 是 $T\mathcal{Q}_1^{n+1}$ 的正定子丛. 任给标准投射 $\pi: C^{n+2} \rightarrow \mathcal{Q}_1^{n+1}$ 的局部提升 Z , 存在 $\sigma_c \circ x: M \rightarrow \mathcal{Q}_1^{n+1}$ 的局部提升 $y = Z \circ \sigma_c \circ x: U \rightarrow C^{n+1}$. 因此 $\langle dy, dy \rangle_2 = \rho^2 \langle dx, dx \rangle_s$ 是局部度量, 其中 $\rho \in C^\infty(U)$. 用 Δ 和 κ 分别表示相应于局部度量 $\langle dy, dy \rangle_2$ 的拉普拉斯和法化数量曲率. 类似于文献[3]中定理 1.2 的证明, 可得定理 4.

定理 4 设 $x: M^n \rightarrow M_1^{n+1}(c)$ 是类空超曲面, 则 $g = -(\langle \Delta y, \Delta y \rangle_2 - n^2 \kappa) \langle dy, dy \rangle_2$ 是一个整体定义的共形不变量, 且 g 在非脐点处是正定的.

称 g 为类空超曲面 M^n 的共形度量. 存在唯一的提升

$$Y: M \rightarrow C^{n+2}$$

使得 $g = \langle dY, dY \rangle_2$. 称 Y 是类空超曲面 M^n 的共形位置向量. 由定理 4 得定理 5.

定理 5 两个超曲面 $x, \tilde{x}: M_1^{n+1}(c)$ 共形等价的充要条件是存在 $T \in O(n+3, 2)$ 使得 $\bar{Y} = YT$, 其中 Y, \bar{Y} 分别是 x, \tilde{x} , 的共形位置向量.

设 $\{E_1, \dots, E_n\}$ 是 M^n 上相应于 g 的局部正交基, 其对偶为 $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. 记 $Y_i = E_i(Y)$ 且定义

$$N = -\frac{1}{n}\Delta Y - \frac{1}{2n^2}\langle \Delta Y, \Delta Y \rangle_2 Y,$$

其中 Δ 是相应于 g 的拉普拉斯, 则有

$$\langle N, Y \rangle_2 = 1, \langle N, N \rangle_2 = 0, \langle N, Y_k \rangle_2 = 0, \langle Y_i, Y_j \rangle_2 = \delta_{ij}, 1 \leq i, j, k \leq n.$$

则 \mathbf{R}_2^{n+3} 有如下分解

$$\mathbf{R}_2^{n+3} = \text{span}\{Y, N\} \oplus \text{span}\{Y_1, \dots, Y_n\} \oplus \mathcal{V},$$

其中 $\mathcal{V} \perp \text{span}\{Y, N, Y_1, \dots, Y_n\}$. 称 \mathcal{V} 为 x 的共形法丛. 设 ξ 是 \mathcal{V} 的局部截面且 $\langle \xi, \xi \rangle_2 = -1$, 则 $\{Y, N, Y_1, \dots, Y_n, \xi\}$ 是 \mathbf{R}_2^{n+3} 中定义在 M^n 上的活动标架. 结构方程如下,

$$\begin{aligned} dY &= \sum_i \omega_i Y_i, dN = \sum_{ij} A_{ij} \omega_j Y_i + \sum_i C_i \omega_i \xi, \\ dY_i &= -\sum_j A_{ij} \omega_j Y - \omega_i N + \sum_j \omega_{ij} Y_j + \sum_j B_{ij} \omega_j \xi, \\ d\xi &= \sum_i C_i \omega_i Y + \sum_{ij} B_{ij} \omega_j Y_i, \end{aligned}$$

其中 $\omega_{ij} (= -\omega_{ji})$ 是 M^n 上相应于 $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ 的联络. 显然 $A = \sum_{ij} A_{ij} \omega_j \otimes \omega_i, B = \sum_{ij} B_{ij} \omega_j \otimes \omega_i, C = \sum_i C_i \omega_i$ 是整体定义的共形不变量. 称 A, B 和 C 分别是共形 2-张量, 共形第二基本形式, 共形 1-形式. 这些张量的共变导数定义为

$$\begin{aligned} \sum_j C_{i,j} \omega_j &= dC_i + \sum_k C_k \omega_{kj}, \sum_k A_{ij,k} \omega_k = dA_{ij} + \sum_k A_{ik} \omega_{kj} + \sum_k A_{kj} \omega_{ki}, \\ \sum_k B_{ij,k} \omega_k &= dB_{ij} + \sum_k B_{ik} \omega_{kj} + \sum_k B_{kj} \omega_{ki}, \end{aligned}$$

