

二阶 Camassa-Holm 方程 Cauchy 问题解的正则性

丁丹平, 朱琳

(江苏大学理学院, 江苏镇江 212013)

摘要: 通过利用小黏性方法得到二阶 Camassa-Holm 方程柯西问题局部弱解的存在性, 再利用 Hölder 不等式和 Gronwall 不等式等进行一系列的先验估计, 研究 Camassa-Holm 方程解的正则性.

关键词: 二阶 Camassa-Holm 方程; 弱解的存在性; 解的正则性估计

中图分类号: O175.29

文献标志码: A

1993年, Camassa 和 Holm^[1] 利用 Hamilton 方法研究浅水波运动时得到了浅水波方程 $u_t + 2\alpha u_x - u_{xxt} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}$, 其中 $u(t, x)$ 表示水波在 x 方向的振幅, α 是与波速有关的常数, 此方程是完全可积的.

当 $\alpha = 0$ 时, 即为 Camassa-Holm (C-H) 方程

$$u_t - u_{xxt} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx},$$

其具有尖峰孤子解 $u(t, x) = ce^{-|x-\alpha t|}$, 其中 c 为任意常数. 该解在尖峰处一阶不可导, 是 $H^1(\mathbb{R})$ 意义下的弱解.

2003年, Adrian Constantin 和 Boris Kolev^[2] 在研究单位圆微分同胚群上的测地线时, 首次得到方程

$$\partial_t u = B_k(u, u), k \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

其中, $A_k(u) := \sum_{j=0}^k (-1)^j \partial_x^{2j} u$, $C_k(u) := -uA_k(\partial_x u) + A_k(u\partial_x u) - 2\partial_x u A_k(u)$.

显然算子 $C_k(u)$ 是一个全导数. 记多项式 $F_k(u)$, 使得 $B_k(u, u) := A_k^{-1}C_k(u) - u\partial_x u$, $C_k(u) = -\partial_x F_k(u)$, $-F_k(u) = \int_{-\infty}^x C_k(u(\xi)) d\xi = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k (-1)^j \partial_x^{2j} (u^2) - \sum_{j=0}^k (-1)^j \int_{-\infty}^x (u\partial_x^{2j} \partial_x u + 2\partial_x u \partial_x^{2j} u) d\xi$.

当 $k = 0$ 和 $k = 1$, 方程(1)变为非黏性 Burgers 方程

$$u_t + 3uu_x = 0, \tag{2}$$

以及 C-H 方程

$$\partial_t u - \partial_x \partial_x^2 u + 3u\partial_x u - 2\partial_x u \partial_x^2 u - u\partial_x^3 u = 0. \tag{3}$$

通常称方程(1)为高阶 Camassa-Holm 方程.

C-H 方程是一类具有潜水波背景的色散方程. 潜水波方程可用于解决物理学、流体力学等领域中诸多问题, 因此, 国内外许多人员研究了潜水波方程, 如文献[3]利用 Clifford 分解方法得到了三维潜水波方程解的适定性问题.

2009年, 文献[4]讨论了高阶 Camassa-Holm 方程的柯西问题的适定性问题, 得到如下结论: 当 $u_0 \in H_{k,p} = \{f \in H^k(\mathbb{R}) \mid \partial_x^k f \in L^p(\mathbb{R})\}$ 且 $2 < p < \infty$ 时, 方程有一全局弱解

$$u \in C([0, \infty); C^{k-1}(\mathbb{R})) \cap L^\infty([0, \infty); H^k(\mathbb{R})).$$

文献[5]研究了高阶 Camassa-Holm 方程柯西问题的解, 得到如下结论:

收稿日期: 2015-11-06; 修回日期: 2016-04-13.

基金项目: 国家自然科学基金(11371175)

第1作者简介: 丁丹平(1965-), 男, 江苏丹阳人, 江苏大学教授, 博士, 研究方向为非线性发展方程.

通信作者: 朱琳(1990-), 女, 江苏南通人, 江苏大学硕士研究生, E-mail: 673786142@qq.com.

(1) 若 $u_0 \in H^r(R^1)$, $r \geq 2s+1$, 其中 $s \geq 0$, 则存在一个最大时间 $T = T(u_0) > 0$ 使得方程存在唯一解

$$u = u(\cdot, u_0) \in C([0, T]; H^r(R^1)) \cap C^1([0, T]; H^{r-1}(R^1));$$

(2) 若 $u_0 \in H^k(R^1)$, 且 $\forall x \in R^1$, 存在 $M > 0$, 使得 $P_{>Mu_0} = 0$, 则方程存在全局弱解

$$u \in C([0, \infty); H^{k-1}(R)) \cap L^\infty([0, \infty); H^k(R)),$$

并且满足守恒律 $\int_R u^2 + (\partial_x u)^2 + \dots + (\partial_x^k u)^2 dx = \int_R u_0^2 + (\partial_x u_0)^2 + \dots + (\partial_x^k u_0)^2 dx$.

