文章编号:1000-2367(2018)02-0001-09 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2018.02.001

具有记忆项的非自治热弹板的一致吸引子的存在性

秦玉明,董小磊

(东华大学 理学院,上海 201620)

摘 要:主要研究二维具有记忆项的非自治热弹板的一致吸引子及解的存在性和解衰减性问题.首先利用发展方程中的半群理论证明了解的存在性;接着通过构造李雅普诺夫泛函证明了该系统的衰减性;最后借助构造压缩函数验证了轨道紧性,从而得到了一致吸引子的存在性.

关键词:热弹板;吸引子;整体解;衰减性;压缩函数

中图分类号:O175 **文献标志码**:A

假设 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 是光滑有界区域,未知函数 $u:\Omega\times[0,\infty)\to\mathbf{R}^+$ 和 $\vartheta:\Omega\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$. 在本文中,研究二维具有记忆项的线性非自治热弹板的吸引子、整体解和衰减性的存在性.

$$
\begin{cases}
u_{tt}-\omega\Delta u_{tt}+\Delta(\Delta u+\vartheta)=f(x,t), & (1)\\
\vartheta_t+\int_0^\infty k(s)[c\vartheta(t-s)-\Delta\vartheta(t-s)]\mathrm{d}s-\Delta u_t=g(x,t), & (2)\\
u(t)=\Delta u(t)=0,\ x\in\partial\Omega,t\geq 0, & (3)\\
\vartheta(t)=0,\ x\in\partial\Omega,t\in\mathbf{R}^+, & (4)\\
(u(0),u_t(0),\vartheta(0))=(u_0,u_1,\vartheta_0),\ x\in\Omega, & (5)\\
\vartheta(-s)=\psi(s),(x,t)\in\Omega\times\mathbf{R}^+, & (6)
\end{cases}
$$

在区域 $\Omega\times\mathbf{R}^+$,其中,$\mathbf{R}^+=(0,+\infty)$.$\omega\geq 0$,$c\geq 0$,$k:[0,+\infty)\to\mathbf{R}^+$ 是正的有界光滑凸函数且在无穷远处为零.且 $u_0,u_1,\vartheta_0:\Omega\to\mathbf{R}^+$ 是已知函数,$\psi:\Omega\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是已知函数.其中 $u(x,t)$ 表示板的垂直位移,$\vartheta(x,t)$ 表示平衡参照值的变化场温度.

回顾一些与含有记忆项热弹板相关的结果. 在自治系统中,并且 $\omega=0$,文献[1]研究了具有记忆项的第三类线性热弹板的能量衰减性.文献[2]研究了抽象具有记忆项的线性热弹板的稳定性. 文献[3]研究了具有记忆项的线性热弹板的能量衰减,但是它缺乏指数稳定性. 在文献[4]中,作者研究了多项式衰减当 $\omega=0$,$\sigma\in[0,\frac{1}{2})$. 文献[5]证明了系统(1)~(6)式当 $\omega=0$ 生成一个强连续半群 $S_{0,\varepsilon}(t)$ 作用于一个适当的(拓展的)相空间使得当时间趋于无穷时任何轨迹趋于零(文献[5],定理 4.1).然而,不管记忆核在无穷远处的变化有多快但 $S_{0,\varepsilon}(t)$ 不满足指数稳定性(文献[5],定理 5.4)当 $\omega\geq 0$.

在 k 满足适当的假设的时候,如果初始值为零也就是说 $\psi\equiv 0$,它可以被证明系统(1)~(6)式当 $\omega\geq 0$ 的能量以指数衰减到零.当 $c=0$ 时,已被文献[6]研究.在文献[7]中,当 $\omega\geq 0$,Grasselli 和 Squassina 给出了两个结果,在那篇文章中的第一个结果是问题(1)~(6)式生成了一个指数稳定半群(文献[6],定理 3.2),第二个结果与问题(1)~(6)式的结果和如果 k 在零处满足 Dirac 测度并且具有相同的初边值条件的结果有很大的联系.

收稿日期:2017-09-27;**修回日期**:2017-12-20.

基金项目:国家自然科学基金(11671075)

作者简介:秦玉明(1963-),男,河南焦作人,东华大学教授,博士生导师,研究方向为偏微分方程.

通信作者:董小磊,E-mail:Xiaolei_Dong0908@163.com.

1 预备知识

在一个实值空间 $\mathscr{H}$ 中,用 $B_H(R)$ 表示在 $\mathscr{H}$ 中以半径为 $R \geq 0$,圆心在原点的球.定义正定算子 A 和 B,在空间 $(L^2(\Omega),\langle\cdot,\cdot\rangle,\|\cdot\|)$ 令 $A=-\Delta$,$B=c\mathscr{I}-\Delta$,且区域 $D(A)=D(B)=H_0{}^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$,$\mathscr{I}$ 表示恒等算子,$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示在 $L^2(\Omega)$ 上的内积,并且 $\|\cdot\|$ 是 $L^2(\Omega)$ 上的范数.

接下来介绍 Hilbert 空间的标量积 $H^r=D(A^{r/2})$,$r\in\mathbf{R}^+$,具有内积 $\langle u_1,u_2,\rangle_{H^2}=\langle A^{r/2}u_1,A^{r/2}u_2\rangle$.

当然,算子 B 可以诱导出一个等价内积 H^r.把 λ_1 看作 A 的第一特征值,对于任何的 $s>r$.

