

4 团簇奇异态的移动特性

朱云,黄竞雄,谢琛,刘维清

(江西理工大学 理学院,江西 赣州 341000)

摘要:奇异态是一种包含同步振子区域和非同步振子区域的时空动力学行为,因其对初始条件的敏感性和“存活时间”较短而难以被捕捉到.在本文中,采用随机的初始条件,合适的耦合范围和相移参数,在非局域相位耦合振子系统中发现了缓慢移动的 4 团簇奇异态.并且同步团簇的移动速度随着系统尺寸的增加呈指数减小的趋势,最后达到稳定的 4 团簇奇异态.最后,使用 Ott-Antonsen 分析方法,再现了移动 4 团簇奇异态的时空动力学行为.

关键词:奇异态;非局域;同步;耦合振子;非线性动力学

中图分类号:O415

文献标志码:A

耦合振子同步动力学是非线性动力学的重要问题.它与自组织行为和生物功能的产生机制有关.其中,在系统走向同步的过程中发现了丰富的动力学特性.如:爆发式同步^[1-3]、斑图^[4-5]和空间相干和非相干的共存态^[6].此态因其外貌类似将古希腊神话中不同生物组织的不同部位组合在一起而命名它为“奇异态”^[7].迄今为止,借助光振子^[8]、化学振子^[9-10]和电子电路^[11]等实验对奇异态大量的探索与研究,以挖掘奇异态在实际应用^[12-13]中的潜能.起初,学者们认为奇异态只存在于非局域耦合系统中^[14-29],但最近许多研究表明奇异态同样存在于全局耦合系统^[10,30-31]和局域耦合系统中^[32-36].

奇异态是去同步转向完全同步的过渡态,常出现在空间均匀的系统.理论^[15]和实验^[16]证实了其寿命随系统尺寸增大呈指数增长趋势.由于自然系统中系统尺寸是有限的,因此可以观察到奇异态的各种空间特征,例如:移动奇异态^[19,36]、呼吸奇异态^[21,24,37-38]、旋转螺旋波奇异态^[23,33]和不完全移动奇异态^[35].此外,奇异态可能与完全同步共存导致奇异态的观察总是受到初始条件的影响.因此,在非局域耦合振荡器中,奇异态的存在强烈依赖于耦合核函数和初始条件.例如,Abrams 等人^[6]在高斯型初始条件下发现了具有余弦核的传统单簇奇异态.采用对称高斯型初始条件,在耦合振荡器中观察到 2 团簇奇异态^[14].利用吸引域的稳定性^[38]可以有效地测量与同步状态共存的奇异状态的鲁棒性,但获得稳定的奇异态仍然是一个重要的课题.目前为止,许多关于获得稳定奇异态方法已被提出:通过向耦合系统^[17]添加外部驱动力或引入延时机^[25,40]获得稳定的 4 团簇奇异态;在耦合极限环^[25]和 FitzHugh-Nagumo (FHN) 振子^[41-43]中提出共轭变量耦合方案;选择合适的相互作用网络耦合结构和指数初始条件^[27];构建含有特殊固有频率分布的纯局域耦合振子系统方案.这些都可以观察到稳定的多团簇奇异态.在本文中,建立了无延迟非局域耦合的全同 Kuramoto 振子系统,并且得到了与初始条件无关的 4 团簇奇异态.然而,4 团簇奇异态的传播速度较慢,这与上述文献中观察到的大多数奇异态相似.缓慢移动的特点预计与系统大小有关.为了明确系统尺寸对奇异态的影响,研究了非局域耦合振子环中 4 团簇奇异态的稳定性.结果表明,随着系统尺寸的增大,系统的移动速度呈指数级下降.这表明 4 团簇奇异态在热力学极限下是稳定的.最后在 Ott-Antosen 分析方法的帮助下,与数值模拟结果进行了比较.

1 模型简介

本研究中一维非局域耦合振子系统方程为

收稿日期:2019-04-29;修回日期:2019-06-20.