文献[6]研究了二阶 Camassa-Holm 柯西问题整体解的存在性, 得到如下结论: 若 $u_0 \in H^s(R)$, $s > \frac{9}{2}$, 存在依赖于 $\|u_0\|_{H^s}$ 的时间 $T > 0$, 使方程存在唯一的解 $u = u(t, x)$ 满足 $u \in C([0, T]; H^s(R)) \cap C^1([0, T]; H^{s-1}(R))$.

文献[7]研究了局部适定性, 得到如下结论: 若 $u_0 \in H^s(R)$, $s \geq k$, $k \geq 2$, 存在 $T > 0$, 使 Cauchy 问题(1)有唯一解 $u \in C([0, T]; H^s(R)) \cap C^1([0, T]; H^{s-1}(R))$.

上述工作主要是对高阶 Camassa-Holm 方程的相关问题的弱解存在唯一性展开研究, 弱解的正则性则是本文的兴趣所在.

文献[8]对 Navier-Stokes 方程柯西问题进行了解的正规性研究, 得到如下结论: 若 $(\rho_0, \rho_0^\beta, \rho_0^\gamma) \in L^1(R) \cap H^2(R)$, $u_0 \in D^1(R) \cap D^2(R)$, 对任意 $T > 0$, 使方程存在唯一的整体经典解 $(\rho, \rho^\gamma, \rho^\beta) \in C([0, T]; H^2(R)); (\rho, (\rho^\gamma)_t, (\rho^\beta)_t) \in C([0, T]; H^1(R))$.

文献[9]对二维 Boussinesq 方程柯西问题进行了解的正规性研究, 得到如下结论: 设 $u_0, v_0, \theta \in H^2(R^2)$, 且 $\text{div}(u_0, v_0) = 0$, 对任意 $T > 0$, 使得方程存在唯一经典解

$$u, v, \theta \in L^\infty([0, T]; H^2(R^2)); v_x, \theta_y \in L^2([0, T]; H^2(R^2)).$$

Navier-Stokes 拟线性方程 $(\rho u)_t + (\rho u^2)_x = [\mu(\rho)u_x]_x - [p(\rho)]_x$ 和 Boussinesq 拟线性方程 $u_t + uu_x = k_1 u_{xx} + k_2 u_{yy} - uu_y - p_x$ 与 Camassa-Holm 方程形式类似, 受两者研究工作启发, 并结合两者研究方法来研究 Camassa-Holm 方程解的正规性问题.

本文主要研究二阶 C-H 方程的 Cauchy 问题, 即

$$\begin{cases} \partial_t u = B_2(u, u), (t, x) \in (0, T) \times R, \\ u(0, x) = u_0(x), x \in R. \end{cases} \quad (4)$$

其中 $B_2(u, u) := A_2^{-1}C_2(u) - u\partial_x u$, $A_2(u) = \partial_x^4 u - \partial_x^2 u + u$.

1 弱解的存在性

将(4)式写成如下形式:

$$\begin{cases} \partial_t u + u\partial_x u + \partial_x p = 0, t > 0, x \in R, \\ A_2(p) = F_2(u), t > 0, x \in R, \\ u(0, x) = u_0(x), x \in R. \end{cases} \quad (5)$$

构造(5)式的黏性方程形式如下:

$$\begin{cases} \partial_t u_\epsilon + u_\epsilon \partial_x u_\epsilon + \partial_x p_\epsilon = \epsilon \partial_x^2 u_\epsilon, \\ A_2(p_\epsilon) = F_2(u_\epsilon), \\ u_\epsilon(0, x) = u_{0,\epsilon}(x). \end{cases} \quad (6)$$

引理 1^[10] 若初值 $u_{\epsilon 0} \in H^3(R)$, 则对任意的 $\|u_\epsilon\|_{H^3(R)}, \|v_\epsilon\|_{H^3(R)} \leq C$ 如果方程

$$\begin{cases} u_\epsilon - \Delta u_\epsilon = F(u_\epsilon, \nabla u_\epsilon, \Delta u_\epsilon), \\ u_\epsilon(0, x) = u_{\epsilon 0}(x) \end{cases}$$

的非线性部分满足 $\|F(u_\epsilon, \nabla u_\epsilon, \Delta u_\epsilon) - F(v_\epsilon, \nabla v_\epsilon, \Delta v_\epsilon)\|_{H^2(R)} \leq M_R \|u_\epsilon - v_\epsilon\|_{H^3(R)}$, 其中 M_R 为与 C 有关的常数, 那么存在一个依赖于 $\|u_{\epsilon 0}\|_{H^3(R)}$ 的时间 T , 使得方程(6)有唯一的局部解 $u_\epsilon \in C([0, T], H^3(R)) \cap C^1([0, T], H^2(R))$. 进一步, 若 $t_0 > 0$, 则对任意 $T > t_0$, 解 $u_\epsilon \in C^\infty(R \times (t_0, T))$.