很明显,可以得到如下不等式

$$\|A^{r/2}w\| \leq \lambda_1^{(r-s)/2}\|A^{s/2}w\|, \forall w\in D(A^{s/2}). \tag{7}$$

假设 $k:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 是光滑递减函数,为了方便,规定

$$\int_0^\infty k(s)\mathrm{d}s=1, k(0)=1. \tag{8}$$

假设 $\mu(s)=-k'(s)$,$\forall s\in\mathbf{R}^+$,其中,假设 μ 满足

$$\mu\in C^1(\mathbf{R}^+)\cap L^1(\mathbf{R}^+), \tag{9}$$

$$\mu(s)\geq 0, \forall s\in\mathbf{R}^+, \tag{10}$$

$$\mu'(s)\leq 0, \forall s\in\mathbf{R}^+. \tag{11}$$

上面对 $\mu(s)$ 的假设不恒等于零.

现在考虑 Hilbert 空间的权重 $M^r=L^2(\mathbf{R}^+,H^{r+1})$,$r\in\mathbf{R}^+$,等价于内积 $\langle\eta_1,\eta_2\rangle_{M^r}=\int_0^\infty\mu(s)\langle B^{(1+r)/2}\eta_1(s),B^{(1+r)/2}\eta_2(s)\rangle\mathrm{d}s$,并且介绍内积空间 $\mathscr{H}=H^2\times H^1\times L^2\times\mathscr{M}^0$,且范数为 $\|(u,u_t,\vartheta,\eta)\|_{\mathscr{H}}^2=\|u\|_{H^2}^2+\|u_t\|_{L^2}^2+\omega\|\vartheta\|_{L^2}^2+\|\eta\|_{\mathscr{M}^0}^2$,假设 T 是空间 $\mathscr{M}^0$ 上的线性算子,在区域 $D(T)=\{\eta\in\mathscr{M}^0\mid\eta\in\mathscr{M}^0,\eta(0)=0\}$,定义 $T\eta=-\eta_s$,$\eta\in D(T)$,其中,η_s 表示 η 关于变量 s 的偏导数.T 是右平移半群在 $\mathscr{M}^0$ 的极小生成元.由(11)式得

$$\langle T\eta,\eta\rangle_{\mathscr{M}^0}=\int_0^\infty\mu'(s)\|B^{1/2}\eta(s)\|^2\mathrm{d}s\leq 0, \forall\eta\in D(T). \tag{12}$$

下面介绍关于 ϑ 的过去时间的积分,

$$\eta^t(s)=\int_0^s\vartheta(t-y)\mathrm{d}y, (s,t)\in\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+. \tag{13}$$

对(13)式关于时间 t 求偏导得,$\eta_t^t(s)=-\eta_s^t(s)+\vartheta(t)$,$t\in\mathbf{R}^+$.根据(13)式,$\eta$ 的初边值条件为 $\eta^0(s)=\int_0^s\vartheta(-y)\mathrm{d}y$,$\eta^t(0)=0$,$\forall t\geq 0$.

下面介绍要研究的问题.

假设 $(u_0,u_1,\vartheta_0,\eta_0)\in\mathscr{H}$,可以找到 $(u,u_t,\vartheta,\eta)\in C([0,\infty],\mathscr{H})$ 是下面问题的解,

$$\begin{cases} u_{tt}+\omega Au_{tt}+A(Au-\vartheta)=f(x,t), & (14)\\ \vartheta_t+\int_0^\infty\mu(s)B\eta(s)\mathrm{d}s+Au_t=g(x,t), & (15)\\ \eta_t=T\eta+\vartheta, & (16)\end{cases}$$

对于任意的 $t\in\mathbf{R}^+$,满足初值条件 $(u(0),u_t(0),\vartheta(0),\eta^0)=(u_0,u_1,\vartheta_0,\eta_0)$.

问题(14)~(16)式是系统(1)~(6)式的初边值问题的抽象形式.特别的,可以把系统(14)~(16)式改写成下面强连续半群算子抽象形式.事实上,假设 $\zeta(t)=(u(t),v(t),\vartheta(t),\eta^t)'$,可以把系统(14)~(16)式改写成如下抽象形式

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t}+\mathscr{L}\zeta=F, t>0,\\ \zeta(0)=\zeta_0,\end{cases} \tag{17}$$

其中,$\mathscr{L}$ 是如下定义的线性算子

$$\mathscr{L}U=\mathscr{L}\begin{pmatrix}u\\v\\\vartheta\\\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v\\-(\mathscr{I}+\omega A)^{-1}A(Au-\vartheta)\\-Av-\int_0^\infty\mu(s)B\eta(s)\mathrm{d}s\\\vartheta+T\eta\end{pmatrix},F=\begin{pmatrix}0\\f\\g\\0\end{pmatrix},$$

定义在区域 $D(\mathscr{L})=\{(u,v,\vartheta,\eta)\in\mathscr{H}\mid Au-\vartheta\in H^2,v\in H^2,\vartheta\in H^1,\int_0^\infty\mu(s)B\eta(s)\mathrm{d}s\in L^2,\eta\in D(T)\}$.

引理 1　设 $\mathscr{A}$ 是定义在 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上的线性算子，即 $\mathscr{A}:D(\mathscr{A})\subset\mathscr{H}\to\mathscr{H}$.那么 $\mathscr{A}$ 为最大单调算子的充要条件是：(i) $Re(\mathscr{A}x,x)\le 0,\forall x\in D(\mathscr{A})$，(ii) $R(\lambda I-\mathscr{A})=\mathscr{H}$.

证明　见参考文献[11].

由参考文献[7]可知，由于记忆项的存在可以证明 $\mathscr{L}$ 是耗散算子，换句话说，$\langle\mathscr{L}w,w\rangle_{\mathscr{H}}\le 0$，并且满足 $R(I-L)=\mathscr{H}$.由引理 1 可知，$\mathscr{L}$ 是 $\mathscr{H}$ 内压缩半群上的极小生成元.

