文章编号:1000-2367(2023)02-0056-07 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2023.02.006

求解一类 Minimax 分式优化问题的几何规划方法

申培萍,王亚飞,吴殿晓

(华北水利水电大学 数学与统计学院,郑州 450046)

摘 要:研究了一类 Minimax 分式规划问题(MFP).首先通过引进变量,将问题(MFP)等价转化为问题(EP1),其次,再将问题(EP1)中的约束函数整理成正项式的形式,然后,利用特殊不等式的性质将问题(EP1)转化为易于求解的几何规划问题(GP),通过求解一系列(GP) 问题获得原问题的最优解,最后,给出求解问题(MFP)的迭代算法以及算法的收敛性分析,数值结果表明了算法的有效性.

关键词: Minimax 分式规划;几何规划;迭代算法

中图分类号:O221.2 **文献标志码:**A

考虑如下一类 Minimax 分式规划问题:

$$(\mathrm{MFP}):\begin{cases}\min\ \max & \left\{\dfrac{n_1(x)}{d_1(x)},\dfrac{n_2(x)}{d_2(x)},\cdots,\dfrac{n_p(x)}{d_p(x)}\right\},\\ \text{s.t.} & x\in X=\{x\in \mathbf{R}_n^+ \mid \psi_m(x)\le 1, m=1,2,\cdots,l\},\end{cases}$$

其中,

$$n_j(x)=\sum_{t=1}^{T_j^1}\alpha_{jt}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\rho_{jti}^1},j=1,2,\cdots,p,$$

$$d_j(x)=\sum_{t=1}^{T_j^2}\beta_{jt}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\rho_{jti}^2},j=1,2,\cdots,p,$$

$$\psi_m(x)=\sum_{t=1}^{T_m^3}\gamma_{mt}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\rho_{mti}^3},m=1,2,\cdots,l.$$

$\alpha_{jt},\beta_{jt},\gamma_{mt},\rho_{jti}^1,\rho_{jti}^2,\rho_{mti}^3$ 均为任意实数,T_j^1,T_j^2,T_m^3 均为任意正整数.本文假设问题(MFP)的可行域 X 有界,且目标函数中的 $n_j(x)\ge 0,d_j(x)>0,\forall x\in X,j=1,2,\cdots,p$.

众所周知,(MFP)问题是一类特殊的分式规划问题,该问题被广泛应用于电子电路设计[1]、信号处理[2]、衡量系统效率[3]等领域.由于存在多个局部最优解,所以(MFP)问题是 NP-难问题,这给它的求解带来了一定的挑战性.近几年来,针对(MFP)问题的一些特殊形式,学者们分别给出了相应的算法.当 $n_j(x)$,$d_j(x)$ 和 $\psi_m(x)$ 均为仿射函数时,文献[4-5]分别给出了分支定界算法,确定性算法来求解此类问题.当 $n_j(x)$,$d_j(x)$ 均为二次函数时,文献[6]在对偶方法的基础上提出了一种线性收敛的二分算法,该算法的子问题可通过一系列的最小特征值问题得到有效解决.针对(MFP)问题的一般形式,文献[7]通过利用指数变换和利用特殊不等式的特点等将原问题转化为凸规划问题进行求解.本文将考虑(MFP)问题的一般形式,利用等价转化和特殊不等式的性质得到易于求解的几何规划问题,从而通过求解一系列几何规划问题得到原问题的解.同时,数值结果表明该算法的可行性和有效性.本文考虑的模型适用性更广,且可以在较少的迭代次数和运行时间内获得原问题的最优解.

收稿日期:2022-02-11;**修回日期:**2022-12-19.

基金项目:国家自然科学基金(12071133;11871196).

作者简介(通信作者):申培萍(1964-),女,河南南阳人,华北水利水电大学教授,研究方向为最优化理论与应用,E-mail:shenpeiping@163.com.

1　等价问题

首先，引入变量 x_{n+1}，将问题(MFP)转化为如下等价形式：

$$(\mathrm{EP1}):\begin{cases}\min & x_{n+1},\\ \text{s.t.} & \dfrac{n_j(x)}{d_j(x)}\le x_{n+1}, j=1,2,\cdots,p,\\ & \psi_m(x)\le 1, m=1,2,\cdots,l.\end{cases}$$

定理 1　$x^*\in\mathbf{R}^n$ 是问题(MFP)的全局最优解当且仅当 $(x^*,x^*_{n+1})\in\mathbf{R}^{n+1}$ 是问题(EP1)的全局最优解，其中 $x^*_{n+1}=\max\left\{\dfrac{n_1(x^*)}{d_1(x^*)},\cdots,\dfrac{n_p(x^*)}{d_p(x^*)}\right\}$.