引理 1 是经典的非线性热传导方程的局部存在性结果^[11-12], 其结果可由压缩映射原理得到, 证明依赖

于热半群的光滑性,即

$$\begin{cases} \| e^{t\Delta} u_{\epsilon 0}(x) \|_{H^3(R)} \leq C t^{\frac{1}{2}} \| u_{\epsilon 0}(x) \|_{H^2(R)}, \\ \| (e^{t\Delta} - Id) u_{\epsilon 0}(x) \|_{H^2(R)} \leq C t^{\frac{1}{2}} \| u_{\epsilon 0}(x) \|_{H^3(R)}. \end{cases}$$

假设 1 $u_{\epsilon 0} \in H^3(R)$, $\| u_{\epsilon 0} \|_{H^2(R)} \leq \| u_0 \|_{H^2(R)}$ 且在 $H^2(R)$ 上 $u_{0,\epsilon} \rightarrow u_0$.

假设 2 $u_0 \in H^2(R)$ 且对某一 $2 < p < \infty$, $\partial_x^2 u_0 \in L^p(R)$.

引理 2^[4] 若假设 1 和假设 2 成立, 则对任意的 $\epsilon > 0$ 及每个 $t \geq 0$ 都有

$$\begin{aligned} \| u_{\epsilon}(t, \cdot) \|_{H^2(R)}^2 + 2\epsilon \int_0^t \| \partial_x u_{\epsilon}(\tau, \cdot) \|_{H^2(R)}^2 d\tau &= \| u_{0,\epsilon} \|_{H^2(R)}^2, \\ \| u_{\epsilon} \|_{L^\infty([0,T] \times R)}, \| \partial_x u_{\epsilon} \|_{L^\infty([0,T] \times R)} &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \| u_0 \|_{H^2(R)}. \end{aligned}$$

对(6)式的第 2 个方程使用傅里叶变换,得

$$\begin{aligned} P_{\epsilon}(t, x) &= \int_R \left(\frac{\sqrt{3} + 3i}{12} e^{\frac{-i\sqrt{3}}{2}|x-z|} + \frac{\sqrt{3} - 3i}{12} e^{\frac{i\sqrt{3}}{2}|x-z|} \right) \left(u_{\epsilon}^2 + \frac{1}{2} u_{\epsilon x}^2 - \frac{1}{2} u_{\epsilon x x}^2 \right) (t, z) dz + \\ &\frac{3}{2} \int_R \left(\frac{\sqrt{3} - 3i}{12} e^{\frac{-i\sqrt{3}}{2}|x-z|} + \frac{\sqrt{3} + 3i}{12} e^{\frac{i\sqrt{3}}{2}|x-z|} \right) u_{\epsilon x}^2 (t, z) dz. \end{aligned}$$

令

$$P_{\epsilon}(t, x) = P_{1\epsilon}(t, x) + P_{2\epsilon}(t, x), \tag{7}$$

记

$$G_1(x-z) = \frac{\sqrt{3} + 3i}{12} e^{\frac{-i\sqrt{3}}{2}|x-z|} + \frac{\sqrt{3} - 3i}{12} e^{\frac{i\sqrt{3}}{2}|x-z|}, \tag{8}$$

$$G_2(x-z) = \frac{\sqrt{3} - 3i}{12} e^{\frac{-i\sqrt{3}}{2}|x-z|} + \frac{\sqrt{3} + 3i}{12} e^{\frac{i\sqrt{3}}{2}|x-z|}, \tag{9}$$

所以

$$P_{1\epsilon}(t, x) = \int_R G_1(x-z) \left[u_{\epsilon}^2 + \frac{1}{2} (\partial_x u_{\epsilon})^2 - \frac{1}{2} (\partial_x^2 u_{\epsilon})^2 \right] (t, z) dz, \tag{10}$$

$$P_{2\epsilon}(t, x) = \frac{3}{2} \int_R G_2(x-z) u_{\epsilon x}^2 (t, z) dz. \tag{11}$$

引理 3 若假设 1 和假设 2 成立, 则对每个 $t \geq 0, \epsilon > 0$, 有

$$\| P_{\epsilon}(t, \cdot) \|_{W^{p,1}(R)}, \| P_{\epsilon}(t, \cdot) \|_{W^{p,\infty}(R)} \leq C_0 \| u_0 \|_{H^2(R)}, \tag{12}$$

其中 C_0 是不依赖于 ϵ 的常数.