定理 1　假设 $f(x,t),g(x,t)\in C^1([0,+\infty),L^2(0,L))$.则对于任何 $(u_0,v_0,\vartheta_0,\eta_0)\in\mathscr{H}$，问题(1)～(6)式存在唯一的整体解

$$\begin{gathered}u(x,t)\in C^2([0,\infty),H^2)\cap C^1([0,\infty),L^2)\cap C([0,\infty),H^4),\\\vartheta(x,t)\in C^1([0,\infty),L^2)\cap C([0,\infty),H_0{}^1\cap H^2),\\\eta(x,t)\in C^1([0,\infty),L^2)\cap C([0,\infty),D(T)).\end{gathered}\tag{18}$$

把定理 1 的证明分成下面两个引理来完成.

对于抽象的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+Ay=F(t),\\y(0)=y_0,\end{cases}\tag{19}$$

其中，A 是定义在 Banach 空间 H 稠密子空间上的最大增值算子，有如下引理 2.

引理 2　假设 $F(t)=0$ 并且 $\mathscr{A}$ 是 Banach 空间 $\mathscr{H}$ 的最大增值算子，$y_0\in D(\mathscr{A})$.则问题(19)式有唯一的经典解 $y(t)$ 使得

$$y(t)\in C^1([0,+\infty),\mathscr{H})\cap C([0,+\infty),D(\mathscr{A})).$$

证明　见参考文献[11].

引理 3　假设 $\mathscr{A}$ 是 Banach $\mathscr{H}$ 空间上的最大增值算子，且 $F(t)\in C^1([0,+\infty),\mathscr{H})$，$y_0\in D(\mathscr{A})$.则问题(19)式有唯一的经典解 $y(t)$ 使得 $y(t)\in C^1([0,+\infty),\mathscr{H})\cap C([0,+\infty),D(\mathscr{A}))$，其中可以表示 $y(t)=S(t)y_0+\int_0^t S(t-\tau)F(\tau)\mathrm{d}\tau$.

证明　见参考文献[11].

下面证明定理 1.

证明　由引理 1，取 $\mathscr{A}=\mathscr{L}$，知道 $\mathscr{L}$ 是最大单调算子.通过假设，有 $(u_0,u_1,\theta_0,z_0)^{\mathrm{T}}\in D(\mathscr{L})$，则再由引理 3 可证得定理 1，证毕.

为了证明定理 2，需要用到以下引理.

引理 4　假设 $y(t)\in C^1(\mathbf{R}^+)$，$y(t)\ge 0,\forall t>0$，且满足 $y'(t)\le -C_0y(t)+\lambda(t),\forall t>0$，其中 $0\le\lambda(t)\in L^1(\mathbf{R}^+)$ 和 C_0 是正常数.则有 $\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=0$.

此外，(1)如果 $\lambda(t)\le C_1\mathrm{e}^{-\alpha_0t},\forall t>0$，其中 $C_1>0,\alpha_0>0$ 为常数，则 $y(t)\le C_2\mathrm{e}^{-\alpha t},\forall t>0$，其中 $C_2>0,\alpha>0$ 为常数.(2) 如果 $\lambda(t)\le C_3(1+t)^{-p},\forall t>0$，其中 $p>1,C_3>0$ 为常数，则 $y(t)\le C_4(1+t)^{-p+1},\forall t>0$，其中 $C_4>0$.

证明　见参考文献[12].

定理 2　假设 $f(x,t),g(x,t)\in C^1([0,+\infty),L^2(0,L))$，且 $(u(x,t),\vartheta(x,t),\eta(x,t))$ 是问题(1)～(6)式的解.此外，假设

$$\mu'(s)+\delta\mu(s)\leq 0, \tag{20}$$

则有

$$\lim_{t\to+\infty}E(t)=0. \tag{21}$$

如果 $\|f\|_{L^2}^2+\|g\|_{L^2}^2\leq C_0e^{-\alpha_0 t}$, $\forall t>0$,其中 $C_0>0$ 和 $\alpha_0>0$ 是常数,则存在着正常数 M,α 使得能量 $E(t)$ 满足

$$E(t)\leq M\mathrm{e}^{-\alpha t},\forall t>0. \tag{22}$$

如果 $\|f\|_{L^2}^2+\|g\|_{L^2}^2\leq \dfrac{C'}{(1+t)^p}$, $\forall t>0$,其中常数 $C'>0$, $p>1$,则存在一个正常数 $C^*>0$ 使得

$$E(t)\leq C^*(1+t)^{-p+1},\forall t>0. \tag{23}$$

设 $0<\dfrac{1}{5\rho}<\nu<\rho<\dfrac{2\nu}{4}\sigma<1$ 将被选择的系数,且定义能量扰动泛函为 $\mathscr{F}=E(t)+\rho\Upsilon(t)+\nu\Lambda(t)+\sigma\Pi(t)$,其中 $\Upsilon(t)=\omega\langle u_t,\vartheta(t)\rangle+\langle u_t(t),A^{-1}\vartheta(t)\rangle$, $\Lambda(t)=\langle u_t(t),u(t)\rangle+\omega\langle A^{1/2}u_t(t),A^{1/2}u(t)\rangle$, $\Pi(t)=-\langle\vartheta(t),\eta^t(t)\rangle_{\mathcal{M}^{-1}}$

用 C 表示一个不依赖于 ρ,ν,σ 和 ω 的常数.通过计算可推得 $|\Pi(t)|\leq C(\|\vartheta(t)\|^2+\|\eta^t(t)\|_{\mathcal{M}^0}^2)$.

那么,通过 Schwarz 和 Young 不等式以及(7)式,选择合适充分小的常数 ρ,ν,和 σ,可得

$$\frac{1}{2}\mathscr{F}(t)\leq E(t)\leq 2\mathscr{F}, \tag{24}$$

使得 $E(t)$ 和 $\mathscr{F}$ 转化为等价.