证明　若 (x^*,x^*_{n+1}) 是问题(EP1)的全局最优解，则有

$$\frac{n_j(x^*)}{d_j(x^*)}\le x^*_{n+1}, \psi_m(x^*)\le 1. \tag{1}$$

由(1)式知，x^* 是问题(MFP)的可行解.反证法，假设 x^* 不是(MFP)的最优解，则存在(MFP)的可行解 $\tilde{x}$ 满足

$$\max\left\{\frac{n_1(\tilde{x})}{d_1(\tilde{x})},\cdots,\frac{n_p(\tilde{x})}{d_p(\tilde{x})}\right\}<\max\left\{\frac{n_1(x^*)}{d_1(x^*)},\cdots,\frac{n_p(x^*)}{d_p(x^*)}\right\}. \tag{2}$$

令

$$\tilde{x}_{n+1}=\max\left\{\frac{n_1(\tilde{x})}{d_1(\tilde{x})},\cdots,\frac{n_p(\tilde{x})}{d_p(\tilde{x})}\right\}, \tag{3}$$

则 $(\tilde{x},\tilde{x}_{n+1})$ 是问题(EP1)的可行解，再由(1)～(3)式可知 $\tilde{x}^{n+1}<x^*_{n+1}$，显然与 (x^*,x^*_{n+1}) 是(EP1)的全局最优解矛盾，因此，x^* 是问题(MFP)的全局最优解.

反之，若 x^* 是问题(MFP)的全局最优解，令

$$x^*_{n+1}=\max\left\{\frac{n_1(x^*)}{d_1(x^*)},\cdots,\frac{n_p(x^*)}{d_p(x^*)}\right\}, \tag{4}$$

由(4)式知，(x^*,x^*_{n+1}) 是问题(EP1)的可行解.现假设 (x^*,x^*_{n+1}) 不是(EP1)的最优解，则存在(EP1)的可行解 $(\bar{x},\bar{x}_{n+1})$ 满足

$$\frac{n_j(\bar{x})}{d_j(\bar{x})}\le\bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+1}<x^*_{n+1}, j=1,2,\cdots,p, \tag{5}$$

由(4)、(5)式可得：

$$\max\left\{\frac{n_1(\bar{x})}{d_1(\bar{x})},\cdots,\frac{n_p(\bar{x})}{d_p(\bar{x})}\right\}<\max\left\{\frac{n_1(x^*)}{d_1(x^*)},\cdots,\frac{n_p(x^*)}{d_p(x^*)}\right\}. \tag{6}$$

这与 x^* 是问题(MFP)的最优解矛盾，故 (x^*,x^*_{n+1}) 是问题(EP1)的全局最优解.证毕.

基于定理 1，求解问题(MFP)转化为求解问题(EP1).为方便，记

$$N=\{1,2,\cdots,n\}, I_1=\{1,2,\cdots,p\}, I_2=\{p+1,\cdots,p+l\}.$$

根据 $n_j(x)$，$d_j(x)$，$\psi_m(x)$ 的表达式，问题(EP1)的约束可以重写为：

$$\sum_{t=1}^{T_k^1}\alpha_{kt}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\rho_{kti}^1}\le\sum_{t=1}^{T_k^2}\beta_{kt}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\rho_{kti}^2}x_{n+1}, k\in I_1, \tag{7}$$

$$\sum_{t=1}^{T_{k-p}^3}\gamma_{(k-p)t}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\rho_{(k-p)ti}^3}\le 1, k\in I_2. \tag{8}$$

进一步，为了把上述不等式两边均表示成正项式的形式，引入如下记号：

$$p_k^+=\{t\mid\alpha_{kt}>0, t=1,\cdots,T_k^1\}, k\in I_1, p_k^-=\{t\mid\alpha_{kt}<0, t=1,\cdots,T_k^1\}, k\in I_1,$$

$$q_k^+=\{t\mid\beta_{kt}>0, t=1,\cdots,T_k^2\}, k\in I_1, q_k^-=\{t\mid\beta_{kt}<0, t=1,\cdots,T_k^2\}, k\in I_1,$$

$J_k^+=\{t \mid \gamma_{(k-p)t}>0, t=1,2,\cdots,T_{k-p}^3\}, k\in I_2, J_k^-=\{t \mid \gamma_{(k-p)t}<0, t=1,2,\cdots,T_{k-p}^3\}, k\in I_2$.