证明 固定 $t > 0$, 对于每个 $p \in \{1, \infty\}$, $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$,

$$\begin{aligned} \partial_x^i P_{1\epsilon}(t, x) &= \int_R \frac{d^i G_1}{dx^i}(x-z) \left[u_{\epsilon}^2(t, z) + \frac{1}{2} (\partial_x u_{\epsilon}(t, z))^2 - \frac{1}{2} (\partial_x^2 u_{\epsilon}(t, z))^2 \right] dz, \\ \partial_x^j P_{2\epsilon}(t, x) &= \frac{3}{2} \int_R \frac{d^j G_2}{dx^j}(x-z) (\partial_x u_{\epsilon})^2(t, z) dz. \end{aligned}$$

由卷积的 young 不等式, (7), (8), (9) 和(10) 式中得

$$\begin{aligned} \| \partial_x^i P_{1\epsilon}(t, \cdot) \|_{L^p(R)} &\leq \left\| \frac{d^i G_1}{dx^i} \right\|_{L^p(R)} \int_R \left[u_{\epsilon}^2 + \frac{1}{2} (\partial_x u_{\epsilon})^2 + \frac{1}{2} (\partial_x^2 u_{\epsilon})^2 \right] dz \leq \\ &C_0 \| u_{\epsilon}(t, \cdot) \|_{H^2(R)}^2 \leq C_0 \| u_0 \|_{H^2(R)}^2. \end{aligned} \tag{13}$$

类似地,

$$\begin{aligned} \| \partial_x^j P_{2\epsilon}(t, x) \|_{L^p(R)} &\leq \frac{3}{2} \left\| \frac{d^j G_2}{dx^j} \right\|_{L^p(R)} \int_R |(\partial_x u_{\epsilon})^2(t, z)| dz \leq \\ &C_0 \| u_{\epsilon}(t, \cdot) \|_{H^2(R)}^2 \leq C_0 \| u_0 \|_{H^2(R)}^2. \end{aligned} \tag{14}$$

其中 C_0 是不依赖于 ϵ 的常数.

因此, 由估计(13) 和(14) 式可以得到(12) 式.

对任意给定的正常数 T , 记 $\Pi_T := [0, T) \times R$.

引理 4^[4] 若假设 1 成立, 则对任意的 $0 < \epsilon < 1$ 以及每一 $T, 0 < t < T$,

$$\begin{aligned} & \| \partial_t u_\epsilon(t, \cdot) \|_{L^2(R)} \leq K_1, \\ & \| \partial_t \partial_x u_\epsilon(t, \cdot) \|_{L^2(\Pi_T)} \leq K_2. \end{aligned}$$

其中 $K_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}} + C_0) \| u_0 \|_{H^2(R)}^2 + \| u_0 \|_{H^2(R)}, K_2 = (\sqrt{2T} + C_0 \sqrt{T}) \| u_0 \|_{H^2(R)}^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \| u_0 \|_{H^2(R)}$.

引理 5 若假设 1 和假设 2 成立, 则对每个 $0 < \epsilon < 1$, 都存在一个仅依赖于 $\| u_0 \|_{H^2(R)}$, T 不依赖于 ϵ 的正常数 K_T , 使得

$$\| \partial_t \partial_x^3 P_\epsilon \|_{L^1(\Pi_T)}, \| \partial_t \partial_x^3 P_\epsilon \|_{L^\infty(\Pi_T)} \leq K_T.$$

证明 固定 $T > 0$ 及 $0 < \epsilon < 1$. 对(6)式的第一个方程两边关于 x 求两次导

$$\partial_t \partial_x^2 u_\epsilon + u_\epsilon \partial_x^3 u_\epsilon + 3 \partial_x u_\epsilon \partial_x^2 u_\epsilon + \partial_x^3 P_\epsilon = \epsilon \partial_x^4 u_\epsilon.$$

根据引理 2、引理 3 和引理 4 有

$$\begin{aligned} & \| \partial_t \partial_x^3 P_{2\epsilon}(t, x) \|_{L^p(\Pi_T)} \leq 3 \| G_1^*(x-z) \|_{L^p(R)} \int_{\Pi_T} \partial_x u_\epsilon \partial_t \partial_x u_\epsilon(t, z) dz \leq \\ & C_0 \| \partial_x u_\epsilon \|_{L^2(\Pi_T)} \| \partial_t \partial_x u_\epsilon \|_{L^2(\Pi_T)} \leq C_0 K_2 \sqrt{T} \| u_0 \|_{H^2}, \\ & \partial_t \partial_x^3 P_{1,\epsilon}(t, x) = \int_R G_1^*(x-z) (2u_\epsilon \partial_t u_\epsilon + \partial_x u_\epsilon \partial_t \partial_x u_\epsilon) dz + \int_R G_1^*(x-z) \partial_x^2 u_\epsilon \partial_x^3 P_\epsilon dz + \\ & \frac{1}{2} u_\epsilon (\partial_x^2 u_\epsilon)^2 - \epsilon \partial_x^3 u_\epsilon \partial_x^2 u_\epsilon + \int_R (G_1^* - G_1)(x-z) [\frac{1}{2} u_\epsilon (\partial_x^2 u_\epsilon)^2 - \epsilon \partial_x^3 u_\epsilon \partial_x^2 u_\epsilon] dz + \\ & \int_R G_1^*(x-z) [\frac{5}{2} u_\epsilon (\partial_x^2 u_\epsilon)^2 + \epsilon (\partial_x^3 u_\epsilon)^2] dz. \end{aligned} \tag{15}$$