现在让方程(14)式乘以 u_t 在 L^2 中,(15)式乘以 ϑ 在 L^2 中,且(16)式乘以 η 在 $\mathcal{M}^0$ 中,然后把所得结果加在一起,由已知条件(12)式和分部积分法可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t)=2\langle T\eta,\eta\rangle_{\mathcal{M}}+2\int_0^\infty f(x,t)u_t(x,t)\mathrm{d}x+2\int_0^\infty g(x,t)u_t(x,t)\mathrm{d}x\leq-\frac{\delta}{2}\|\eta^t\|_{\mathcal{M}}^2+$$
$$\frac{1}{2}\int_0^\infty\mu'(s)\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\mathrm{d}s+\langle g(x,t),\vartheta\rangle+\langle f(x,t),u_t(t)\rangle,$$

此外,通过直接计算可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Upsilon(t)=\omega\langle u_{tt},\vartheta(t)\rangle+\omega\langle u_t,\vartheta_t(t)\rangle+\langle u_{tt}(t),A^{-1}\vartheta(t)\rangle+\langle u_t(t),A^{-1}\vartheta_t(t)\rangle,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda(t)=\|u_t(t)\|^2+\omega\|A^{1/2}u_t(t)\|-\|Au(t)\|^2+\langle\vartheta(t),Au(t)\rangle,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Pi(t)=-\langle\vartheta_t(t),\eta^t(t)_{\mathcal{M}^{-1}}-\langle\vartheta(t),T\eta^t(t)_{\mathcal{M}^{-1}}-\|\vartheta(t)\|^2,$$

其中,在最后一个等式中,再次利用(12)式,由(14)式乘以 $A^{-1}\vartheta$,此外,关于 ϑ 的方程(15)式分别乘以 ωu_t 和 $A^{-1}u_t$,在 L^2 中可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Upsilon(t)=-\langle\vartheta(t),Au(t)\rangle+\|\vartheta\|^2-\omega\langle u_t(t),\eta^t\rangle_{\mathcal{M}^0}-\omega\|A^{1/2}u_t(t)\|^2-\langle A^{-1}u_t(t),\eta^t\rangle_{\mathcal{M}^0}-$$
$$\|u_t(t)\|^2+\langle A^{-1}\vartheta(t),f(x,t)\rangle+\omega\langle g(x,t),u_t\rangle+\langle g(x,t),A^{-1}u_t\rangle.$$

有关 $E(t)$, Υ, Λ 和 Π 的导数公式,可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{F}(t)\leq-\frac{\delta}{2}\|\eta^t\|_{\mathcal{M}^0}^2+\frac{1}{2}\int_0^\infty\mu'(s)\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\mathrm{d}s-\nu\|Au(t)\|^2-$$
$$(\rho-\nu)\|u_t(t)\|^2-\omega(\rho-\nu)\|A^{1/2}u_t(t)\|^2-(\sigma-\rho)\|\vartheta(t)\|^2+\mathscr{J}(t),$$

其中

$$\mathscr{J}(t)=-(\rho-\nu)\langle\vartheta(t),Au(t)\rangle-\rho\omega\langle u_t(t),\eta^t\rangle_{\mathcal{M}^0}-\rho\langle A^{-1}u_t(t),\eta^t\rangle_{\mathcal{M}^0}-\sigma\langle\vartheta_t(t),\eta^t\rangle_{\mathcal{M}^{-1}}+$$
$$\sigma\langle\vartheta(t),T\eta^t\rangle_{\mathcal{M}^{-1}}+\langle A^{-1}\vartheta(t),f(x,t)\rangle+\omega\langle g(x,t),u_t\rangle+$$
$$\langle g(x,t),A^{-1}u_t\rangle+\langle f(x,t),u_t\rangle+\langle\vartheta(t),g(x,t)\rangle.$$

因此,从上面的不等式可得如下不等式

$$\mathscr{J}(t)\leq\frac{\rho-\nu}{4}\|Au(t)\|^2+4C\rho^2\|u_t(t)\|^2+C(\rho^2+\frac{\sigma^2}{\omega})\omega\|A^{1/2}u_t(t)\|^2+(C\sigma^2+\rho-$$

$$\nu+\frac{2}{5}\sigma)\|\vartheta(t)\|^2+(\frac{\delta}{4}+C\sigma)\|\eta^t\|^2_{\mathscr{M}^0}-\frac{1}{2}\int_0^\infty\mu'(s)\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\mathrm{d}s+$$

$$(\frac{\omega}{4\rho}+\frac{1}{4\rho}+\frac{5}{4\sigma})\|g(x,t)\|^2+(\frac{1}{4\rho^2}+\frac{5\rho}{4\sigma})\|f(x,t)\|^2.$$

令 $\gamma=\max\{\frac{\omega}{4\rho}+\frac{1}{4\rho}+\frac{5}{4\sigma},\frac{1}{4\rho^2}+\frac{5\rho}{4\sigma}\}$，$\beta=\min\{\frac{5\nu-\rho}{4},\rho-\nu-4C\rho^2,(\rho-\nu-C\rho^2-\frac{C\sigma^2}{\omega})\omega,\frac{3\sigma}{5}-2\rho+\nu-C\sigma^2,\frac{\delta-C\sigma}{4}\}$，因此，推得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{F}(t)+\beta E(t)\leq\gamma(\|g(x,t)\|^2+\|f(x,t)\|^2).$$

上式与(24)式结合在一起，蕴含着

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{F}(t)+\frac{\beta}{2}\mathscr{F}(t)\leq\gamma(\|g(x,t)\|^2+\|f(x,t)\|^2).\tag{25}$$

对(29)式应用引理 4，可以证得所需要的估计(21)式、(22)式和(23)式.

2　一致渐近紧

在这一部分，将建立非自治系统(1)～(6)式的一致吸引子的存在性.