利用上述记号,不等式(7)可被重写成下面的不等式(9):

$$\sum_{t\in p_k^+}\alpha_{kt}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\rho_{kti}^1}-\sum_{t\in p_k^-}\alpha_{kt}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\rho_{kti}^1}\le\sum_{t\in q_k^+}\beta_{kt}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\rho_{kti}^2}x_{n+1}-\sum_{t\in q_k^-}\beta_{kt}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\rho_{kti}^2}x_{n+1}, \tag{9}$$

其中,$k\in I_1$,而不等式(8)被重写成了下面的不等式(10):

$$\sum_{J_k^+}\gamma_{(k-p)t}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\rho_{(k-p)ti}^3}-\sum_{J_k^-}\gamma_{(k-p)t}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\rho_{(k-p)ti}^3}\le 1, k\in I_2. \tag{10}$$

于是,根据不等式(9)和(10)的特点,不妨将问题(EP1)的约束不等式统一改写为下面的简单形式:

$$\sum_{t\in S_k^1}a_{kt}\prod_{i=1}^{n+1}x_i^{\sigma_{kti}}\le\sum_{t\in S_k^2}b_{kt}\prod_{i=1}^{n+1}x_i^{\xi_{kti}}, k\in I_1\cup I_2, \tag{11}$$

其中,$S_k^1=\begin{cases}p_k^+\cup q_k^-, & k\in I_1,\\ J_k^+, & k\in I_2,\end{cases}\quad S_k^2=\begin{cases}p_k^-\cup q_k^+, & k\in I_1,\\ J_k^-\cup\{T_{k-p}^3+1\}, & k\in I_2,\end{cases}$

$$a_{kt}=\begin{cases}\alpha_{kt}, & k\in I_1, t\in p_k^+,\\ -\beta_{kt}, & k\in I_1, t\in q_k^-,\\ \gamma_{(k-p)t}, & k\in I_2, t\in J_k^+,\end{cases}\quad b_{kt}=\begin{cases}-\alpha_{kt}, & k\in I_1, t\in p_k^-,\\ \beta_{kt}, & k\in I_1, t\in q_k^+,\\ -\gamma_{(k-p)t}, & k\in I_2, t\in J_k^-,\\ 1, & k\in I_2, t=T_{k-p}^3+1,\end{cases}$$

$$\sigma_{kti}=\begin{cases}\rho_{kti}^1, & k\in I_1, t\in p_k^+, i\in N,\\ 0, & k\in I_1, t\in p_k^+, i=n+1,\\ \rho_{kti}^2, & k\in I_1, t\in q_k^-, i\in N,\\ 1, & k\in I_1, t\in q_k^-, i=n+1,\\ \rho_{(k-p)ti}^3, & k\in I_2, t\in J_k^+, i\in N,\\ 0, & k\in I_2, t\in J_k^+, i=n+1,\end{cases}\quad \xi_{kti}=\begin{cases}\rho_{kti}^1, & k\in I_1, t\in p_k^-, i\in N,\\ 0, & k\in I_1, t\in p_k^-, i=n+1,\\ \rho_{kti}^2, & k\in I_1, t\in q_k^+, i\in N,\\ 1, & k\in I_1, t\in q_k^+, i=n+1,\\ \rho_{(k-p)ti}^3, & k\in I_2, t\in J_k^-, i\in N,\\ 0, & k\in I_2, t\in J_k^-, i=n+1,\\ 0, & k\in I_2, t=T_{k-p}^3+1.\end{cases}$$

根据上述讨论,问题(EP1)可被重新写成下面的问题(Q):

$$(\mathrm{Q}):\begin{cases}\min & f(x)=x_{n+1},\\ \text{s.t.} & x\in Z=\left\{x\in\mathbf{R}^{n+1} \mid \sum_{t\in S_k^1}a_{kt}\prod_{i=1}^{n+1}x_i^{\sigma_{kti}}\le\sum_{t\in S_k^2}b_{kt}\prod_{i=1}^{n+1}x_i^{\xi_{kti}}, k\in I_1\cup I_2, x>0\right\}.\end{cases}$$