类似(15), 根据引理 2、引理 3 和引理 4 并使用 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned} & \| \partial_t \partial_x^3 P_{1,\epsilon}(t, x) \|_{L^p(\Pi_T)} \leq C_0 [\| u_\epsilon \|_{L^2(\Pi_T)} \| \partial_t u_\epsilon \|_{L^2(\Pi_T)} + \| \partial_x u_\epsilon \|_{L^2(\Pi_T)} \| \partial_t \partial_x u_\epsilon \|_{L^2(\Pi_T)} + \\ & \| \partial_x^2 u_\epsilon \|_{L^2(\Pi_T)} \| \partial_x^3 P_\epsilon \|_{L^2(\Pi_T)} + \| \partial_x u_\epsilon \|_{L^\infty(\Pi_T)} \| \partial_x^2 u_\epsilon \|_{L^2(\Pi_T)}^2 + \| u_\epsilon \|_{L^\infty(\Pi_T)} \| \partial_x^2 u_\epsilon \|_{L^2(\Pi_T)}^2 + \\ & \epsilon \| \partial_x^3 u_\epsilon \|_{L^2(\Pi_T)} (\| \partial_x^2 u_\epsilon \|_{L^2(\Pi_T)} + 1)] \leq C_0 [\sqrt{T} \| u_0 \|_{H^2(R)} (K_1 + K_2 + C_0 \| u_0 \|_{H^2(R)}^2) + \\ & T \| u_0 \|_{H^2(R)}^2 (\sqrt{2} \| u_0 \|_{H^2(R)} + \frac{1}{2} \| u_0 \|_{H^2(R)}^2) + \frac{1}{2} T \| u_0 \|_{H^2(R)}^2], \end{aligned} \tag{16}$$

其中 K_1, K_2 在引理 4 中给出, C_0 不依赖于 ϵ .

因此, 对于 $p \in \{1, \infty\}$, $\| \partial_t \partial_x^i P_\epsilon(t, x) \|_{L^p(\Pi_T)} \leq \| \partial_t \partial_x^i P_{1,\epsilon}(t, x) \|_{L^p(\Pi_T)} + \| \partial_t \partial_x^i P_{2\epsilon}(t, x) \|_{L^p(\Pi_T)} \leq C_0 K_T$, 由于(15)、(16)两不等式的右边每项的估计都只与 $\| u_0 \|_{H^2(R)}$ 和 T 有关而与 ϵ 无关, 所以 K_T 是依赖于 $\| u_0 \|_{H^2(R)}$ 和 T 不依赖于 ϵ 的常数.

引理 6^[4] 若假设 1 和假设 2 成立, 则对任意的 $2 < p < \infty, t \geq 0$ 和 $\epsilon > 0$, 有

$$\| \partial_x^2 u_\epsilon(t, \cdot) \|_{L^p(R)} \leq \| \partial_x^2 u_{\epsilon_0}(t, \cdot) \|_{L^p(R)} e^{K_3 t} + K_4 \frac{e^{K_3 t} - 1}{K_3},$$

其中 $K_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \| u_0 \|_{H^2(R)}, K_4 = (3 + C_0) \| u_0 \|_{H^2(R)}^2$ 是依赖于 $\| u_0 \|_{H^2(R)}$ 的常数.

引理 7^[4] 令 $2 < p < \infty$, 若假设 1 和假设 2 成立. 则方程(6)的解集 $\{u_\epsilon\}_{\epsilon > 0}$ 在 $L_{loc}^\infty([0, T); H^2(R))$ 上是紧致的并且对每一个 $T > 0$ 存在一个递减至零的正序列 $\{\epsilon_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ 以及一个函数 $u \in L^\infty([0, T); H^2(R)) \cap H^1([0, T); H^1(R))$, 使得在 $L^\infty([0, T); H^2(R))$ 上, 有 $u_{\epsilon_h} \rightarrow u$.

定义 1 称函数 $u = u(t, x)$ 是柯西问题(4)式的弱解, 若满足:

- (i) $u(t, x) \in C([0, T); C^1(R)) \cap L^\infty([0, T); H^2(R))$;
- (ii) u 在分布意义下满足方程(4);
- (iii) $u(0, x) = u_0(x)$, 对任意 $x \in R$;
- (iv) $\| u(t, \cdot) \|_{H^2(R)} \leq \| u_0 \|_{H^2(R)}$, 对任意 $t > 0$.

引理 8 若假设 2 成立, 则柯西问题(4)式具有弱解 $u(t, x) \in C([0, T); C^1(R)) \cap L^\infty([0, T); H^2(R))$.

证明 当 $\varepsilon \rightarrow 0^+$, 令 $u(t, x)$ 为黏性渐近解 $u_\varepsilon(t, x)$ 的极限. 由引理 2 ~ 引理 7, 可知

$$u(t, x) \in C([0, T]; C^1(\mathbb{R})) \cap L^\infty([0, T]; H^2(\mathbb{R})),$$

即定义 1 中的 (i), (ii), (iii) 成立.

综合引理 2 和引理 7, 可知定义 1 中 (iv) 成立.