设 $v=u_t$，$R_\tau=[\tau,+\infty)$，$\tau\geq0$，考虑下面的系统

$$\begin{cases}u_{tt}(x,t)+\omega Au_{tt}(x,t)+A(Au(x,t)-\vartheta(x,t))=f(x,t), & (26)\\ \vartheta_t(x,t)+\int_0^\infty\mu(s)B\eta(s)(x,t)]\mathrm{d}s+Au_t(x,t)=g(x,t), & (27)\\ \eta_t=T\eta+\vartheta, & (28)\end{cases}$$

初值条件为：

$$(u(x,\tau),u_t(x,\tau),\vartheta(x,\tau),\eta^0(x,\tau))=(u_\tau(x),v_\tau(x),\vartheta_\tau(x),\eta_\tau(x)),x\in(0,L),t\geq\tau,\tag{29}$$

边界条件为：

$$u(t)=Au(t)=0,x\in\partial\Omega,t\geq0,\vartheta(t)=0,\eta(t)=0,x\in\partial\Omega,t\in\mathbf{R}^+,\tag{30}$$

设

$$F=\begin{pmatrix}0\\f\\g\\0\end{pmatrix}\in E=\{F:\int_\tau^\infty|F|_{L^2((0,L))^4}\leq\frac{M}{T}\},\tag{31}$$

其中 M 不依赖于 T，且

$$\mathscr{H}_1=H^2\cap H_0^1\times H^1\times L^2\times\mathscr{M}^0.\tag{32}$$

系统(26)～(27)式的能量为

$$E(t)=\frac{1}{2}\{\|u_t\|^2+\|Au\|^2+\|A^{1/2}u_t\|^2+\|\vartheta\|^2+\|\eta^t\|^2\}.\tag{33}$$

对于任何的 $(u_\tau,u_{1\tau},\theta_\tau,z_\tau)\in\mathscr{H}_1$ 和任何的 $F\in E$，定义 $t\geq\tau,\tau\geq0$，

$$U_F(t,\tau):(u_\tau,u_{1\tau},\theta_\tau,z_\tau)\in\mathscr{H}_1\mapsto(u(t),u_t(t),\theta(t),\eta(t))=U_F(t,\tau)(u_\tau,u_{1\tau},\theta_\tau,\eta_\tau),$$

其中 $(u(t),u_t(t),\theta(t),\eta(t))$ 是问题(26)～(27)式的解.

本文的结果与 $\mathscr{H}_1$ 中的一致吸引子有关，定义 $F_0\in E$ 的核为 $\sum=H(F_0)=[F_0(t+h)\mid h\in\mathbf{R}^+]_E$，其中 $[\cdot]_E$ 表示 Banach 空间 E 的闭包.记 $F_0\in E\subseteq\hat{E}=L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+,(L^2(0,L))^4)$. 其中 F_0 是弱拓扑空间 $\hat{E}$ 中的平移紧函数，也就是说 $H(F_0)$ 在 $\hat{E}$ 中是紧的.考虑 Banach 空间 $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+,E_1)$ 中的函数 $\sigma(s)$，$s\in\mathbf{R}^+$ 且在

Banach 空间 E_1 局部 p- 幂可积.尤其对于任何区间 $[t_1,t_2]\subseteq \mathbf{R}^+$, $\int_{t_1}^{t_2}\|\sigma(s)\|_{E_1}^{p}\mathrm{d}s<+\infty$.设 $\sigma(s)\in L_{\mathrm{loc}}^{p}(\mathbf{R}^+,E_1)$,考虑等式 $\eta_\sigma(h)=\sup\limits_{t\in\mathbf{R}^+}\int_t^{t+h}\|\sigma(s)\|_{E_1}^{p}\mathrm{d}s$.

引理 5 设 $\sum$ 如同前面定义一样且 $F_0\in E$,则

(1) F_0 是 $\hat{E}$ 中的平移紧且对任何 $F\in\sum=H(F_0)$ 在 $\hat{E}$ 中也是平移紧,此外,$H(F)\subseteq H(F_0)$;

(2)集合 $H(F_0)$ 在 $L^2(\mathbf{R}^+,(L^2(0,L))^4)$ 中是有界的,使得 $\eta_F(h)\leq\eta_{F_0}(h)<+\infty,\forall F\in\sum$.

证明 见参考文献[13].

与定理 1 类似,可以得出下列存在性和唯一性的结果.

定理 3 设 $\sum=[F_0(t+h)\mid h\in\mathbf{R}^+]_E$,其中 $F_0\in E$ 是任意被固定的符号函数.则对于任何 $F\in\sum$ 和任何$(u_\tau,u_{1\tau},\theta_\tau,z_\tau)\in\mathscr{H}_1,\tau\geq0$,问题(26)~(27)式存在唯一的整体解$(u(t),u_t(t),\theta(t),\eta(t))\in\mathscr{H}_1$,生成空间 $\mathscr{H}_1$ 上含有 2 个参量的算子的唯一过程$\{U_F(t,\tau)\}(t\geq\tau,\tau\geq0)$ 使得对任何 $t\geq\tau,\tau\geq0$,

$$U_F(t,\tau)(u_\tau,u_{1\tau},\theta_\tau,\eta_\tau)=(u(t),u_t(t),\theta(t),\eta(t))\in\mathscr{H}_1,$$
$$u(t)\in C(R_\tau,L^2(0,L)),u_t(t)\in C(R_\tau,H^2\cap H_0^1(0,L)),$$
$$\theta(t)\in C(R_\tau,L^2(0,L)),\eta(t)\in C(R_\tau,L^2(0,L)\times D(T)).$$

为了得到本文的结果,将介绍一些基本引理.

设 X 是 Banach 空间,且 $\hat{\Sigma}$ 是参量集.在符号空间 $\hat{\Sigma}$ 中,称算子 $\{U_\sigma(t,\tau)\}(t\geq\tau,\tau\geq0,\sigma\in\hat{\Sigma})$ 是空间 X 中的过程族,如果对任何 $\sigma\in\hat{\Sigma}$,

$$U_\sigma(t,s)U_\sigma(s,\tau)=U_\sigma(t,\tau),\forall t\geq s\geq\tau,\tau\geq0,\tag{35}$$
$$U_\sigma(\tau,\tau)=Id,\forall\tau\geq0,\tag{36}$$

有关吸引子的更多的细节介绍可以在文献[13-14]中找到.