2 压缩过程

根据定理1和上述推导过程,可知问题(MFP)和问题(Q)是等价的,因此问题(MFP)的求解过程可转化为如何求解问题(Q).观察问题(Q)的约束特点可知问题(Q)仍是NP-难问题.为求解该问题,下面将提出一种新的压缩技术.首先将问题(Q)的约束不等式中的有关项压缩成单项式,然后通过求解一系列几何规划问题获得原问题的解.为此,考虑问题(Q)中约束不等式的右端项,并记为 $g_k(x)$,即

$$g_k(x)=\sum_{t\in S_k^2}b_{kt}\prod_{i=1}^{n+1}x_i^{\xi_{kti}}.$$

对给定的点 $\bar{x}=(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_i,\cdots,\bar{x}_{n+1})\in\mathbf{R}^{n+1}, x_i>0$,由代数-几何平均不等式可得

$$g_k(x)\ge\eta_{kt}(\bar{x})\prod_{t\in S_k^2}\left(\prod_{i=1}^{n+1}x_i^{\xi_{kti}}\right)^{\mu_k(\bar{x})}, \tag{12}$$

其中参数

$$\mu_k(\bar{x})=\frac{b_{kt}\prod_{i=1}^{n+1}(\bar{x}_i)^{\xi_{kti}}}{g_k(\bar{x})},\eta_{kt}(\bar{x})=\prod_{t\in S_k^2}\left(\frac{g_k(\bar{x})}{\prod_{i=1}^{n+1}(\bar{x}_i)^{\xi_{kti}}}\right)^{\mu_k(\bar{x})},k\in I_1\cup I_2.$$

这样，利用不等式(12)，可将问题(Q)最终压缩成下面的几何规划问题：

$$\widetilde{Q}(\bar{x}):\begin{cases}\min & f(x)=x_{n+1},\\ \text{s.t.} & x\in\widetilde{Z}=\{x\in\mathbf{R}^{n+1}\mid\dfrac{\omega_k(x)}{\vartheta_k(x;\bar{x})}\leq 1,k\in I_1\cup I_2,x>0\}.\end{cases}$$

其中，$\omega_k(x)=\sum_{t\in S_k^1}a_{kt}\prod_{i=1}^{n+1}x_i^{\sigma_{kti}},\vartheta_k(x;\bar{x})=\eta_{kt}(\bar{x})\prod_{t\in S_k^2}(\prod_{i=1}^{n+1}x_i^{\xi_{kti}})^{\mu_k(\bar{x})}$.

注意到问题 $\widetilde{Q}(\bar{x})$ 的约束不等式的分母 $\vartheta_k(x;\bar{x})$ 是一个单项式.因此，问题 $\widetilde{Q}(\bar{x})$ 是一个标准的几何规划问题.对任意 $\bar{x}\in\mathbf{R}^{n+1}$，由上述构造过程知问题 $\widetilde{Q}(\bar{x})$ 和问题(Q) 的目标函数是相同的，并且约束函数满足 $\dfrac{\omega_k(\bar{x})}{g_k(\bar{x})}=\dfrac{\omega_k(\bar{x})}{\vartheta_k(\bar{x};\bar{x})}$.故问题 $\widetilde{Q}(\bar{x})$ 可作为问题(Q) 的近似.另外，问题 $\widetilde{Q}(\bar{x})$ 的可行域 $\widetilde{Z}$ 和问题 $Q(\bar{x})$ 的可行域 Z 满足 $\widetilde{Z}\subseteq Z$.因此，通过选取不同的点 $\bar{x}$，可以借助求解一系列几何规划问题 $\widetilde{Q}(\bar{x})$ 来得到问题(Q) 的最优解，从而得到原问题(MFP)的最优解.

3　算法及其收敛性

基于上述讨论，下面将提出一个迭代算法.首先，给定初始点 x_0，令 $\bar{x}=x^0$，接着，计算参数 μ_k，η_{kt}.求解问题 $\widetilde{Q}(x_0)$，并记其解为 x^1，若 $x^1=\bar{x}$，算法终止，且 x^1 为问题(Q) 的最优解.否则，令 $\bar{x}=x^1$，重复上述过程直至满足终止条件.具体步骤如下：

步骤 0　选取初始点 x^0.置迭代次数 $r=1$.

步骤 1　令 $\bar{x}=x^{r-1}$，用 $\bar{x}$ 计算参数 μ_k，η_{kt}.

步骤 2　求解几何规划问题 $\widetilde{Q}(\bar{x})$ 获得解 x^r.

步骤 3　若 $x^r=x^{r-1}$，算法停止.令 $x^*=x^r$ 且 x^* 为问题(Q) 的最优解.否则，置 $r=r+1$ 并且转向步骤 1.