基金项目:国家自然科学基金(11405075)

作者简介(通信作者):朱云(1975-),男,江西赣州人,江西理工大学大学副教授,博士,研究方向为非线性系统,E-mail: zhuyun_84@126.com.

$$\dot{\theta}(x, t) = \omega_0 - \int_{-\pi}^{\pi} G(x-y) \sin(\theta(x, t) - \theta(y, t) + \alpha) dy, \quad (1)$$

其中, $\theta(x, t)$ 表示 t 时刻位于 x 点出的振子的相位, $x \in [-\pi, \pi]$. 一般来说, 固有频率 ω_0 设置为 0, 相移参数 α 取值为 $[0, \pi/2]$. 在周期性边界条件下, 引入一个非负的, 对称的偶函数^[17,21] $G(x) = \begin{cases} (2\pi r)^{-1}, & x \leq \pi r \\ 0, & x > \pi r \end{cases}$, 其中, $r \in (0, 1]$ 表示耦合范围. 接着, 对 x 进行离散化处理 $x_i = (2i-1)\pi/N (i = 1, \dots, N)$. (1) 式可以离散化为

$$\dot{\theta}(t) = \omega - \frac{1}{2R} \sum_{j=i-R}^{i+R} \sin(\theta_i(t) - \theta_j(t) + \alpha), \quad (2)$$

其中, $R = \frac{Nr}{2}$, $\theta_i(t) \equiv \theta(x_i, t)$. 为了研究同步动力学行为, 引入复序参量 $|Y(x, t)| e^{i\Theta(x, t)} = \int_{-\pi}^{\pi} G(x-y) e^{i\theta(y, t)} dy$, 其中, 序参量 $|Y(x, t)|$ 表示振子的同步程度, 序参量 $\Theta(x, t)$ 表示局域平均相位. 当 $|Y(x, t)| = 1$ 时, 系统中所有振子处于完全同步的状态; 当 $|Y(x, t)| = 0$ 时, 系统中所有振子处于完全非同步的状态. 在奇异态系统中, 相干振子的 $|Y(x, t)|$ 大于非相干振子的 $|Y(x, t)|$.

2 数值模拟

系统尺寸 $N=500$, 耦合范围 $r=0.18$, 相移参数 $\alpha=1.54$, 固定步长 $dt=0.02$, 且初始条件 $\theta(x, 0)$ 均匀随机分布在 $[0, 2\pi]$ 之间, 采用 4 阶 Runge-Kutta 算法对 (3) 式进行数值模拟. 从图 1(a) 中可以看到 4 个被非相干态分隔开的同步团簇, 即 4 团簇奇异态. 在同一个团簇上的振子同相, 位于相邻团簇上的振子互相反相, 与此同时, 非相干态的振子均处于去同步状态. 为了更好地分析奇异态的时空动力学行为, 计算了相位 $\theta(x, t)$, 瞬时角速度 $\dot{\theta}$ 和局域平均场量 $|Y(x, t)|$ 的时空分布图, 如图 1(c-e) 所示. 从图 1(c) 可以看出, 系统中存在 4 个同步区域, 在每一个同步区域上的振子含有相同的瞬时频率, 对应着图 1(d) 中的位置. 图 1(b) 表明了同步区域中的振子的图 1(e) 表明同步区域的振子的 $|Y(x, t)|$ 大于非相干区域振子的 $|Y(x, t)|$. 图 1 结果表明 4 团簇奇异态满足经典奇异态的特点, 且 4 团簇的状态似乎比较稳定.

此外, 为了探究耦合范围和相移参数对 4 团簇奇异态的稳定性的影响, 通过改变这 2 个参数, 观察不同参数下系统的表现形式. 结果表明: 当 $\alpha < 1.48$ 时, 此时, 奇异态失去了稳定性, 此时系统主要形式是伸展态, 如图 2(b) 所示; 当 α 从 1.50 增长到 1.54, $r \in (0.15, 0.25)$ 时, 系统得主要形式是 4 团簇奇异态. 另外, 还发现了 2 团簇奇异态, 其参数空间分布在 $\alpha \in (1.50, 1.56)$, 如图 2(c) 所示.