引理 6 设 $\{U_\sigma(t,\tau)\}(\sigma\in\hat{\Sigma},t\geq\tau,\tau\geq0)$ 是 Banach 空间 X 中满足(35)式和(36)式的过程族,且有界一致吸收集 $B_0\subseteq X$.此外,假设对于任何 $\varepsilon>0$,存在时间 $T=T(B_0,\varepsilon)>0$ 和空间 $B_0\times B_0$ 上的压缩函数 ϕ_T 使得 $\|U_{\sigma_1}(T,0)x-U_{\sigma_2}(T,0)y\|\leq\varepsilon+\phi_T(x,y;\sigma_1,\sigma_2),\forall x,y\in B_0,\forall\sigma_1,\sigma_2\in\hat{\Sigma}$.则 $\{U_\sigma(t,\tau)\}(\sigma\in\hat{\Sigma},t\geq\tau,\tau\geq0)$ 在空间 X 上是一致渐进紧的.

证明 见参考文献[15].

引理 7 对于每个 $\tau\in\mathbf{R}$,在区间 $R_\tau\equiv[\tau,+\infty)$ 上的每个非负局部可积函数 ϕ_0 和每个 $\nu>0$,当 $t\geq\tau$ 时,几乎处处有

$$\sup_{t\geq\tau}\int_\tau^t\phi_0(s)\mathrm{e}^{-\nu(t-s)}\mathrm{d}s\leq\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\nu}}\sup_{t\geq\tau}\int_t^{t+1}\phi_0(s)\mathrm{d}s.\tag{37}$$

证明 见参考文献[16-17].

引理 8 设 $s_i\in\mathbf{R},f\in L^\infty(\mathbf{R};L^2(\Omega))\cap W_b^{1,r}(\mathbf{R};L^r(\Omega))(r>\frac{2n}{n+4}),\{u_n(t)\mid t\geq0,n=1,2,3,\cdots\}$ 在空间 $H_0^2(\Omega)$ 中有界,且对任何的 $T_1>0,\{u_{n_t}(t)\mid n=1,2,\cdots\}$ 在空间 $L^\infty(0,T_1;L^2(\Omega))$ 中有界.则对任何 $T>0$,存在着$\{u_n\}_{k=1}^\infty$ 的子序列$\{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ 和$\{s_n\}_{k=1}^\infty$ 的子序列$\{s_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty}\int_0^T\int_0^T\int_\Omega(f(x,\tau+s_{n_k})-f(x,\tau+s_{n_l}))(u_{n_k}-u_{n_l})_t(\tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s=0.$$

证明 见参考文献[18-19].

定理 4 在条件(31)式的假设下,问题(26)~(30)式相应的过程族 $\{U_F(t,\tau)\}(F\in\sum,t\geq\tau,\tau\geq0)$,在空间 $\mathscr{H}_1$ 中有一个有界的一致吸收集 B_0.

证明 与定理 2 的证明过程相似,通过直接的计算可以得到

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}\leq-\frac{\beta}{2}E(t)+\gamma(\|f\|_{L^2}^2+\|g\|_{L^2}^2),\tag{38}$$

其中,γ,β 是两个正常数,且 γ 不依赖于初值.

$$E(t) \leq E(\tau)\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}(t-\tau)} + \frac{\gamma}{1-\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}}} \sup_{t\geq\tau}\int_t^{t+1} \| F \|_E^2 \mathrm{d}s \leq E(\tau)\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}(t-\tau)} + \frac{\gamma}{1-\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}}}\eta_F(1). \tag{39}$$

应用引理 5,存在着如下不等式

$$E(t) \leq E(\tau)\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}(t-\tau)} + \frac{\gamma}{1-\mathrm{e}^{-\gamma}}\eta_{F_0}(1) \leq \frac{R_0^2}{2}. \tag{40}$$

对于任何有界集 $B_0 \subseteq \mathscr{H}_1$,任何$(u_\tau, u_{1\tau}, \theta_\tau, z_\tau) \in B_0$,$\tau \geq 0$,存在着一个常数 $C_{B_0} > 0$ 使得 $E(\tau) \leq C_{B_0}$. 取

$$R_0^2 = 2\left(2\frac{\gamma\eta_{F_0}(1)}{1-\mathrm{e}^{-\gamma}} + 1\right), t_0 = t_0(\tau, F_0) = \tau - \gamma^{-1}\lg\left(\frac{\gamma\eta_{F_0}(1) + 1 - \mathrm{e}^{-\gamma}}{C_{B_0}(1-\mathrm{e}^{-\gamma})}\right),$$

则对任何 $t \geq t_0 \geq \tau$,有 $E(t) \leq \frac{R_0^2}{2}$,因此可得 $\|(u(t), u_t(t), \theta(t), z(t))\|_{\mathscr{H}_1}^2 \leq 2E(t) \leq R_0^2$. 那么,对于任何的 $F \in \sum B_0(0, R_0) = \{(u(t), u_t(t), \vartheta(t), \eta(t)) \in \mathscr{H}_1 : \|(u(t), u_t(t), \vartheta(t), \eta(t))\|_{\mathscr{H}_1^2}\} \leq R_0{}^2\} \subseteq \mathscr{H}_1$ 是一个一致吸收集也就是说对任何的 $\mathscr{H}_1$ 的有界子集 B 存在着时间 $t_0 = t_0(\tau, F_0) \geq \tau$,使得对所有的 $t \geq t_0$,$\bigcup_{F\in\sum} U_F(t,\tau)B \subseteq B_0$. 下面建立(49)式,因为由它可以得到一致渐进紧性.不失一般性,计算了序列的强解,通过稠定的论证容易得到弱解.