下面为了讨论算法的收敛性，先给出引理 1.

引理 1　对于给定的点 $\bar{x}$，有 $g_k(\bar{x})=\vartheta_k(\bar{x};\bar{x})$，$\nabla(g_k(\bar{x}))=\nabla(\vartheta_k(\bar{x};\bar{x}))$，$k\in I_1\cup I_2$，其中 ∇ 代表函数的梯度.

证明　对于给定的点 $\bar{x}$，将首先证明 $g_k(\bar{x})=\vartheta_k(\bar{x};\bar{x})$，$k\in I_1\cup I_2$ 成立.当 $k\in I_1\cup I_2$ 时，根据上述第 2 节的讨论内容，可得：

$$\vartheta_k(\bar{x};\bar{x})=\eta_{kt}(\bar{x})\prod_{t\in S_k^2}(\prod_{i=1}^{n+1}\bar{x}_i^{\xi_{kti}})^{\mu_k(\bar{x})}=\prod_{t\in S_k^2}\left(\frac{g_k(\bar{x})}{\prod_{i=1}^{n+1}\bar{x}_i^{\xi_{kti}}}\right)^{\mu_k(\bar{x})}\prod_{t\in S_k^2}(\prod_{i=1}^{n+1}\bar{x}_i^{\xi_{kti}})^{\frac{b_{kt}\prod_{i=1}^{n+1}\bar{x}_i^{\xi_{kti}}}{g_k(\bar{x})}}=$$

$$\prod_{t\in S_k^2}(g_k(\bar{x}))^{\mu_k(\bar{x})}=g_k(\bar{x})^{\sum_{t\in S_k^2}\frac{b_{kt}\prod_{i=1}^{n+1}\bar{x}_i^{\xi_{kti}}}{g_k(\bar{x})}}=g_k(\bar{x}).$$

接下来，将证明 $\nabla(g_k(\bar{x}))=\nabla(\vartheta_k(\bar{x};\bar{x}))$，$k\in I_1\cup I_2$ 成立.

当 $k\in I_1$ 时，对于任意 $q=1,2,\cdots,n$，则有

$$\left.\frac{\partial g_k(x)}{\partial x_q}\right|_{x=\bar{x}}=\sum_{t\in p_k^-}\alpha_{kt}\rho_{ktq}^1\bar{x}_q^{-1}\prod_{i=1}^n\bar{x}_i^{\rho_{kti}^1}+\sum_{t\in q_k^+}\beta_{kt}\rho_{ktq}^2\bar{x}_q^{-1}\bar{x}_{n+1}\prod_{i=1}^n\bar{x}_i^{\rho_{kti}^2},$$

以及

$$\left.\frac{\partial\vartheta_k(x;\bar{x})}{\partial x_q}\right|_{x=\bar{x}}=\sum_{t\in p_k^-}\alpha_{kt}\rho_{ktq}^1\bar{x}_q^{-1}\prod_{i=1}^n\bar{x}_i^{\rho_{kti}^1}+\sum_{t\in q_k^+}\beta_{kt}\rho_{ktq}^2\bar{x}_q^{-1}\bar{x}_{n+1}\prod_{i=1}^n\bar{x}_i^{\rho_{kti}^2}.$$

所以,

$$\left.\frac{\partial \vartheta_k(x;\bar{x})}{\partial x_q}\right|_{x=\bar{x}}=\left.\frac{\partial g_k(x)}{\partial x_q}\right|_{x=\bar{x}},q=1,2,\cdots,n. \tag{13}$$

此外,当 $k\in I_2$ 时,可类似证明(13)式成立.

对于 $q=n+1,k\in I_1\cup I_2$,有 $\left.\frac{\partial g_k(x)}{\partial x_{n+1}}\right|_{x=\bar{x}}=\sum_{t\in q_k^+}\beta_{kt}\prod_{i=1}^{n}(\bar{x}_i)^{\rho_{kti}^2}$,$\left.\frac{\partial \vartheta_k(x;\bar{x})}{\partial x_{n+1}}\right|_{x=\bar{x}}=\sum_{t\in q_k^+}\beta_{kt}\prod_{i=1}^{n}(\bar{x}_i)^{\rho_{kti}^2}$,所以,$\left.\frac{\partial \vartheta_k(x;\bar{x})}{\partial x_q}\right|_{x=\bar{x}}=\left.\frac{\partial g_k(x)}{\partial x_q}\right|_{x=\bar{x}}$,即 $\nabla(g_k(\bar{x}))=\nabla(\vartheta_k(\bar{x};\bar{x})),k\in I_1\cup I_2$. 证毕.