引理 9 设 $2 < p < \infty$, 给定初值 $u_0 \in H^2(\mathbb{R}), \partial_x^2 u_0 \in L^p(\mathbb{R})$, 则存在正常数 T , 使得柯西问题 (4) 式有解 $u \in H^2(\mathbb{R})$.

证明 由引理 1 及引理 7 直接得到.

2 解的正则性估计

引理 10 设 $2 < p < \infty, u_0 \in H^4(\mathbb{R}), \partial_x^2 u_0 \in L^p(\mathbb{R})$, 则存在正常数 T , 使得柯西问题 (4) 式有解 $u \in H^4(\mathbb{R})$.

证明 因为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} (u^2 + u_x^2 + u_{xx}^2 + u_{xxx}^2 + u_{xxxx}^2) dx &= - \int_{\mathbb{R}} u_x^3 dx - 5 \int_{\mathbb{R}} u_x u_{xx}^2 dx - \int_{\mathbb{R}} u_x u_{xxx}^2 dx - 3 \int_{\mathbb{R}} u_x u_{xxxx}^2 dx - \\ &2 \int_{\mathbb{R}} u_{xxx} \left(u^2 + \frac{1}{2} u_x^2 - \frac{1}{2} u_{xx}^2 \right) dx + 4 \int_{\mathbb{R}} u_x^2 u_{xxx} dx - 2 \int_{\mathbb{R}} u_x u_{xx}^2 dx + 2 \int_{\mathbb{R}} u_x u_{xxx}^2 dx + 2 \int_{\mathbb{R}} u_{xxx} u_{xx}^2 dx - \\ &2 \int_{\mathbb{R}} u P_x + u_x P_{xx} + u_{xx} P_{xxx} - u_{xxx} P + u_{xxx} P_{xx} - u_{xxxx} P_x + u_{xxxx} P_{xxx} dx \leq \\ &\int_{\mathbb{R}} |u_x| |u_x^2 + 7u_{xx}^2 - u_{xxx}^2 + 3u_{xxxx}^2| dx + \int_{\mathbb{R}} |u_{xxx}| |-2u^2 + 3u_x^2| dx + \\ &2 \int_{\mathbb{R}} |u P_x + u_x P_{xx} + u_{xx} P_{xxx} - u_{xxx} P + u_{xxx} P_{xx} - u_{xxxx} P_x + u_{xxxx} P_{xxx}| dx, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u\|_{H^4}^2 &\leq 7 \|u_x\|_{L^\infty} \|u\|_{H^4}^2 + 3 \|u_{xxx}\|_{L^\infty} \|u\|_{H^2}^2 + 2 \|P_x\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2}^2 + 2 \|P_{xx}\|_{L^\infty} \|u_x\|_{L^2}^2 + \\ &2 \|P_{xxx}\|_{L^\infty} \|u_{xx}\|_{L^2}^2 + 2 \|P\|_{L^\infty} \|u_{xxx}\|_{L^2}^2 + 2 \|P_{xx}\|_{L^\infty} \|u_{xxx}\|_{L^2}^2 + 2 \|P_x\|_{L^\infty} \|u_{xxxx}\|_{L^2}^2 + \\ &2 \|P_{xxx}\|_{L^\infty} \|u_{xxxx}\|_{L^2}^2 \leq 7 \|u_x\|_{L^\infty} \|u\|_{H^4}^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \|u\|_{H^4}^2 \|u\|_{H^2}^2 + \|P_x\|_{L^\infty}^2 + \|u\|_{L^2}^2 + \\ &\|P_{xx}\|_{L^\infty}^2 + \|u_x\|_{L^2}^2 + \|P_{xxx}\|_{L^\infty}^2 + \|u_{xx}\|_{L^2}^2 + \|P\|_{L^\infty}^2 + \|u_{xxx}\|_{L^2}^2 + \|P_{xx}\|_{L^\infty}^2 + \\ &\|u_{xxx}\|_{L^2}^2 + \|P_x\|_{L^\infty}^2 + \|u_{xxxx}\|_{L^2}^2 + \|P_{xxx}\|_{L^\infty}^2 + \|u_{xxxx}\|_{L^2}^2 \leq \\ &(5\sqrt{2} \|u_0\|_{H^2} + 2) \|u\|_{H^4}^2 + 7C_0 \|u_0\|_{H^2(\mathbb{R})}^2, \end{aligned}$$

其中 $C_1 = (5\sqrt{2} \|u_0\|_{H^2} + 2)$, $C_2 = 7C_0 \|u_0\|_{H^2(\mathbb{R})}^2$ 根据 Gronwall 不等式, 有 $\|u\|_{H^4}^2 \leq \|u_0\|_{H^4}^2 e^{C_1 t} + C_2 \frac{e^{C_1 t} - 1}{C_1}$.

引理 11 设 $2 < p < \infty, u_0 \in H^6(\mathbb{R}), \partial_x^2 u_0 \in L^p(\mathbb{R})$, 则存在正常数 T , 使得柯西问题 (4) 式有解 $u \in H^6(\mathbb{R})$.