但是, 仔细观察 4 团簇奇异态的时空斑图时发现同步团簇中的振子的位置随着时间的变化发生了偏移. 为了探究同步振子位置偏移的原因, 改变系统尺寸 N , 在较长的演化时间内, 观察同步振子位置偏移的变化量. 如图 3 所示. 随着尺寸的增加, 同步振子的偏移速度在逐渐较小, 因此可以断定同步振子位置偏移速度与尺寸相关. 为了定量描述二者之间的关系, 引入变量 Δ 表示同步振子的平均移动速度, 其定义为 $\Delta = (X_f - X_0)/T$, X_f 和 X_0 分别表示同一个同步团簇中心振子的截止位置和起点位置, T 表示从起点出发到截止点所经历的时间. 计算结果如图 4(a) 所示, $\Delta \sim e^{-0.004N}$. 随着系统尺寸的增加, 同步振子的移动速度呈指数趋势衰减, 当达到热力学极限 ($N \rightarrow \infty$) 时, 系统呈现稳定的 4 团簇奇异态. 此外, 当固定系统尺寸, 改变相移参数 α 和耦合范围参数 r 时, 同步团簇中振子的移动速度几乎不变且二者相等, 如图 4(b) 和 4(c) 所示.

3 分析

为了进一步理解数值模拟的结果, 使用 Ott-Antosen^[44-46] 方法进行理论分析. 引入概率密度函数 $f(x, \omega, \theta, t)$, 其满足方程^[44]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(fv)}{\partial \theta} = 0, \quad (3)$$

其中,

$$v = \omega - \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(x-y) \sin(\theta - \theta' + \beta) f(y, \theta', t) d\theta' dy. \quad (4)$$

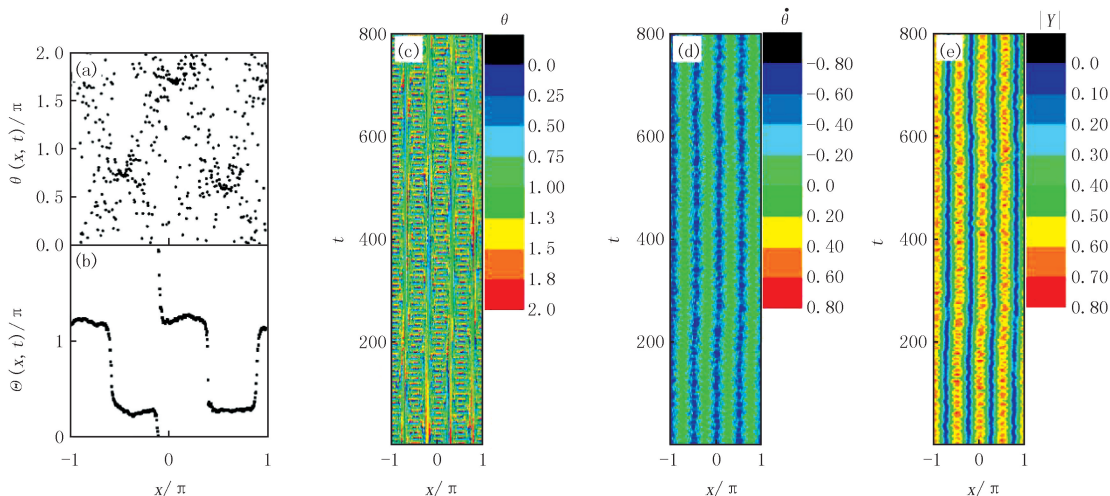
且 $\theta := \theta(x), \theta' := \theta(y)$, 所以局域复序参量可以重新定义为

$$Y = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(x-y) e^{i\theta'} f(y, \theta', t) d\theta' dy, \tag{5}$$