定理 2 对算法产生的每个点 x^r,假设问题 $\tilde{Q}(\bar{x})$ 满足 Cottle 约束规范,则算法或有限步终止于问题(Q)的 KKT 点,或产生无限序列$\{x^r\}$的任意聚点是问题(Q)的 KKT 点.

证明 若算法迭代 r 步后停止,由于满足 Cottle 约束规范,再结合文献[8]中定理 3.8,可得 x^r 是 $\tilde{Q}(x^{r-1})$ 的 KKT 点, 即

$$\nabla f(x^r)+\sum_{k=1}^{p+l}\zeta_k\nabla(\omega_k(x^r)-\vartheta_k(x^r;x^{r-1}))+\sum_{i=1}^{n+1}\tau_i(-x_i^r)=0,k\in I_1\cup I_2,$$
$$\omega_k(x^r)-\vartheta_k(x^r;x^{r-1}))\leq 0,\zeta_k(\omega_k(x^r)-\vartheta_k(x^r;x^{r-1}))=0,k\in I_1\cup I_2,$$
$$x_i^r>0,\tau_i(-x_i^r)=0,i=1,2,\cdots,n+1,$$
$$\zeta_k\geq 0,\tau_i\geq 0,k\in I_1\cup I_2,i=1,2,\cdots,n+1,$$

其中,ζ_k,τ_i 为拉格朗日乘子.由算法步骤 3 知 $x^{r-1}=x^r$,进一步将其代入可得:

$$\nabla f(x^r)+\sum_{k=1}^{p+l}\zeta_k\nabla(\omega_k(x^r)-\vartheta_k(x^r;x^r))+\sum_{i=1}^{n+1}\tau_i(-x_i^r)=0,k\in I_1\cup I_2,$$
$$\omega_k(x^r)-\vartheta_k(x^r;x^r))\leq 0,\zeta_k(\omega_k(x^r)-\vartheta_k(x^r;x^r))=0,k\in I_1\cup I_2,$$
$$x_i^r>0,\tau_i(-x_i^r)=0,i=1,2,\cdots,n+1,$$
$$\zeta_k\geq 0,\tau_i\geq 0,k\in I_1\cup I_2,i=1,2,\cdots,n+1.$$

再由 $g_k(x)$,$\vartheta_k(x;\bar{x})$ 的定义, 并结合引理 1 可知,

$$\nabla f(x^r)+\sum_{k=1}^{p+l}\zeta_k\nabla(\omega_k(x^r)-g_k(x^r)+\sum_{i=1}^{n+1}\tau_i(-x_i^r)=0,k\in I_1\cup I_2,$$
$$\omega_k(x^r)-g_k(x^r)\leq 0,\zeta_k(\omega_k(x^r)-g_k(x^r))=0,k\in I_1\cup I_2,$$
$$x_i^r>0,\tau_i(-x_i^r)=0,i=1,2,\cdots,n+1,$$
$$\zeta_k\geq 0,\tau_i\geq 0,k\in I_1\cup I_2,i=1,2,\cdots,n+1.$$

所以 x^r 是(Q) 的 KKT 点.

若算法不是有限步终止,即算法需要无限步迭代,那么将首先证明算法产生的序列 $\{x^r\}$ 是有界的.为此,将 x^r 写成分量的形式 $x^r=(x_1^r,\cdots,x_n^r,x_{n+1}^r)$.注意到$(x_1^r,\cdots,x_n^r)\in X$.由于问题(MFP) 的可行域 X 是有界的,所以,对每个 $x_i^r(i=1,2,\cdots,n)$,存在常数 $N_1>0$,使得 $|x_i^r|\leq N_1,i=1,2,\cdots,n$.当 $i=n+1$ 时,由于 $g_k(\bar{x})=\vartheta_k(\bar{x};\bar{x})$, 即

$$\sum_{t\in p_k^-}\alpha_{kt}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\rho_{kti}^1}+\sum_{t\in q_k^+}\beta_{kt}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\rho_{kti}^2}x_{n+1}=\eta_{kt}(\bar{x})\prod_{t\in S_k^2}\left(\prod_{i=1}^{n+1}x_i^{\xi_{kti}}\right)^{\mu_k(\bar{x})}.$$