证明 类似引理 10 估计可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u\|_{H^6}^2 &\leq (7 \|u_0\|_{H^2} + 7 \|u_0\|_{H^3}^2) \|u\|_{H^6}^2 + 10 \|u_0\|_{H^3}^2 \|u_0\|_{H^5}^2 + \\ &3 \|u_0\|_{H^4}^2 \|u_0\|_{H^2}^2 + 12C_0 \|u_0\|_{H^2(\mathbb{R})}^2, \end{aligned}$$

其中 $C_3 = 7 \|u_0\|_{H^2} + 7 \|u_0\|_{H^3}^2$, $C_4 = 10 \|u_0\|_{H^3}^2 \|u_0\|_{H^5}^2 + 3 \|u_0\|_{H^4}^2 \|u_0\|_{H^2}^2 + 12C_0 \|u_0\|_{H^2(\mathbb{R})}^2$, 根据 Gronwall 不等式, 有 $\|u\|_{H^6}^2 \leq \|u_0\|_{H^6}^2 e^{C_3 t} + C_4 \frac{e^{C_3 t} - 1}{C_3}$.

引理 12 设 $2 < p < \infty, u_0 \in H^2(\mathbb{R}), \partial_x^2 u_0 \in L^p(\mathbb{R})$, 则存在正常数 T , 使得柯西问题 (4) 式有解 $u \in H^1([0, T])$.

证明 在方程 $u_t + uu_x + p_x = 0$ 两边同乘以 u , 有 $uu_t + u^2 u_x + up_x = 0$, 再关于 x 在 R 上进行积分得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_R u^2 dx + \int_R u^2 u_x dx + \int_R up_x dx = 0,$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_R u^2 dx + \int_R up_x dx = - \int_R u^2 u_x dx \leq \|u_x\|_{L^\infty} \int_R u^2 dx \leq \|u\|_{H^2} \int_R u^2 dx. \tag{17}$$

在(17)式两边同乘以 t , 对 t 在 $[\tau, t_1]$ 上进行积分, $\tau, t_1 \in [0, T]$, 有

$$\frac{1}{2} \int_\tau^{t_1} t \frac{d}{dt} \int_R u^2 dx dt + \int_\tau^{t_1} t \int_R up_x dx dt \leq \|u_0\|_{H^2} \int_\tau^{t_1} t \int_R u^2 dx dt,$$

$$t_1 \|u\|_{L^2}^2(t_1) + \int_\tau^{t_1} t \| \sqrt{up_x} \|_{L^2}^2 dt \leq \tau \|u\|_{L^2}^2(\tau) + \int_\tau^{t_1} \|u\|_{L^2}^2 dt +$$

$$\|u_0\|_{H^2} \int_\tau^{t_1} t \|u\|_{L^2}^2 dt \leq \tau \|u\|_{L^2}^2(\tau) + \|u_0\|_{H^2} \int_\tau^{t_1} t \|u\|_{L^2}^2 dt + C_1(T).$$

由于 $\|u\|_{L^2}^2 \in L^2(0, T)$, 存在序列 τ_k , 使得 $\tau_k \rightarrow 0, \tau_k \|u\|_{L^2}^2(\tau_k) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$. 令 $\tau = \tau_k$, 当 $k \rightarrow +\infty$, 运用 Gronwall 不等式, 得

$$t \|u\|_{L^2}^2 + \int_0^T t \| \sqrt{up_x} \|_{L^2}^2 dt \leq C_1(T), t \int_R u^2 dx \leq C_1(T).$$

对方程 $u_t + uu_x + p_x = 0$ 关于 x 进行微分, 再在方程两边同乘以 u_x , 有 $u_x u_{xt} + u_x^3 + uu_x u_{xx} + u_x p_{xx} = 0$, 再关于 x 在 R 上进行积分得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_R u_x^2 dx + \int_R u_x^3 dx + \int_R uu_x u_{xx} dx + \int_R u_x p_{xx} dx = 0,$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_R u_x^2 dx + \int_R u_x p_{xx} dx = - \int_R uu_x u_{xx} dx - \int_R u_x^3 dx = - \frac{1}{2} \int_R u_x^3 dx,$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_R u_x^2 dx + \int_R u_x p_{xx} dx = - \frac{1}{2} \int_R u_x^3 dx \leq \frac{1}{2} \|u\|_{H^2} \int_R u_x^2 dx \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_{H^2} \int_R u_x^2 dx. \tag{18}$$