从而(4)式可以化简为

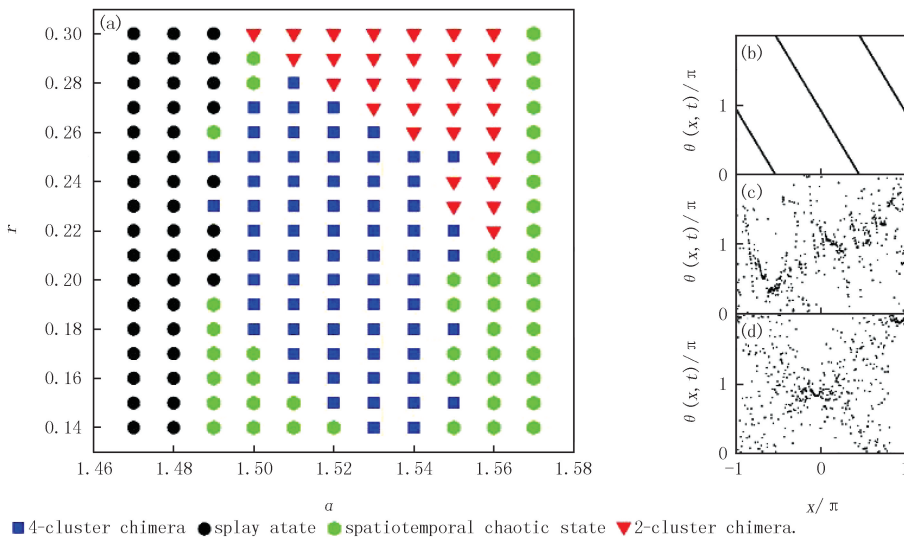
$$v = \omega - \frac{i}{2} (Y^* e^{i(\theta+\alpha)} + Y e^{-i(\theta+\alpha)}), \tag{6}$$

Y^* 表示 Y 的复共轭形式.正如前面所述,所有振子含有相同的固有频率($\omega=0$).



(a) 相位斑图快照; (b) 局域序参量的相位分布快照图;
(c), (d) 和 (e) 相位 $\theta(x, t)$, 瞬时角速度 $\dot{\theta}$ 和局域平均场量 $|Y(x, t)|$ 的时空等值图.

图 1 $\alpha=1.54, r=0.18, N=500$ 时的 4 团簇奇异态
Fig.1 4-cluster chimera state with $\alpha=1.54, r=0.18, N=500$



(a) 参数空间中多种状态映射图, 由 $t=28\ 000$ 后对 1 000 时间单位进行平均得到; (b) 伸展态 ($\alpha=1.46, r=0.21$); (c) 空时混沌态 ($\alpha=1.49, r=0.17$); (d) 2 团簇奇异态 ($\alpha=1.54, r=0.17$).

图 2 不同相位斑图及其快照
Fig.2 Different phase patterns and their snapshots

根据 Ott-Antosen 得

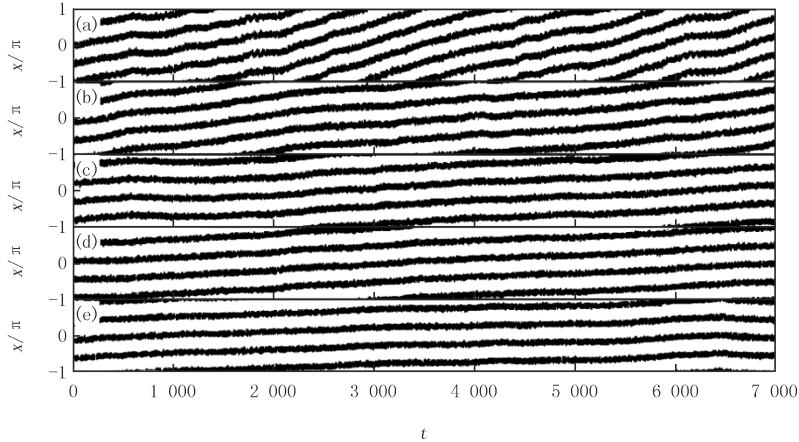
$$f(x, \omega, \theta, t) = \frac{1}{2\pi} (1 + \sum_{n=1}^{\infty} ((a(x, t) e^{i\theta})^n + c.c.)), \tag{7}$$