进一步可得:

$$\sum_{t\in q_k^+}\beta_{kt}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\rho_{kti}^2}x_{n+1}=\eta_{kt}(\bar{x})\prod_{t\in S_k^2}\left(\prod_{i=1}^{n+1}x_i^{\xi_{kti}}\right)^{\mu_k(\bar{x})}-\sum_{t\in p_k^-}\alpha_{kt}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\rho_{kti}^1}. \tag{14}$$

又因为 $\eta_{kt}(\bar{x})\prod_{t\in S_k^2}\left(\prod_{i=1}^{n+1}x_i^{\xi_{kti}}\right)^{\mu_k(\bar{x})}$ 在 $\mathbf{R}_+^{n+1}$ 上是连续函数,所以,等式(14)右端的函数也是 $\mathbf{R}_+^{n+1}$ 上的连续函数.故函数 $\sum_{t\in q_k^+}\beta_{kt}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\rho_{kti}^2}x_{n+1}$ 是有界的.另外,再由 $\sum_{t\in q_k^+}\beta_{kt}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\rho_{kti}^2}$ 的连续性,进一步可得 x_{n+1}^r 也是有界的,即存在常数 $N_2>0$, 满足 $|x_{n+1}^r|\leq N_2$. 现在, 令 $M=\max\{N_1,N_2\}$, 则对每个 $x^r=(x_1^r,\cdots,x_n^r,x_{n+1}^r)$, 有

$\|x^r\| \le M$ 成立，显然序列 $\{x^r\}$ 是有界的．从而存在收敛子列，不妨仍将其记为 $\{x^r\}$ 收敛到 x^*．根据 $\omega_k(\bar{x})$ 和 $\vartheta_k(x;\bar{x})$ 的连续可微性，可得：

$$\nabla f(x^*) + \sum_{k=1}^{p+l} \zeta_k \nabla(\omega_k(x^*) - g_k(x^*) + \sum_{i=1}^{n+1} \tau_i(-x_i^*) = 0, k \in I_1 \cup I_2,$$
$$\omega_k(x^*) - g_k(x^*) \le 0, \zeta_k(\omega_k(x^*) - g_k(x^r)) = 0, k \in I_1 \cup I_2,$$
$$x_i^* > 0, \tau_i(-x_i^*) = 0, \zeta_k \ge 0, \tau_i \ge 0, k \in I_1 \cup I_2, i = 1, 2, \cdots, n+1.$$

所以 x^* 是问题(Q)的 KKT 点.证毕.

4　数值实验

为验证算法的有效性，所有数值实验均在 Intel(R) Core(TM) i5 CPU(主频 1.8 GHz)4 GB 内存的微机上用 MATLAB(2012b) 进行编程计算，算法执行过程中调用了 GGP 求解器，容许误差设定为 $\varepsilon = 10^{-8}$，数值实验结果列于表 1 中.

例 1　

$$\min \max \left\{\frac{5x_1+4x_2-x_3+0.9}{3x_1-x_2+2x_3+0.5}, \frac{3x_1-x_2+4x_3+0.5}{9x_1+3x_2-x_3+0.5}, \frac{4x_1-x_2+6x_3+0.5}{12x_1+7x_2-x_3+0.9}, \frac{7x_1-x_2+7x_3+0.5}{11x_1+9x_2-x_3+0.9}, \frac{7x_1-x_2+7x_3+0.7}{11x_1+7x_2-x_3+0.8}\right\},$$
$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & 2x_1+2x_2-x_3 \le 3, \\ & -2x_1+x_2-3x_3 \le -1, \\ & 11x_1+7x_2+12x_3 \le 47, \\ & 13x_1+13x_2+6x_3 \le 56, \\ & -6x_1+2x_2+3x_3 \le -1, \\ & 1.0 \le x_1 \le 2.0, 0.35 \le x_2 \le 0.90, 1.00 \le x_3 \le 1.55. \end{aligned}$$

例 2　

$$\min \max \left\{\frac{3x_1+4x_2-x_3+0.9}{2x_1-x_2+x_3+0.5}, \frac{3x_1-x_2+3x_3+0.5}{9x_1+5x_2-x_3+0.5}, \frac{4x_1-x_2+5x_3+0.5}{11x_1+6x_2-x_3+0.9}, \frac{5x_1-x_2+6x_3+0.5}{12x_1+7x_2-x_3+0.9}, \frac{6x_1-x_2+7x_3+0.6}{11x_1+6x_2-x_3+0.9}\right\},$$
$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & 2x_1+x_2-x_3 \le 2, \\ & -2x_1+x_2-2x_3 \le -1, \\ & 11x_1+6x_2+12x_3 \le 45, \\ & 11x_1+13x_2+6x_3 \le 52, \\ & -7x_1+x_2+x_3 \le -2, \\ & 0.35 \le x_2 \le 0.90, 1.00 \le x_3 \le 1.55, 1.0 \le x_1 \le 2.0. \end{aligned}$$