在(18)式两边同乘以 t , 对 t 在 $[\tau, t_1]$ 上进行积分, $\tau, t_1 \in [0, T]$, 有

$$\frac{1}{2} \int_\tau^{t_1} t \frac{d}{dt} \int_R u_x^2 dx dt + \int_\tau^{t_1} t \int_R u_x p_{xx} dx dt \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_{H^2} \int_\tau^{t_1} t \int_R u_x^2 dx dt,$$

$$t_1 \|u_x\|_{L^2}^2(t_1) + \int_\tau^{t_1} t \| \sqrt{u_x p_{xx}} \|_{L^2}^2 dt \leq \tau \|u_x\|_{L^2}^2(\tau) + \int_\tau^{t_1} \|u_x\|_{L^2}^2 dt + \frac{1}{2} \|u_0\|_{H^2} \int_\tau^{t_1} t \|u_x\|_{L^2}^2 dt \leq$$

$$\tau \|u_x\|_{L^2}^2(\tau) + \frac{1}{2} \|u_0\|_{H^2} \int_\tau^{t_1} t \|u_x\|_{L^2}^2 dt + C_2(T).$$

由于 $\|u_x\|_{L^2}^2 \in L^2(0, T)$, 因此存在序列 τ_k , 使得 $\tau_k \rightarrow 0, \tau_k \|u_x\|_{L^2}^2(\tau_k) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, 令 $\tau = \tau_k$, 当 $k \rightarrow +\infty$, 运用 Gronwall 不等式, 得

$$t \|u_x\|_{L^2}^2 + \int_0^T t \| \sqrt{u_x p_{xx}} \|_{L^2}^2 dt \leq C_2(T),$$

$$t \int_R u_x^2 dx \leq C_2(T).$$

记 $C_1(T) + C_2(T) = C(T)$ 因此有 $t \int_R u^2 + u_x^2 dx \leq C(T), t^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^1} \leq C(T)$.

定理 1 设 $u_0 \in H^6(R)$ 时, 则存在依赖于 $\|u_0\|_{H^6(R)}$ 的时间 $T > 0$, 使得问题(4)式存在解

$$u \in C([0, T]; H^6(R)), u_t \in C^1([0, T] \times R).$$

证明 $u(t, x)$ 是柯西问题(4)式的弱解, 根据引理 10、引理 11, 有 $u \in H^6(R)$, 根据引理 12, $u_t \in H^1([0, T])$, 根据 Sobolev 嵌入定理, 有

$$\forall t, 0 < t < T, u(t, x) \in C^5(R); \forall x \in R, u(t, x) \in C^1[0, T].$$

注 1 在临界状态下, 高阶 Camassa-Holm 方程解的适定性问题尚未得到令人满意的结果; 根据本文的估计方法不能得到很好的结果如: 当 $u_0 \in H^{\frac{5}{2}}(R)$, 只能估计得 $u \in H^4(R)$, 而不能得到本文这么高的正则性估计.

参 考 文 献

- [1] Camassa R, Holm D. An integrable shallow water equation with peaked solitons[J]. *Phys Rev Lett*, 1993, 71:1661-1664.
- [2] Constantin A, Kolev B. Geodesic flow on the diffeomorphism group of the circle[J]. *Comment Math Helv*, 2003, 78(4):787-804.
- [3] Wu Sijue. Well-posedness in sobolev spaces of the full water wave problem in 3-D[J]. *Journal of the American Mathematical Society*, 1999, 12(2):445-495.
- [4] Coclite G M, Holden H, Karlsen K H. Well-posedness of Higher-order Camassa-Holm equation[J]. *Differential Equations*, 2009, 246: 929-963.
- [5] Ding Danping, Lü Peng. Conservative solutions for higher-order Camassa-Holm equations[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2010, 51(7):2-6.
- [6] Tian Lixin, Zhang Ping, Xia Limeng. Global existence for the higher-order Camassa-Holm shallow water equation[J]. *Nonlinear Analysis*, 2011, 74:2468-2474.
- [7] Ding Danping, Liu Xin. The Local Well-posedness of The Higher-order Camassa-Holm Equation[J]. *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, 2013, 4(4):4-8.
- [8] Jiu Quansen, Li Mingjie, Ye Yulin. Global classical solution of the Cauchy problem to 1D compressible Navier-Stokes equations with large initial data[J]. *Differential Equations*, 2014, 257:311-350.
- [9] Cheng Jianfeng, Li Shan. Global weak solutions and regularity for two-dimensional Boussinesq equations with partial dissipation and thermal diffusivity[J]. *Math Anal App*, 2015, 428:794-803.
- [10] 吕 鹏. 高阶 Camassa-Holm 方程解的研究[D]. 镇江:江苏大学, 2009.
- [11] McOwen R C. Partial differential Equations[J]. *Methods and Applications*, 1995, 21:68-73.
- [12] Coclite G M, Holden H, Karlsen K H. Well-posedness of solutions of a Parabolic elliptic system[J]. *Discrete Contin Dynam Systems*, 2005, 13(3):659-682.

The Regularity of Solution of the Cauchy Problem for 2-order Camassa-Holm Equation

DING Danping, ZHU Lin

(College of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

Abstract: In this paper, the Cauchy problem of the second-order Camassa-Holm equation is studied to obtain the existence of the local weak solutions through the approach of viscosity. Also, the regularity of Camassa-Holm equations is researched by using Hölder inequality, Gronwall inequality and a series of prior estimates.

Keywords: second-order Camassa-Holm equation; the existence of weak solutions; the estimate on the regularity of solution