对结构方程求外微分得

$$\begin{aligned} A_{ij} &= A_{ji}, B_{ij} = B_{ji}, \\ A_{ij,k} - A_{ik,j} &= B_{ij} C_k - B_{ik} C_j, \\ B_{ij,k} - B_{ik,j} &= \delta_{ij} C_k - \delta_{ik} C_j, \\ C_{i,j} - C_{j,i} &= \sum_k (B_{ik} A_{kj} - B_{jk} A_{ki}), \end{aligned} \tag{1}$$

$$R_{ijkl} = B_{il} B_{jk} - B_{ik} B_{jl} + A_{ik} \delta_{jl} + A_{jl} \delta_{ik} - A_{il} \delta_{jk} - A_{jk} \delta_{il}. \tag{2}$$

且有

$$\text{tr}(A) = \frac{1}{2n}(n^2 \kappa - 1), R_{ij} = \text{tr}(A) \delta_{ij} + (n-2)A_{ij} + \sum_k B_{ik} B_{kj}, \tag{3}$$

$$(1-n)C_i = \sum_j B_{ij,j}, \sum_{ij} B_{ij}^2 = \frac{n-1}{n}, \tag{4}$$

其中 κ 是 g 的法化数量曲率. 由(3)、(4)式可知当 $n \geq 3$ 时, 结构方程中的系数由共形度量 g 和共形第二基本形式 B 确定, 因此有定理 6.

定理 6 两个超曲面 $x, \tilde{x}: M_1^{n+1}(c)$ 共形等价的充要条件是它们有相同的共形度量 g 和共形第二基本形式 B .

定义 B_{ij} 的二阶共变导数为

$$\sum_m B_{ij,km} \omega_m = dB_{ij,k} + \sum_m B_{mj,k} \omega_{mi} + \sum_m B_{im,k} \omega_{mj} + \sum_m B_{ij,m} \omega_{mk}. \tag{5}$$

有 Ricci 恒等式

$$B_{ij,kl} - B_{ij,ik} = \sum_m B_{mj} R_{mikl} + \sum_m B_{im} R_{mjkl}. \tag{6}$$

下面给出 $M_1^{n+1}(c)$ 中类空超曲面的共形不变量和等距不变量之间的关系.

先考虑类空超曲面 $x: M^n \rightarrow \mathbf{R}_1^{n+1}$. 设 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是相应于诱导度量 $I = \langle dx, dx \rangle_1$ 的局部正交基, 其配偶为 $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$. 设 e_{n+1} 是 x 的法向量场, 且 $\langle e_{n+1}, e_{n+1} \rangle_1 = -1$. $\Pi = \sum_{ij} h_{ij} \theta_i \otimes \theta_j$ 和 $H = \frac{1}{n} \sum_i h_{ii}$ 分别表示第二基本形式和平均曲率. 用 Δ_M 和 κ_M 分别表示相应于 I 的拉普拉斯和法化数量曲率. 由 $x: M^n \rightarrow \mathbf{R}_1^{n+1}$ 的结构方程可得

$$\Delta_M x = n H e_{n+1}. \quad (7)$$

x 的局部提升

$$y: M^n \rightarrow C^{n+2}, y = \left(\frac{\langle x, x \rangle_1 + 1}{2}, x, \frac{\langle x, x \rangle_1 - 1}{2} \right).$$

由(7)式得

$$\langle \Delta y, \Delta y \rangle_2 - n^2 \kappa_M = \frac{n}{n-1} (-|\Pi|^2 + n|H|^2) = -e^{2\tau}.$$

因此 x 的共形度量 g , 共形位置向量 Y 及 ξ 可表示为

$$g = \frac{n}{n-1} (|\Pi|^2 - n|H|^2) \langle dx, dx \rangle_1 := e^{2\tau} I, Y = e^\tau y, \\ \xi = -Hy + (\langle x, e_{n+1} \rangle_1, e_{n+1}, \langle x, e_{n+1} \rangle_1).$$

直接计算可得

$$A_{ij} = e^{-2\tau} [\tau_i \tau_j - h_{ij} H - \tau_{i,j} + \frac{1}{2} (-|\nabla \tau|^2 + |H|^2) \delta_{ij}], \quad (8)$$

$$B_{ij} = e^{-\tau} (h_{ij} - H \delta_{ij}), C_i = e^{-2\tau} (H \tau_i - H_i - \sum_j h_{ij} \tau_j), \quad (9)$$

其中 $\tau_i = e_i(\tau)$, $|\nabla \tau|^2 = \sum_i \tau_i^2$, $\tau_{i,j}$ 是 τ 相应于 I 的 Hessian, $H_i = e_i(H)$.