表 1　例 1 和例 2 的计算结果

Tab. 1　The calculation results of example 1 and example 2

例	算法	最优解	最优值	迭代步数
1	[9]	(1.752 859 889,0.350,1.550)	1.117 793 086	26
	[10]	(1.753 8,0.350 0,1.550 0)	1.118 3	10
	Ours	(1.741 8,0.350 0,1.550 0)	1.116 060 629	3
2	[10]	(1.505 3,0.350 0,1.550 0)	1.117 9	13
	Ours	(1.505 3,0.350 0,1.550 0)	1.117 894 095	2

从表 1 中的数值结果可知，本文提出的算法与文献[9－10]中的其他方法相比，可以在较少的次数内得到问题的解，并且获得的最优值优于文献[9－10]获得的最优值.另外，本文提出的算法的迭代次数以及运行时间均少于文献[9－10]中的数据.

5 结 论

本文考虑一类 Minimax 分式规划问题并提出相应的算法,首先,通过引入辅助变量将其转化为等价问题,然后根据等价问题的自身特点,将其转化为形式更简单的(Q)问题,最后,再利用不等式的性质,将(Q)问题转化为一系列易于求解的几何规划问题,数值结果表明了算法的可行性和有效性.另外,该模型也可以应用于特殊模型的求解.

参 考 文 献

[1] BARRODALE I.Best rational approximation and strict quasiconvexity[J].SIAM Journal on Numerical Analysis,1973,10(1):8-12.

[2] LU X L,SHI W L,ZHOU W.Decomposition based least squares iterative estimation algorithm for two-input single-output output error systems[J].Journal of the Franklin Institute,2014,351(12):5511-5522.

[3] DING F.Decomposition based fast least squares algorithm for output error systems[J].Signal Process,2013,93:1235-1242.

[4] WANG C F,JIANG Y,SHEN P P.A new branch-and-bound algorithm for solving minimax linear fractional programming[J].Journal of Mathematics,2018,38(1):113-123.

[5] FENG Q G,JIAO H W,MAO H P.A Deterministic Algorithm for Min-max and Max-min Linear Fractional Programming Problems[J]. International Journal of Computational Intelligence Systems,2011,4:134-141.

[6] ZARE A,ASHRAFI A,XIA Y.Quadratic double-ratio minimax optimization[J].Operations Research Letters,2021,49:543-547.

[7] 申培萍,陈晓.一类 Minmax 分式问题的迭代算法[J].河南师范大学学报(自然科学版),2018,46(1):16-22.
SHEN P P,CHEN X.An iterative algorithm for a class of Minmax fractional programming problems[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition),2018,46(1):16-22.

[8] MASAO F.非线性最优化基础[M].林贵华译.北京:科学出版社,2011.

[9] JIAO H W,LIU S Y.A new linearization technique for minimax linear fractional programming[J].International Journal of Computer Intelligence Systems,2011,4(2):134-141.

[10] ZHAO Y F,LIU S Y,JIAO H W.A new branch and bound algorithm for minimax ratios problems[J].Open Mathematics,2017,15(1):840-851.

Iterative a geometric programming method for solving a class of minimax fractional optimization problems

Shen Peiping, Wang Yafei, Wu Dianxiao

(School of Mathematics and Statistics, North China University of Water Resources and Electric Power, Zhengzhou 450046, China)

Abstract: This paper studies a class of Minimax fractional programming problems. Firstly, by introducing variables, the problem (MFP) is equivalently converted to problem (EP1). Secondly, the constraint function in the problem (EP1) is organized into a positive term. Then, by using the properties of special inequalities, problem (EP1) is transformed into an easy-to-solve geometric programming problem (GP), and the optimal solution of the original problem is obtained by solving a series of (GP) problems. Finally, the iterative algorithm for solving problem (MFP) and the convergence analysis of the algorithm are given, and the numerical results show that the algorithm is feasible and effective.

Keywords: Minimax fractional programming; geometric programming; iterative algorithm

[责任编校 陈留院 赵晓华]