对任何 $(u_\tau^i, u_{1\tau}^i, \vartheta_\tau^i, \eta_\tau^i) \in B_0$,设$(u_i(t), u_{it}(t), \vartheta_i(t), \eta_i(t))$ 是相对于不同的初值$(u_\tau^i, u_{1\tau}^i, \vartheta_\tau^i, \eta_\tau^i)$,$F_i \in \sum$,$i = 1, 2$ 的解.设

$$W(t) = (w(t), \theta(t), \zeta(t))^{\mathrm{T}} = U_1(t) - U_2(t) = (w_1(t) - w_2(t), \theta_1(t) - \theta_2(t), \zeta_1(t) - \zeta_2(t))^{\mathrm{T}}. \tag{41}$$

则 $W(t)$ 满足

$$\begin{cases} w_{tt}(x,t) + \omega A w_{tt}(x,t) + A(Aw(x,t) - \theta(x,t)) = f_1(x,t) - f_2(x,t), \\ \theta_t(x,t) + \int_0^\infty \mu(s) B\zeta(s)(x,t)]\mathrm{d}s + Aw_t(x,t) = g_1(x,t) - g_2(x,t), \\ \zeta_t = T\zeta + \theta, (x,t) \in (0,L) \times (\tau, \infty). \end{cases} \tag{42}$$

令

$$E_w(t) = \frac{1}{2}\int_0^L (w_t^2(x,t) + A^2 w^2(x,t) + Aw^2(x,t) + \theta^2(x,t) + \zeta^2(x,t))\mathrm{d}x. \tag{43}$$

不失一般性,假设 $\omega = 1$,用 $w(t)$,θ,η 分别乘以$(42)_1$~$(42)_3$ 所得结果加在一起,可得

$$\frac{\mathrm{d}E_w(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^L (w_t^2(x,t) + A^2 w^2(x,t) + Aw^2(x,t) + \theta^2(x,t) + \zeta^2(x,t))\mathrm{d}s =$$

$$\langle T\zeta, \zeta\rangle_{\mathscr{M}^0} + \int_0^L (f_1 - f_2)w_t \mathrm{d}x + \int_0^L (g_1 - g_2)\theta \mathrm{d}x. \tag{44}$$

在区间 $[\sigma, T]$ 上关于时间 t 对(44)式积分,且应用(12)式,可得

$$E_w(T) \leq E_w(\sigma) + \int_\sigma^T \int_0^L (f_1 - f_2)w_t \mathrm{d}x + \int_\sigma^T \int_0^L (g_1 - g_2)\theta \mathrm{d}x, \tag{45}$$

其中,$0 \leq \sigma \leq T$.在区间$[0, T]$ 上关于 σ 积分(45)式可得

$$TE_w(T) \leq \int_0^T \int_\sigma^T \int_0^L (f_1 - f_2)w_t \mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}\sigma + \int_0^T \int_\sigma^T \int_0^L (g_1 - g_2)\theta \mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}\sigma + \int_0^T E_w(\sigma)\mathrm{d}\sigma. \tag{46}$$

从(42)~(44)式可得

$$\int_0^T E_w(\sigma)\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^L (w_t^2(x,t) + A^2 w^2(x,t) + Aw^2(x,t) + \theta^2(x,t) + \zeta^2(x,t))\mathrm{d}x\mathrm{d}\sigma \leq$$

$$\int_0^T (E_{U_1}(\sigma) + E_{U_2}(\sigma))\mathrm{d}\sigma \leq 2\int_0^T [E(\tau)e^{-\frac{\beta}{2}(\sigma-\tau)} + \gamma\int_\tau^\sigma (\|f\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2)e^{-\frac{\beta}{2}(\sigma-s)}\mathrm{d}s]\mathrm{d}\sigma \leq C_M, \tag{47}$$

其中 C 依赖于 M 和 τ .

令

$$\phi((u_0^1,u_{10}^1,\theta_0^1,z_0^1),(u_0^2,u_{10}^2,\theta_0^2,z_0^2);F_1,F_2)=\int_0^T\int_\sigma^T\int_0^L(f_1-f_2)w_t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_0^T\int_\sigma^T\int_0^L(g_1-g_2)\theta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma. \tag{48}$$

因此可以得到

$$E_W(T)\leq\frac{C_M}{T}+\frac{1}{T}\phi((u_0^1,u_{10}^1,\theta_0^1,z_0^1),(u_0^2,u_{10}^2,\theta_0^2,z_0^2);F_1,F_2). \tag{49}$$

下面将证明 $\mathscr{H}_1$ 中的一致渐近紧,首先给出定理 5.

定理 5　假设 F 满足(31)式,则与问题(26)～(28)式相应的过程族 $\{U_F(t,\tau)\}(F\in\sum,t\geq\tau,\tau\geq0)$,在空间 $\mathscr{H}_1$ 中是一致渐近紧的.

证明　因为过程族 $\{U_F(t,\tau)\}(F\in\sum,t\geq\tau,\tau\geq0)$ 有界一致吸收集,由 C_M 的定义,知道对任何固定的 $\varepsilon>0$,可以选择很大的 $T>0$ 使得 $\frac{C_M}{T}\leq\varepsilon$.

然后由引理 5 可知,对于固定的 T 它有充分的条件去证明 $\phi(\cdot,\cdot;\cdot,\cdot)\in\mathrm{Contr}(B_0,\sum)$.

由定理 3 的证明过程可知,在空间 $\mathscr{H}_1$,对于任何固定的 T 可得

$$\bigcup_{F\in\sum}\bigcup_{t\in[\tau,T]}U_F(t,\tau)B_0 \tag{50}$$

是有界的,并且有界常数依赖于 T.