将(6)和(7)代入到(3)和(5)式中得

$$\frac{\partial a(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}(Y^* e^{ia} - Y a^2 e^{-ia}), \tag{8}$$

$$Y = \int_{-\pi}^{\pi} G(x-y) a^*(y,t) dy, \tag{9}$$

通过对(8~9)式进行大量的数值模拟得到 $|Y|$ 和 $\Theta(x)$ 的时间演化等值图(图5).从图5中可以看到4个同步区域,图1的核心性质得到重现.



(a)N=400; (b)N=500; (c)N=600; (d)N=700; (e)N=800.

图3 同步团簇中振子的位置随N变化的关系,散点对应同步团簇振子($\alpha=1.54, r=0.18$)

Fig.3 Traveling motion of the four coherent clusters with increasing N obtained from numerical simulations with $\alpha=1.54, r=0.18$; dots denote the location of the synchronized oscillators in the coherent clusters

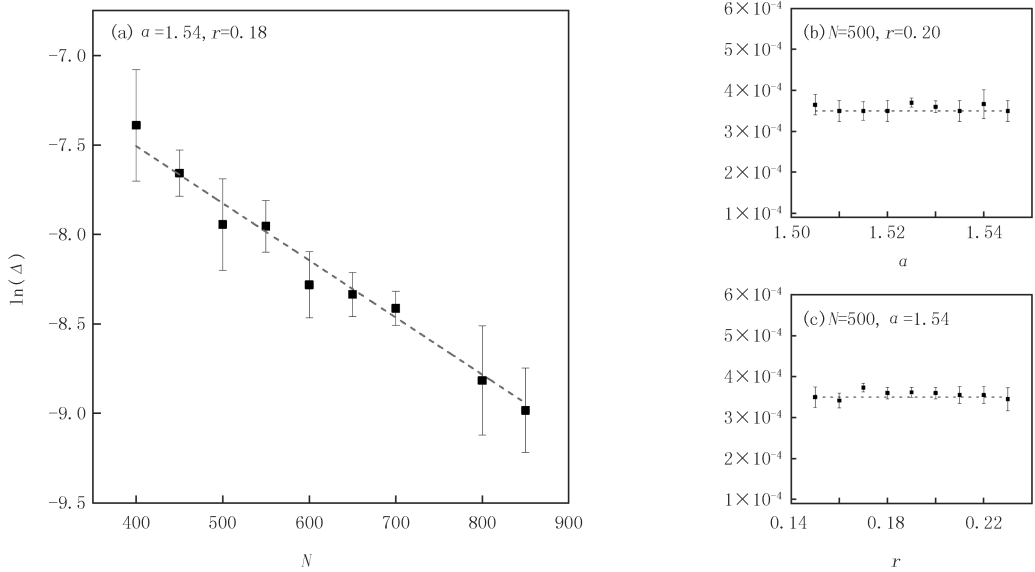


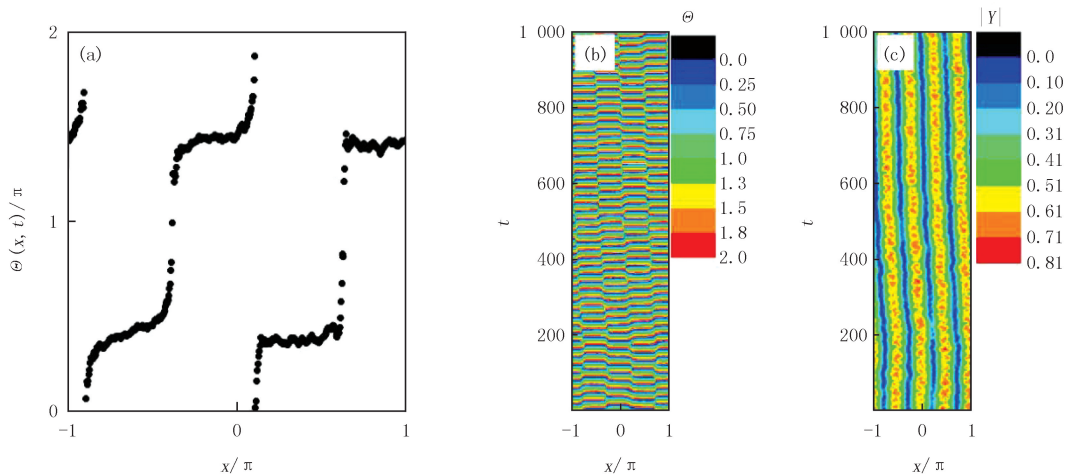
图4 4团簇中同步振子的平均移动速度与系统参数的关系