对类空超曲面 $x: M^n \rightarrow \mathcal{S}_1^{n+1}(1)$, 共形度量 g , 共形位置向量 Y 及 ξ 可表示为

$$g = \frac{n}{n-1} (|\Pi|^2 - n|H|^2) \langle dx, dx \rangle_1 := e^{2\tau} I, \\ Y = e^\tau (1, x) = e^\tau y, \xi = -Hy + (0, e_{n+1}).$$

对类空超曲面 $x: M^n \rightarrow \mathcal{H}_1^{n+1}(-1)$, 共形度量 g , 共形位置向量 Y 及 ξ 可表示为

$$g = \frac{n}{n-1} (|\Pi|^2 - n|H|^2) \langle dx, dx \rangle_2 := e^{2\tau} I, \\ Y = e^\tau (x, 1) = e^\tau y, \xi = -Hy + (e_{n+1}, 0).$$

经计算可得

$$A_{ij} = e^{-2\tau} [\tau_i \tau_j - \tau_{i,j} - h_{ij} H + \frac{1}{2} (-|\nabla \tau|^2 + |H|^2 + c) \delta_{ij}], \quad (10)$$

$$B_{ij} = e^{-\tau} (h_{ij} - H \delta_{ij}), C_i = e^{-2\tau} (H \tau_i - H_i - \sum_j h_{ij} \tau_j), \quad (11)$$

其中 $c = 1$ 相应于 $x: M^n \rightarrow S_1^{n+1}(1)$, $c = -1$ 相应于 $x: M^n \rightarrow H_1^{n+1}(-1)$.

3 典型的例子

本节, 给出 $M_1^{n+1}(c)$ 中的所有类空等参超曲面, 见文献[4-6].

例 1 $x: \mathcal{H}^k(-a) \times \mathbf{R}^{n-k} \rightarrow \mathbf{R}_1^{n+1}$, $a > 0, 1 \leq k \leq n-1$.

设 $x_1: \mathcal{H}^k(-a) \rightarrow \mathbf{R}_1^{k+1}$ 是标准嵌入, $y: \mathbf{R}^{n-k} \rightarrow \mathbf{R}^{n-k}$ 是恒同映射, 则

$$x = (x_1, y): \mathcal{H}^k(-a) \times \mathbf{R}^{n-k} \rightarrow \mathbf{R}_1^{n+1}.$$

$\xi = (\frac{1}{a} x_1, \vec{0})$ 是 x 的单位法向量场, 且

$$I = \langle dx, dx \rangle_1 = I_{\mathcal{H}^k(-a)} + I_{\mathbf{R}^{n-k}}, \Pi = -\langle dx, d\xi \rangle_1 = \frac{-1}{a} I_{\mathcal{H}^k(-a)}.$$

设 $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ 是 $\mathcal{H}^k(-a)$ 上的局部正交切标架场, $\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$ 是 \mathbf{R}^{n-k} 上的局部正交切标架场, 则 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是 $\mathcal{H}^k(-a) \times \mathbf{R}^{n-k}$ 上的局部正交切标架场. 在局部标架场 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 下,

$$(h_{ij}) = \text{diag}\left(\frac{-1}{a}, \dots, \frac{-1}{a}, 0, \dots, 0\right).$$

由(8)、(9)式得,

$$B_{ij} = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{(n-1)(n-k)}{k}} \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq k, B_{pq} = \frac{-1}{n} \sqrt{\frac{(n-1)k}{n-k}} \delta_{pq}, k+1 \leq p, q \leq n, B_{ip} = 0.$$

$$A_{ij} = \frac{(n-1)(k-2n)}{2n^2(n-k)} \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq k, A_{pq} = \frac{(n-1)k}{2n^2(n-k)} \delta_{pq}, k+1 \leq p, q \leq n, A_{ip} = 0.$$

$$\text{tr}(A) = \frac{-(n-1)k}{2n(n-k)}, C_i = 0, 1 \leq i \leq n.$$

例2 $x: \mathcal{S}^k(\sqrt{1+a^2}) \times \mathcal{H}^{n-k}(-a) \rightarrow \mathcal{S}_1^{n+1}(1), a > 0, 1 \leq k \leq n-1.$