设 $(u_n,u_{nt},\theta_n,\eta_n)$ 是分别相对应于初值 $(u_\tau^n,u_{1\tau}^n,\theta_\tau^n,\eta_\tau^n)\in B_0$ 的解,$F_n\in\sum,n=1,2,\cdots$. 则由(39)式可知,不失一般性,假设

$$u_n\rightarrow u\text{ 在 }L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))\text{ 中弱 }*\text{ 收敛}, \tag{51}$$

$$u_{nt}\rightarrow u_t\text{ 在 }L^\infty(0,T;L_0^2(\Omega))\text{ 中弱 }*\text{ 收敛}, \tag{52}$$

$$\theta_n\rightarrow\theta\text{ 在 }L^\infty(0,T;L_0^2(\Omega))\text{ 中弱 }*\text{ 收敛}. \tag{53}$$

下面对(48)式右侧的每一项做估计.

首先,利用引理 8,可得

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_\sigma^T\int_0^L(f_n(x,t)-f_m(x,t))(u_{n_k}-u_{n_l})_t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma=0, \tag{54}$$

其次,利用(8)式可得

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_\sigma^T\int_0^L(g_n(x,t)-g_m(x,t))(\theta_n-\theta_m)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma=0. \tag{55}$$

因此由(49)～(50)式,立刻可推得 $\phi(\cdot,\cdot;\cdot,\cdot)\in\mathrm{Contr}(B_0,\sum)$.

3　结　论

定理 6　假设 f,g 满足(31)式且 $\sum$ 由(34)式定义,则与问题(26)～(28)式相对应的过程族 $\{U_F(t,\tau)\}(F\in\sum,t\geq\tau,\tau\geq0)$ 有一个紧的一致吸引子 $\mathscr{A}_\sum$.

证明　由定理 4 和定理 3 立刻可以证得一致吸引子的存在性.

参 考 文 献

[1]　Zelati M C,Dell'oro F,Pata V.Energy decay of type III linear thermoelastic plates with memory[J].J Math Anal Appl,2013,401(1):357-366.

[2]　Giorgi C,Pata V.Stability of abstract linear thermoelastic systemswith memory[J].Mathematical Models and Methods in Applied Sciences,2008,11(11):627-644.

[3]　Grasselli M,Muñoz Rivera J E,Pata V.On the energy decay of the linear thermoelastic plate with memory[J].J Math Anal Appl,2005,309:1-14.

[4] Dell'oro F, Muñoz J E, Pata V. Stability properties of an abstract system with applications to linear thermoelastic plates[J]. J Evol Equ, 2013, 13: 777-794.

[5] Grasselli M, Pata V. Uniform attractors of nonautonomous systems with memory, in "Evolution Equations, Semigroups and Functional Analysis"[M]. Boston: Birkhäuser, 2002.

[6] Fabrizio M, Lazzari B, Muñoz Rivera J E. Asymptotic behaviour of a thermoelastic plate of weakly hyperbolic type[J]. Differential Integral Equations, 2000, 13: 1347-1370.

[7] Grasselli M, Squassina M. Exponential stability and singular limit for a linear thermoelastic plate with memory effects[J]. Advances in Mathematical Sciences and Application, 2006, 16(1): 15-31.

[8] Qin Y. Integral and Discrete Inequalities and Their Applications: Volume I: Nonlinear Inequalities[M]. Basel: Birkhäuser, 2016.

[9] Qin Y. Integral and Discrete Inequalities and Their Applications: Volume II: Nonlinear Inequalities[M]. Basel: Birkhäuser, 2016.

[10] Qin Y. Analytic Inequalities and Their Applications in PDEs[M]. Basel: Birkhäuser, 2017.

[11] Zheng S. Nonlinear Evolution Equations[M]. Florida: CRC Press, 2004.

[12] Qin Y, Wei T. Global Existence, Asymptotic Behavior and Uniform Attractors for Non-autonomous Thermoelastic Systems[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica English, 2016, 32(4): 1015-1034.

[13] Chepyzhov V V, Vishik M I. Attractors for equations of mathematical physics[M]. Rhode Island: American Mathematical Society, 2002.

[14] Temam R. Infinite dimensional dynamical systems in mechanics, physics[M]. New York: Springer, 1997.

[15] Chueshov I, Lasiecka I. Long-Time Behavior of Second Order Evolution Equations with Nonlinear Damping[J]. Memoirs of the American Mathematical Society, 2008, 195(12): 1-83.

[16] Chepyzhov V V, Pata V, Vishik M I. Averaging of $2D$ Navier-Stokes equations with singularly oscillating external forces[J]. Nonlinearity, 2009, 22: 351-370.

[17] Qin Y, Feng B, Zhang M. Uniform attractors for a non-autonomous viscoelastic equation with history[J]. Nonlinear Analysis, 2014, 101: 1-5.

[18] Sun C, Cao D, Duan J. Uniform attractor for non-autonomous wave equations with nonlinear damping[J]. SIAM J Appl Dyn Syst, 2007, 6: 293-318.

[19] Yang L. Uniform attractor for non-autonomous plate equation with a localized damping, critical nonlinearity[J]. J Math Anal Appl, 2008, 338: 1243-1254.

Uniform attractors for a non-autonomous linear thermoelastic plate with memory effects

Qin Yuming, Dong Xiaolei

(College of Science, Donghua University, Shanghai 201620, China)

Abstract: In this paper, we aim to investigate the existence of uniform attractors and global solution and the decay of the global solution for a 2D non-autonomous linear thermoelastic plate with memory effects. For this end, we need to firstly establish the existence of global solutions by employing the method of semigroup theory. Then we can get the decay of this system by making use of the method of Lyapunov functional. At last, we also can obtain the orbit compactness by the method of contraction function. we thus prove the existence of attractors .

Keywords: thermoelastic; attractor; global solution; decay; contraction function

[责任编校　陈留院]