Fig.4 The relationships between averaged traveling speed of the the 4 coherent clusters and system parameters

4 结 论

本文研究了一维非局域耦合全同 Kuramoto 振子系统中4团簇奇异态的时空动力学行为.4团簇奇异态呈现了3个特点:1)同一个相干团簇中的振子同相,相邻相干团簇中的振子反相.这个特点契合了经典奇异态的相位特点.2)在小尺寸系统中,4团簇奇异态中的同步振子的位置会随着时间偏移,通过增加系统尺寸

和时间间隔,计算不同系统尺寸下同步振子的平均移动速度,发现同步振子的偏移是由尺寸效应引起的,且同步振子的平均移动速度与系统尺寸满足 $\Delta \sim e^{-0.004N}$,即同步振子的偏移会在热力学极限($N \rightarrow \infty$)消失,从而达到稳定状态.3)通过分别改变耦合范围参数和相移参数,系统呈现出丰富的动力学行为,如伸展态,2 团簇奇异态等.除此之外,使用 Ott-Antosen 分析方法对 4 团簇奇异态动力学特点进行了较好的复现和验证.



(a) $\theta(x)$ 的快照图; (b) 和 (c) $\theta(x)$ 和 $|Y|$ 的时间演化图.

图 5 4 团簇奇异态的时空动力学图 ($\alpha=1.54, r=0.18, N=500$)

Fig.5 The spatiotemporal dynamics for the 4-chimera states ($\alpha=1.54, r=0.18, N=500$)