设 $x_1: \mathcal{S}^k(1) \rightarrow \mathbf{R}^{k+1}$ 和 $x_2: \mathcal{H}^{n-k}(-1) \rightarrow \mathbf{R}_1^{n-k+1}$ 是两个标准嵌入, 则

$$x = (\sqrt{1+a^2}x_1, ax_2): \mathcal{S}^k(\sqrt{1+a^2}) \times \mathcal{H}^{n-k}(-a) \rightarrow \mathcal{S}_1^{n+1}(1) \subset \mathbf{R}_1^{n+2}.$$

$\xi = (ax_1, \sqrt{1+a^2}x_2)$ 是 x 的单位法向量场. 且

$$I = \langle dx, dx \rangle_1 = (1+a^2)I_{\mathcal{S}^k(1)} + a^2I_{\mathcal{H}^{n-k}(-1)},$$

$$II = -\langle dx, d\xi \rangle_1 = -a \sqrt{1+a^2}(I_{\mathcal{S}^k(1)} + I_{\mathcal{H}^{n-k}(-1)}).$$

设 $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ 是 $\mathcal{S}^k(\sqrt{1+a^2})$ 上的局部正交标架场, $\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$ 是 $\mathcal{H}^{n-k}(-a)$ 上的局部正交标架场, 则 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是 $\mathcal{S}^k(\sqrt{1+a^2}) \times \mathcal{H}^{n-k}(-a)$ 上的局部正交标架场. 在标架场 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 下,

$$(h_{ij}) = \text{diag}\left(\frac{-a}{\sqrt{1+a^2}}, \dots, \frac{-a}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{-\sqrt{1+a^2}}{a}, \dots, \frac{-\sqrt{1+a^2}}{a}\right).$$

由(10)、(11)式可得,

$$B_{ij} = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{(n-1)(n-k)}{k}} \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq k, B_{pq} = \frac{-1}{n} \sqrt{\frac{(n-1)k}{n-k}} \delta_{pq}, k+1 \leq p, q \leq n, B_{ip} = 0.$$

$$A_{ij} = \frac{n-1}{k(n-k)} \frac{(n-k)^2 + n^2 a^2}{2n^2} \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq k, A_{pq} = \frac{n-1}{k(n-k)} \frac{k^2 - n^2 a^2 - n^2}{2n^2} \delta_{pq}, k+1 \leq p, q \leq n,$$

$$A_{ip} = 0, i \neq p, \text{tr}(A) = \frac{(n-1)[n(2k-n)a^2 - (n-k)^2]}{2nk(n-k)}, C_i = 0, 1 \leq i \leq n.$$

例3 $x: \mathcal{H}^k(-a) \times \mathcal{H}^{n-k}(-\sqrt{1-a^2}) \rightarrow \mathcal{H}_1^{n+1}(-1) \subset \mathbf{R}_2^{n+2}, 0 < a < 1, 1 \leq k \leq n-1.$

设 $x_1: \mathcal{H}^k(-1) \rightarrow \mathbf{R}_1^{k+1}$ 和 $x_2: \mathcal{H}^{n-k}(-1) \rightarrow \mathbf{R}_1^{n-k+1}$ 是两个标准嵌入, 则

$$x = (\sqrt{1-a^2}x_1, ax_2): \mathcal{H}^k(-a) \times \mathcal{H}^{n-k}(-\sqrt{1-a^2}) \rightarrow \mathcal{H}_1^{n+1}(-1) \subset \mathbf{R}_2^{n+2}.$$

$\xi = (-ax_1, \sqrt{1-a^2}x_2)$ 是 x 的单位法向量场. 且

$$I = \langle dx, dx \rangle_1 = (1-a^2)I_{\mathcal{H}^k(-1)} + a^2I_{\mathcal{H}^{n-k}(-1)},$$

$$II = -\langle dx, d\xi \rangle_1 = a \sqrt{1-a^2}(I_{\mathcal{H}^k(-1)} - I_{\mathcal{H}^{n-k}(-1)}).$$

设 $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ 是 $\mathcal{H}^k(-a)$ 上的局部正交标架场, $\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$ 是 $\mathcal{H}^{n-k}(-\sqrt{1-a^2})$ 上的局部正交标架场, 则 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是 $\mathcal{H}^k(-a) \times \mathcal{H}^{n-k}(-\sqrt{1-a^2})$ 上的局部正交标架场. 在标架场 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 下,

$$(h_{ij}) = \text{diag}\left(\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}, \dots, \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}, \frac{-\sqrt{1-a^2}}{a}, \dots, \frac{-\sqrt{1-a^2}}{a}\right).$$

由(10)、(11)式可得,

$$B_{ij} = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{(n-1)(n-k)}{k}} \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq k, B_{pq} = \frac{-1}{n} \sqrt{\frac{(n-1)k}{n-k}} \delta_{pq}, k+1 \leq p, q \leq n, B_{ip} = 0.$$

$$A_{ij} = \frac{n-1}{k(n-k)} \frac{(n-k)^2 - n^2 a^2}{2n^2} \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq k, A_{pq} = \frac{n-1}{k(n-k)} \frac{n^2 a^2 - n^2 + k^2}{2n^2} \delta_{pq}, k+1 \leq p, q \leq n.$$

$$A_{ip} = 0, i \neq p, \operatorname{tr}(A) = \frac{n-1}{2n^2} \left[n - \frac{n^2((2k-n)a^2 + n-k)}{k(n-k)} \right], C_i = 0, 1 \leq i \leq n.$$

为了证明主要结论,如下两个结论读者可以参见文献[7-8].

定理 7^[7] 设 $x: M^n \rightarrow M_1^{n+1}(c)$ 是具有两个不同主曲率的类空超曲面. 若共形形式为零, 则 x 局部共形等价于下列超曲面之一:

- (1) $\mathcal{S}^k(\sqrt{a^2+1}) \times \mathcal{H}^{n-k}(-a) \subset \mathcal{S}_1^{n+1}(1), a > 0, 1 \leq k \leq n-1$;
- (2) $\mathcal{H}^k(-a) \times \mathcal{H}^{n-k}(-\sqrt{1-a^2}) \subset \mathcal{H}_1^{n+1}(-1), 0 < a < 1, 1 \leq k \leq n-1$;
- (3) $\mathcal{H}^k(-a) \times \mathbf{R}^{n-k} \subset \mathbf{R}_1^{n+1}, a > 0, 1 \leq k \leq n-1$.

为了证明定理 2, 需要如下定理 8.

定理 8^[8] 设 $x: M^n \rightarrow M_1^{n+1}(c)$ 是没有脐点的类空超曲面. 若 x 的共形不变量满足

$$(1) C = 0, (2) A = \lambda g,$$

则 x 共形等价于 $\mathcal{H}_1^{n+1}(-1)$ 中具有常数量曲率的极大类空超曲面.

4 定理 2 的证明

既然 $C = 0$, 则 $B_{ij,k} = B_{ik,j}$. 由(4)、(6)、(8)及(9)式可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta \left(\sum_{ij} B_{ij}^2 \right) &= \sum_{ijk} B_{ij}^2 B_{ij,k} + \sum_{ijk} B_{ij} B_{ij,kk} = \sum_{ijk} B_{ij}^2 B_{ij,k} + \sum_{ijk} B_{ij} (B_{im} R_{mkjk} + B_{ij} B_{km} R_{mijk}) = \\ &= \|\nabla B\|^2 + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \frac{n-1}{n} \operatorname{tr}(A) + n \sum_{ijk} B_{ij} B_{ik} A_{jk}. \end{aligned}$$

由 $\sum_{ij} B_{ij}^2 = \frac{n-1}{n}$ 及 $A = \tilde{A} + \frac{1}{n} \operatorname{tr}(A)g$, 有如下公式.

引理 1 设 $x: M^n \rightarrow M_1^{n+1}(c)$ 是没有脐点的类空超曲面. 若共形形式 $C = 0$, 则

$$\|\nabla B\|^2 + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + 2 \frac{n-1}{n} \operatorname{tr}(A) + n \sum_{ijk} B_{ij} B_{ik} \tilde{A}_{jk} = 0.$$

下面的引理是证明定理 2 的关键. 读者可以参见文献[9].

引理 2^[9] 设 a_1, \dots, a_n 和 b_1, \dots, b_n 是 $2n$ 个实数且满足 $\sum_i a_i = \sum_i b_i = 0$. 则

$$\left| \sum_i a_i b_i^2 \right| \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} \sqrt{\sum_i a_i^2} \sqrt{\sum_i b_i^2}.$$

而且, 若 $\sum_i a_i^2 \neq 0$ 且 $\sum_i b_i^2 \neq 0$, 则等式成立的充要条件是存在 $n-1$ 组数 (a_i, b_i) 取相同的值 (a, b) .