参 考 文 献

- [1] Tang E, Bassett D S. Colloquium: Control of dynamics in brain networks[J]. Phys Rev Lett, 2011, 90(3): 031003.
- [2] Ji P, Peron T K D M, Menck P J, et al. Cluster explosive synchronization in complex networks[J]. Phys Rev Lett, 2013, 110(21): 218701.
- [3] 张伟婧, 刘维清, 陈伟. 规则网络中流耦合作用对爆发式同步的影响[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2018, 46(1): 50-59.
- [4] Basu S, Gerchman Y, Collins C H, et al. A synthetic multicellular system for programmed pattern formation[J]. Nature, 2005, 434(7037): 1130.
- [5] Bois J S, Jülicher F, Grill S W. Pattern formation in active fluids[J]. Phys Rev Lett, 2011, 106(2): 028103.
- [6] Kuramoto Y, Battogtokh D. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators[EB/OL]. [2019-02-22]. [https://arXiv preprint cond-mat/0210694](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0210694), 2002.
- [7] Abrams D M, Strogatz S H. Chimera states for coupled oscillators[J]. Phys Rev Lett, 2004, 93(17): 174102.
- [8] Viktorov E A, Habruseva T, Hegarty S P, et al. Coherence and incoherence in an optical comb[J]. Phys Rev Lett, 2014, 112(22): 224101.
- [9] Tinsley M R, Nkomo S, Showalter K. Chimera and phase-cluster states in populations of coupled chemical oscillators[J]. Nat Phys, 2012, 8(9): 662.
- [10] Schmidt L, Schönleber K, Krischer K, et al. Coexistence of synchrony and incoherence in oscillatory media under nonlinear global coupling[J]. Chaos, 2014, 24(1): 013102.
- [11] Gambuzza L V, Buscarino A, Chessa S, et al. Experimental investigation of chimera states with quiescent and synchronous domains in coupled electronic oscillators[J]. Phys Rev E, 2014, 90(3): 032905.
- [12] Davidenko J M, Pertsov A V, Salomonsz R, et al. Stationary and drifting spiral waves of excitation in isolated cardiac muscle[J]. Nature, 1992, 355: 349-351.
- [13] Rattenborg N C, Amlaner C J, Lima S L. Behavioral, neurophysiological and evolutionary perspectives on unihemispheric sleep[J]. Neurosci Biobehav Rev, 2000, 24(8): 817-842.
- [14] Zhu Y, Li Y, Zhang M, et al. The oscillating two-cluster chimera state in non-locally coupled phase oscillators[J]. EPL, 2012, 97(1): 10009.
- [15] Wolfrum M, Omelchenko E. Chimera states are chaotic transients[J]. Phys Rev E, 2011, 84(1): 015201.
- [16] Rosin D P, Rontani D, Haynes N D, et al. Transient scaling and resurgence of chimera states in networks of Boolean phase oscillators[J]. Phys Rev E, 2014, 90(3): 030902.
- [17] Omelchenko E, Wolfrum M, Maistrenko Y L. Chimera states as chaotic spatiotemporal patterns[J]. Phys Rev E, 2010, 81(6): 065201.
- [18] Zhu Yun, Zheng Zhigang, Yang Junzhong. Four-cluster chimera state in non-locally coupled phase oscillator systems with an external potential[J]. Chin Phys B, 2013, 22(10): 100505.