定理 2 的证明 由 $C = 0$ 及(11)式知, 可取标准正交基 $\{e_i\}$ 使得 (A_{ij}) 和 (B_{ij}) 同时对角化. 设

$$B_{ij} = b_i \delta_{ij}, A_{ij} = \mu_i \delta_{ij}.$$

显然, $(\tilde{A}_{ij}) = \operatorname{diag}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n)$, 其中 $\tilde{a}_i = a_i - \frac{1}{n} \operatorname{tr}(A)$. 因此, 由引理 1 及引理 2 可得

$$\begin{aligned} 0 &= \|\nabla B\|^2 + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + 2 \frac{n-1}{n} \operatorname{tr}(A) + n \sum_{ijk} B_{ij} B_{ik} \tilde{A}_{jk} = \|\nabla B\|^2 + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + 2 \frac{n-1}{n} \operatorname{tr}(A) + \\ &= n \sum_i b_i^2 \tilde{a}_i \geq \|\nabla B\|^2 + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + 2 \frac{n-1}{n} \operatorname{tr}(A) - \frac{n-2}{n} \sqrt{\frac{n-1}{n}} \|\tilde{A}\|. \end{aligned}$$

由 $\operatorname{tr}(A) = \frac{1}{2n}(n^2\kappa - 1)$, 可得

$$\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} \|\tilde{A}\| - \frac{n-2}{n} - \kappa \geq 0.$$

若 $\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} \|\tilde{A}\| \leq \frac{n-2}{n} + \kappa$, 则有 $\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} \|\tilde{A}\| = \frac{n-2}{n} + \kappa$. 因此需要讨论如下两种情形.

情形 1 若 $\|\tilde{A}\| = 0$, 则 $A = \lambda g$. 由定理 8 可得, x 共形等价于 $H_1^{n+1}(-1)$ 中具有常数量曲率的极大类空超曲面.

情形 2 若 $\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} \|\tilde{A}\| - \frac{n-2}{n} - n\kappa = 0$, 则有 $\nabla B = 0$, 且类空超曲面具有两个不同主曲率, 其中一个为单重. 由定理 7, 完成了定理 2 的证明.

参 考 文 献

- [1] Iiu Z J, Li H Z. Submanifolds with constant Möbius scalar curvature in S^n [J]. Manuscripta Math, 2003, 111: 287-302.
- [2] Cahen M, Kerbrat Y. Domaines symétriques des quadriques projectives [J]. J Math Pure Appl, 1983, 62: 327-348.
- [3] Wang C P. Möbius geometry of submanifolds in S^n [J]. Manuscripta Math, 1998, 96: 517-534.
- [4] Li Z Q, Xie X H. Spacelike isoparametric hypersurfaces in Lorentzian space form [J]. Front Math China, 2006, 1: 130-137.
- [5] Nomizu K. On isoparametric hypersurfaces in the Lorentzian space forms [J]. Japan J Math, 1981, 7(1): 217-226.
- [6] Magid M. Lorentzian isoparametric hypersurface [J]. Pacific J Math, 1985, 118(1): 437-446.
- [7] Li T Z, Nie C X. Spacelike Dupin Hypersurfaces in Lorentzian Space Forms [J]. Mathematics, 2015, 28(3): 299-310.
- [8] Li T Z, Nie C X. Conformal Geometry of Hypersurfaces in Lorentz Space Forms [J]. Geometry, 2013(2): 549602.
- [9] Santo S W. Submanifolds with parallel mean curvature vector in spheres [J]. Tohoku Math J, 1994, 46: 403-415.

A Gap Theorem of Spacelike Hypersurfaces in Lorentzian Space Forms

Zhang Shubang, Ji Xiu

(Department of Mathematics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: Let M^n be a n -dimensional umbilic-free hypersurface in the $(n+1)$ -dimensional Lorentzian Space form $M_1^{n+1}(c)$. Three basic invariants of M^n under the conformal transformation group of $M_1^{n+1}(c)$ are a 1-form C , called conformal 1-form, a symmetric $(0,2)$ tensor A , called conformal 2-tensor, and a positive definite $(0,2)$ tensor g , called conformal metric. We denote the conformal normalized scalar curvature by κ and the trace-free conformal 2-tensor by $\tilde{A} = A - \frac{1}{n}tr(A)g$. In this paper, we prove a gap theorem.

Keywords: conformal metric; conformal second fundamental form; conformal 2-tensor

[责任编辑 陈留院]