- [19] Xie J, Knobloch E, Kao H C. Multicluster and traveling chimera states in nonlocal phase-coupled oscillators[J]. *Phys Rev E*, 2014, 90(2): 022919.
- [20] Suda Y, Okuda K. Persistent chimera states in nonlocally coupled phase oscillators[J]. *Phys Rev E*, 2015, 92(6): 060901.
- [21] Suda Y, Okuda K. Breathing multichimera states in nonlocally coupled phase oscillators[J]. *Phys Rev E*, 2018, 97(4): 042212.
- [22] Choe C U, Kim R S, Ri J S. Symmetry-broken coherent state in a ring of nonlocally coupled identical oscillators[J]. *Phys Rev E*, 2018, 98(1): 012210.
- [23] Guo S, Dai Q, Cheng H, et al. Spiral wave chimera in two-dimensional nonlocally coupled Fitzhugh-Nagumo systems[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2018, 114: 394-399.
- [24] Bolotov M I, Smirnov L A, Osipov G V, et al. Breathing chimera in a system of phase oscillators[J]. *JETP Letters*, 2017, 106(6): 393-399.
- [25] Sethia G C, Sen A, Atay F M. Clustered chimera states in delay-coupled oscillator systems[J]. *Phys Rev Lett*, 2008, 100(14): 144102.
- [26] Vüllings A, Hizanidis J, Omelchenko I, et al. Clustered chimera states in systems of type-I excitability[J]. *New J Phys*, 2014, 16(12): 123039.
- [27] Yao N, Huang Z G, Grebogi C, et al. Emergence of multicluster chimera states[J]. *Sci Rep*, 2015, 5(1): 12988.
- [28] Gu C, St-Yves G, Davidsen J. Spiral wave chimeras in complex oscillatory and chaotic systems[J]. *Phys Rev Lett*, 2013, 111(13): 134101.
- [29] Yao N, Huang Z G, Ren H P, et al. Self-adaptation of chimera states[J]. *Phys Rev E*, 2019, 99(1): 010201.
- [30] Schmidt L, Krischer K. Chimeras in globally coupled oscillatory systems: From ensembles of oscillators to spatially continuous media[J]. *Chaos*, 2015, 25(6): 064401.
- [31] Röhm A, Böhm F, Lüdge K. Small chimera states without multistability in a globally delay-coupled network of four lasers[J]. *Phys Rev E*, 2016, 94(4): 042204.
- [32] Laing C R. Chimeras in networks with purely local coupling[J]. *Phys Rev E*, 2015, 92(5): 050904.
- [33] Li B W, Dierckx H. Spiral wave chimeras in locally coupled oscillator systems[J]. *Phys Rev E*, 2016, 93(2): 020202.
- [34] Kundu S, Majhi S, Bera B K, et al. Chimera states in two-dimensional networks of locally coupled oscillators[J]. *Phys Rev E*, 2018, 97(2): 022201.
- [35] Bera B K, Ghosh D, Banerjee T. Imperfect traveling chimera states induced by local synaptic gradient coupling[J]. *Phys Rev E*, 2016, 94(1): 012215.
- [36] Dudkowski D, Czołczyński K, Kapitaniak T. Traveling chimera states for coupled pendula[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 95(3): 1859-1866.
- [37] Abrams D M, Mirollo R, Strogatz S H, et al. Solvable model for chimera states of coupled oscillators[J]. *Phys Rev Lett*, 2008, 101(8): 084103.
- [38] Hong H. Periodic synchronization and chimera in conformist and contrarian oscillators[J]. *Phys Rev E*, 2014, 89(6): 062924.
- [39] Rakshit S, Bera B K, Perc M, et al. Basin stability for chimera states[J]. *Sci Rep*, 2017, 7(1): 2412.
- [40] Larger L, Penkovsky B, Maistrenko Y. Virtual chimera states for delayed-feedback systems[J]. *Phys Rev Lett*, 2013, 111(5): 054103.
- [41] Omelchenko I, Omel'chenko E, Hövel P, et al. When nonlocal coupling between oscillators becomes stronger: patched synchrony or multichimera states[J]. *Phys Rev Lett*, 2013, 110(22): 224101.
- [42] Omelchenko I, Provata A, Hizanidis J, et al. Robustness of chimera states for coupled Fitzhugh-Nagumo oscillators[J]. *Phys Rev E*, 2015, 91(2): 022917.
- [43] Huo S, Tian C, Kang L, et al. Chimera states of neuron networks with adaptive coupling[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 96(1): 75-86.
- [44] Ott E, Antonsen T M. Long time evolution of phase oscillator systems[J]. *Chaos*, 2009, 19(2): 023117.
- [45] Ott E, Antonsen T M. Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators[J]. *Chaos*, 2008, 18(3): 037113.
- [46] Laing C R. The dynamics of chimera states in heterogeneous Kuramoto networks[J]. *Physica D*, 2009, 238(16): 1569-1588.

Traveling performances of four-cluster Chimera states

Zhu Yun, Huang Jingxiong, Xie Chen, Liu Weiqing

(School of Science, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou 341000, China)

Abstract: Chimera states, coexistence of spatially separated coherent and incoherent motion, exhibit short life time or initial condition dependent characteristics in non-locally coupled identical coupled oscillators, which makes it difficult to observe. Here we found a kind of slowly traveling four-cluster chimera state in non-locally coupled oscillators with proper parameters of coupling range and initial phase lag. The speed of the traveling four-cluster chimera state exponentially decreases to the increment of system size which lead to almost stable four-cluster chimera state for large system size. The analytical results based on the Ott-Antonsen method verified the numerical results well. Moreover, a kind of splay state is observed as the Chimera state loses its stability.

Keywords: Chimera state; non-local; synchronization; coupled oscillator; nonlinear dynamics

[责任编辑 杨浦 王凤产]